Soit $\{\theta_n\}$ une suite de directions, partout dense dans l'espace. Désignons par $P_{n,m}$ l'ensemble des points a de P tels que $|\cos(ax, \theta_n)| > 1/m$ pour tout point x de R situé à une distance de a moindre que $1/m$. Décomposons chaque ensemble $P_{n,m}$ en une suite $\{P_{n,m,k}\}_{k=1,2,\dots}$ d'ensembles de diamètre moindre que $1/m$. On a alors

(*) $$P = \sum_{n,m} P_{n,m} = \sum_{n,m,k} P_{n,m,k}.$$

Fixons, pour l'instant, trois indices $n=n_0$, $m=m_0$ et $k=k_0$, et posons, pour abréger, $A=P_{n_0,m_0,k_0}$. Choisissons un nouveau système des coordonnées $\xi\eta\zeta$, en prenant pour l'axe $O\zeta$ la droite de direction θ_{n_0}. Nous désignerons généralement, par $Q_{\xi\zeta}$ et $Q_{\eta\zeta}$, lorsque Q est un ensemble ou un point, les projections de Q sur les plans $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ respectivement.

On a $|\cos(\overrightarrow{ax}, O\zeta)| > 1/m_0$ toutes les fois que $a \epsilon A$, $x \epsilon R$ et $0 < \varrho(a, x) < 1/m_0$. Il en résulte immédiatement que, dans le plan $\xi\zeta$, le contingent de l'ensemble $R_{\xi\zeta}$ laisse échapper la droite parallèle à l'axe des ξ en tout point de l'ensemble $A_{\xi\zeta}$. Parsuite, en vertu du th. 1 de ma note précitée, l'ensemble $A_{\xi\zeta}$ est somme d'une infinité au plus dénombrable d'ensembles de longueur finie et $R_{\xi\zeta}$ possède une tangente unique dans tout point de $A_{\xi\zeta}$, excepté au plus un ensemble M de longueur nulle. Pareillement, l'ensemble $R_{\eta\zeta}$ possède une tangente unique dans tout point de $A_{\eta\zeta}$, excepté au plus un ensemble N de longueur nulle. Par conséquent, l'ensemble R possède une tangente unique dans chaque point a de A, excepté tout au plus le cas où $a_{\xi\zeta} \epsilon M$ ou bien $a_{\eta\zeta} \epsilon N$. Or, on constate aisément que les deux quotients $\varrho(a,b)/\varrho(a_{\xi\zeta}, b_{\xi\zeta})$ et $\varrho(a,b)/\varrho(a_{\eta\zeta}, b_{\eta\zeta})$ restent bornés (inférieurs à m_0), quand a et b parcourent l'ensemble A. Parsuite l'ensemble des points exceptionnels de $A=P_{n_0,m_0,k_0}$ où R ne possède pas de tangente unique est de longueur nulle, en même temps que les ensembles M et N. Pour la même raison l'ensemble $A=P_{n_0,m_0,k_0}$ est somme d'une infinité au plus dénombrable d'ensembles de longueur finie, en même temps que sa projection $A_{\xi\zeta}$. Cela achève la démonstration en vertu de l'identité (*).

Sur les espaces multicohérents I.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Un continu localement connexe X est dit *unicohérent*, lorsque'en le décomposant de n'importe quelle manière en deux continus:

(*) $$X = X_1 + X_2,$$

leur partie commune $X_1 \cdot X_2$ est toujours connexe (donc un continu). Dans le cas contraire, X est dit *multicohérent*. L'objet du présent ouvrage [1]) est d'étudier cette propriété au point de vue quantitatif. Posons dans ce but

$$r(X) = \sup\,[b_0(X_1 \cdot X_2) - 1] \quad ^{2)},$$

en faisant le couple des continus X_1, X_2 parcourir toutes les décompositions possibles de la forme (*).

L'égalité $r(X)=0$ exprime donc évidemment l'unicohérence (1-cohérence) de X. Plus généralement, nous appellerons X n-cohérent, lorsque $r(X)+1=n$.

L'unicohérence est caractérisée, comme on sait [3]), par l'évanouissement du premier nombre de Betti. On pourrait donc croire que le nombre $r(X)$ se laisse également exprimer, et d'une manière simple, à l'aide du premier nombre de Betti. Or, il n'en est rien, et nous verrons que l'étude du nombre $r(X)$, et de certaines généralisations de ce nombre, permet de saisir des propriétés plus profondes que celles qui se traduisent par le premier nombre de Betti. Ajoutons que le „Produktsatz" pour le nombre $r(X)$ est tout à fait différent de celui pour le premier nombre de Betti:

---

[1]) Les résultats principaux exposés ici ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Varsovie, séances du 15. 9. 1935 et du 28. 2. 1936.

[2]) $b_0(Y)$ = nombre de composantes de Y, lorsque ce nombre est fini; dans le cas contraire $b_0(Y)=\infty$.

[3]) K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), p. 230; E. Čech, ibid., p. 232.

ce dernier est égal pour le produit cartésien de deux continus $X\times Y$ — comme on sait — à la *somme* des mêmes nombres relatifs à X et à Y, tandis que $r(X\times Y)$ est le *majeur* des nombres $r(X)$ et $r(Y)$.

La méthode dont je vais me servir est celle des transformations continues en circonférence. Elle est due à M. K. Borsuk[4]), qui l'a introduite pour l'étude de l'unicohérence. Je vais appliquer ici, en particulier, la même idée qui m'a permis déjà d'obtenir[5]) les démonstrations simplifiées et généralisées des théorèmes de M. Borsuk sur l'unicohérence et d'une série de théorèmes relevant de la topologie du plan euclidien. Cette idée facilite les calculs desdites transformations en circonférence et en fait un instrument de recherches topologiques particulièrement simple et commode.

L'ouvrage se compose de 3 chapitres. Chapitre I concerne les espaces dont on n'admet pas la connexité locale. §1 est consacré aux généralités et à la déscription de la méthode des transformations continues en circonférence. §2 contient la définition du nombre $r(X)$ pour un espace métrique arbitraire X; cette définition y est formulée à l'aide des transformations en circonférence, ce qui la distingue au point de vue formel de celle du début, qui ne portait que sur les continus localement connexes. Le §3 traite des relations entre le nombre $r(X)$ et les tranformations continues en tore 2-dimensionnel, et le §4 contient le „Produktsatz" pour $r(X)$. Enfin, le §5 est consacré à un problème spécial dans l'espace euclidien à 3 dimensions: le nombre $r(X)$ se prête notamment, comme il sera démontré, à caractériser un genre d'enlacement qui ne tombe pas sous la notion classique d'enlacement homologique.

Chapitre II est consacré aux continus localement connexes. Sa lecture n'éxige que deux premiers §§ du Chap. I. Elle contient, dans son §1, les théorèmes sur l'équivalence entre diverses définitions du nombre $r(X)$ et, dans son §2, l'étude des relations entre ce nombre et le groupe fondamental $\pi_1(X)$, dont il se montre être une fonction.

Chapitre III concerne certaines généralisations du nombre $r(X)$, à savoir les nombres $r_k(X)$ pour $k=1,2,\dots$ où $r_2(X)=r(X)$; ils sont en rapports avec les tranformations continues de X en tores k-dimensionnels.

[4]) K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. 17 (1931), p. 171—209.

[5]) S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), p. 61—112.

Table des matières.

I. MULTICOHÉRENCE DANS LES ESPACES MÉTRIQUES GÉNÉRAUX.

§ 1. Préliminaires.

Tous les espaces à considérer seront supposés métriques et tous les ensembles regardés comme situés dans des espaces métriques. Nous désignerons par:

$|x-y|$ la distance entre points x et y;

R_n l'espace euclidien à n dimensions, en particulier par R_1 l'ensemble de tous les nombres réels;

K_1 l'intervalle clos $<0,1>$;

S_1 l'ensemble de tous les nombres complexes satisfaisant à la condition $|z|=1$;

$X\times Y$ le produit cartésien des espaces X et Y, c. à d. l'espace métrique composé de tous les couples (x,y) où $x\in X$ et $y\in Y$ et

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2};$$

Y^X la classe de toutes les tranformations continues de X en sous-ensembles de Y; dans le cas où Y est borné ou X compact, on considère Y^X comme un espace métrique, en posant pour $f_1, f_2\in Y^X$:

$$|f_1-f_2|=\sup_{x\in X}|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Deux transformations $f_1, f_2 \epsilon Y^X$ seront dites *homotopes*, lorsqu'il existe une transformation $g \epsilon Y^{X \times K_1}$ telle que $g(x, 0) = f_1(x)$ et $g(x, 1) = f_2(x)$ pour $x \epsilon X$.

Y est dit un *rétracte* de X, lorsque $Y \subset X$ et qu'il existe une fonction $g \epsilon Y^X$ telle que $g(y) = y$ pour $y \epsilon Y$.

Y s'obtient de X par une *déformation continue dans* Z, lorsque $X + Y \subset Z$ et qu'il existe une fonction $g \epsilon Z^{X \times K_1}$ telle que $g(x, 0) = x$ pour $x \epsilon X$ et $g(X, 1) = Y$.

Y est dit *rétracte de* X *par déformation* [6]), lorsque $Y \subset X$ et qu'il existe une fonction $g \epsilon X^{X \times K_1}$ telle que $g(x, 0) = x$ pour $x \epsilon X$, $g(X, 1) = Y$ et $g(y, 1) = y$ pour $y \epsilon Y$.

Etant donné une transformation $f \epsilon S_1^X$, nous écrirons

$$f \sim 1 \quad \textit{sur } Y \qquad\qquad (Y \subset X),$$

lorsqu'il existe une fonction $\varphi \epsilon R_1^Y$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \epsilon Y$.

Etant donné un couple de fonctions $f_1, f_2 \epsilon S_1^Y$, nous écrirons

$$f_1 \sim f_2 \quad \textit{sur } Y \qquad\qquad (Y \subset X),$$

lorsqu'on a $f \sim 1$ sur Y pour $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. On vérifie facilement que la relation $f_1 \sim f_2$ est symétrique et transitive et que les relations $f_1 \sim f_2$ et $f_1' \sim f_2'$ entraînent $f_1 \cdot f_1' \sim f_2 \cdot f_2'$ et $\dfrac{f_1}{f_1'} \sim \dfrac{f_2}{f_2'}$ sur Y.

Nous nous appuyerons dans la suite sur les propositions suivantes:

(1) *Pour que l'on ait* $f_1 \sim f_2$ *sur* X *où* $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$, *il faut et il suffit que les transformations* f_1 *et* f_2 *soient homotopes* [7]).

(2) *On a* $f \sim 1$ *sur* X *pour tout* $f \epsilon S_1^X$ *tel que* $f(X) \neq S_1$ [8]).

(3) *On a* $f \sim 1$ *sur* X *pour tout* $f \epsilon S_1^X$ *tel que* $f^p \sim 1$ *sur* X *et* $p \neq 0$ [9]).

[6]) K. Borsuk, Fund. Math. 21 (1933), p. 91.

[7]) S. Eilenberg, l. c., p. 68, th. 1.

[8]) C'est une conséquence immédiate de (1).

[9]) S. Eilenberg, l. c., p. 89, (3).

(4) *Toute fonction* $f \epsilon S_1^Y$ *définie sur un sous-ensemble fermé* Y *de* X *admet une extension* $f' \epsilon S_1^U$ [10]) *où* U *est un ensemble ouvert (tel que* $Y \subset U \subset X$*)* [11]).

(5) *Etant donné une fonction* $f \epsilon S_1^X$, *pour tout ensemble* $Y \subset X$ *tel que* $f \sim 1$ *sur* Y, *il existe un ensemble ouvert* U *tel que* $Y \subset U \subset X$ *et que* $f \sim 1$ *sur* U [12]).

(6) *Soient* X_1 *et* X_2 *deux ensembles fermés dont la partie commune est connexe. Pour toute fonction* $f \epsilon S_1^{X_1 + X_2}$ *telle que* $f \sim 1$ *sur* X_1 *et sur* X_2, *on a* $f \sim 1$ *sur* $X_1 + X_2$ [13]).

(7) *Soit* X *et* Y *un couple de continus et* $(x_0, y_0) \epsilon X \times Y$. *Pour toute fonction* $f \epsilon S_1^{X \times Y}$ *telle que* $f \sim 1$ *sur* $X \times (y_0)$ *et sur* $(x_0) \times Y$, *on a* $f \sim 1$ *sur* $X \times Y$ [14]).

(8) X *étant un espace complet et localement connexe et* $f \epsilon S_1^X$ *une fonction telle que* f *non*~ 1 *sur* X, *il existe une courbe simple fermée* $C \subset X$ *telle que* f *non*~ 1 *sur* C [15]).

En faisant correspondre à tout couple de fonctions $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$ la fonction $f_1 \cdot f_2 \epsilon S_1^X$, on obtient un *groupe abelien*, que nous désignerons également par S_1^X. L'ensemble $P(X) \subset S_1^X$ des fonctions $f \epsilon S_1^X$ telles que l'on a $f \sim 1$ sur X constitue un sous-groupe de S_1^X. Il résulte de (3) que c'est un sous-groupe avec division. Le groupe-quotient $\mathfrak{B}_1(X) = S_1^X / P(X)$ est donc un groupe sans élements d'ordre fini. Nous poserons

$$b_1(X) = \mathfrak{R}\,[\mathfrak{B}_1(X)] \text{ [16])}.$$

Il résulte de (1) que le groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ s'obtient de S_1^X, en y considérant les fonctions homotopes comme identiques.

[10]) On appelle *extension* d'une fonction $f \epsilon B^A$ toute fonction $f' \epsilon B_1^{A_1}$ où $A \subset A_1$, $B \subset B_1$ et $f'(x) = f(x)$ pour $x \epsilon A$.

[11]) S. Eilenberg, l. c., p. 90, (5).

[12]) ibid., p. 65, (6).

[13]) ibid., p. 64, (5).

[14]) ibid., p. 66, (8').

[15]) ibid., p. 84, (3).

[16]) $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ = nombre maximum d'éléments linéairement indépendants d'un groupe abelien $\mathfrak{A}$, lorsque ce nombre est fini; dans le cas contraire $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = \infty$.

Les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ seront appelées *linéairement indépendantes*, lorsque les éléments correspondants de $\mathfrak{B}_1(X)$ sont linéairement indépendants, c. à d. lorsque la relation $\prod_{i=1}^{n} f_i^{p_i} \sim 1$ sur X implique $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$.

Soit $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$. Nous désignerons par $P(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ l'ensemble des fonctions $f \in S_1^X$ telles que $f \sim 1$ sur X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On a évidemment $P(X) \subset P(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Le groupe $P(X_1, X_2, \ldots, X_k)/P(X)$ est donc un sous-groupe de $\mathfrak{B}_1(X)$. Nous poserons:

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \mathfrak{R}[P(X_1, X_2, \ldots, X_k)/P(X)].$$

Il résulte de (3) que $P(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est un sous-groupe avec division de S_1^X. Le groupe-quotient: $S_1^X/P(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est donc un groupe sans éléments d'ordre fini; posons:

$$b_1(X) - p(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \mathfrak{R}[S_1^X/P(X_1, \ldots, X_k)].$$

La „différence" $b_1(X) - p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, ainsi définie, satisfait évidemment à la condition

$$[b_1(X) - p(X_1, X_2, \ldots, X_k)] + p(X_1, X_2, \ldots, X_k) = b_1(X) \tag{9}$$

et sa définition est univoque même dans le cas où les deux membres sont ∞. Remarquons que

$$0 \leqslant p(X_1, X_2, \ldots, X_k) \leqslant b_1(X), \tag{10}$$

$$0 \leqslant b_1(X) - p(X_1, X_2, \ldots, X_k) \leqslant b_1(X). \tag{11}$$

Notons enfin la proposition suivante:

(12) *Pour tout couple X_1 et X_2 d'ensembles connexes, fermés et tels que $X_1 \cdot X_2 \neq 0$, on a*

$$p(X_1, X_2) = b_0(X_1 \cdot X_2 - 1\ ^{2)}),\ ^{17)}.$$

Une famille de fonctions $\Phi \subset S_1^X$ sera dite *k-compatible* $(k = 1, 2, \ldots)$, lorsqu'il existe une décomposition de X en ensembles fermés $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ telle que $\Phi \subset P(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. La condition que Φ soit 1-compatible coïncide évidemment avec la condition $\Phi \subset P(X)$, qui exprime que $f \sim 1$ sur X pour $f \in \Phi$.

[17]) S. Eilenberg, l. c., p. 96.

Pour toutes les décompositions de la forme $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ qui seront considérées dans la suite, il sera admis implicitement que $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont des ensembles fermés.

§ 2. Définition et propriétés élémentaires de $r(X)$.

Posons pour tout espace métrique X:

$$r(X) = \sup p(X_1, X_2),$$
$$b_1(X) - r(X) = \inf [b_1(X) - p(X_1, X_2)],$$

où sup et inf s'étendent sur toutes les décompositions $X = X_1 + X_2$ (ces sommandes étant, bien entendu, supposés fermés).

On voit immédiatement que *pour que l'on ait $r(X) \geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ linéairement indépendantes et 2-compatibles.*

En vertu de §1 (9), (10) et (11), on a:

$$[b_1(X) - r(X)] + r(X) = b_1(X), \tag{1}$$

$$0 \leqslant r(X) \leqslant b_1(X), \tag{2}$$

$$0 \leqslant b_1(X) - r(X) \leqslant b_1(X). \tag{3}$$

En outre, l'ensemble composé d'une seule fonction $f \in S_1^X$ est toujours 2-compatible, car L_1 et L_2 étant deux arcs tels que $S_1 = L_1 + L_2$, il suffit de poser $X_1 = f^{-1}(L_1)$ et $X_2 = f^{-1}(L_2)$ pour en tirer d'après § 1 (2) que $f \sim 1$ sur X_1 et sur X_2. Il en résulte que l'inégalité $b_1(X) > 0$ implique $r(X) > 0$. D'où en vertu de (2)

$$b_1(X) = 0 \quad \textit{équivaut à} \quad r(X) = 0, \tag{4}$$

$$b_1(X) = 1 \quad \textit{implique} \quad r(X) = 1. \tag{5}$$

Théorème 1. *Pour que l'on ait $b_1(X) - r(X) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition $X = X_1 + X_2$ telle que $f \sim 1$ sur X_1 et sur X_2 pour tout $f \in S_1^X$,* c. à d. que $P(X_1, X_2) = S_1^X$.

Cette condition exprime que l'ensemble composé de toutes les fonctions $f \in S_1^X$ est 2-compatible.

Démonstration. Pour que $b_1(X) - r(X) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition $X = X_1 + X_2$ telle que $b_1(X) - p(X_1, X_2) = 0$, c. à d. telle que le groupe $S_1^X/P(X_1, X_2)$ se réduise à l'élément 0. Or, cela équivaut à $S_1^X = P(X_1, X_2)$.

Théorème 2. *Pour tout ensemble $Y\subset X$ qui est un rétracte de X, on a*

$$b_1(Y)\leqslant b_1(X),\quad r(Y)\leqslant r(X)\quad \textit{et}\quad b_1(Y)\leqslant r(Y)\leqslant b_1(X)-r(X).$$

Démonstration. Soit $g\epsilon Y^X$ une fonction telle que $g(y)=y$ pour $y\epsilon Y$.

Soit $b_1(Y)\geqslant n$. Il existe donc n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n \epsilon S_1^Y$. Les fonctions $f_1 g, f_2 g, \dots, f_n g\epsilon S_1^X$ sont donc aussi linéairement indépendantes, puisqu'elles coïncident respectivement avec $f_1, f_2, \dots, f_n$ sur l'ensemble Y. Il en résulte que $b_1(X)\geqslant n$.

La première inégalité est ainsi démontrée. Pour établir la seconde, supposons que $r(X)\geqslant n$. Il existe donc une décomposition $Y=Y_1+Y_2$ et n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n\epsilon S_1^Y$, telles que $f_i\sim 1$ sur Y_1 et sur Y_2 $(i=1, 2, \dots, n)$. En posant $X_1=g^{-1}(Y_1)$ et $X_2=g^{-1}(Y_2)$, on obtient une décomposition $X=X_1+X_2$ telle que $f_i g\sim 1$ sur X_1 et sur X_2. Or, les fonctions $f_1 g, f_2 g, \dots, f_n g\epsilon S_1^X$ étant linéairement indépendantes, il en résulte que $r(X)\geqslant n$.

Soit enfin $X=X_1+X_2$ une décomposition telle que

$$b_1(X)-r(X)=b_1(X)-p(X_1, X_2).$$

Posons $Y_1=Y\cdot X_1$ et $Y_2=Y\cdot X_2$. Soit h la tranformation homomorphe de S_1^X en sous-groupe de S_1^Y faisant correspondre à toute fonction $f\epsilon S_1^X$ la fonction $h(f)\epsilon S_1^Y$, qui est la fonction partielle de f sur l'ensemble Y. On a $h(fg)=f$ pour tout $f\epsilon S_1^Y$, d'où $h(S_1^X)=S_1^Y$. Pour $f\epsilon P(X_1, X_2)$, on a $h(f)\epsilon P(Y_1, Y_2)$, puisque la relation $f\sim 1$ sur X_1 entraîne la relation $f\sim 1$ sur $Y\cdot X_1=Y_1$. On a donc $h[P(X_1, X_2)]\subset P(Y_1, Y_2)$ et finalement

$$\begin{aligned} b_1(X)-r(X)=b_1(X)-p(X_1, X_2)=\mathfrak{R}[S_1^X/P(X_1, X_2)]\geqslant \\ \geqslant \mathfrak{R}[h(S_1^X)/h[P(X_1, X_2)]]=\mathfrak{R}[S_1^Y/h[P(X_1, X_2)]]\geqslant \\ \geqslant \mathfrak{R}[S_1^Y/P(Y_1, Y_2)]=b_1(Y)-p(Y_1, Y_2)\geqslant b_1(Y)-r(Y), \end{aligned}$$

ce qui donne la troisième inégalité.

Théorème 3. *Pour tout ensemble $Y\subset X$ s'obtenant de X par une déformation continue (dans X), on a*

$$b_1(Y)\geqslant b_1(X),\quad r(Y)\geqslant r(X)\quad \textit{et}\quad b_1(Y)-r(Y)\geqslant b_1(X)-r(X).$$

Démonstration. Soit $g\epsilon X^{X\times K_1}$ une fonction telle que $g(x,0)=x$ pour $x\epsilon X$ et $g(X,1)=Y$. Posons $g_0(x)=x$ et $g_1(x)=g(x,1)$ pour $x\epsilon X$. On a $g_0, g_1\epsilon X^X$, $g_1(X)=Y$ et il est évident que les fonctions g_0 et g_1 sont homotopes.

Remarquons d'abord que, pour toute fonction $f\epsilon S_1^X$, la relation $f\sim 1$ sur Y implique la relation $f\sim 1$ sur X. En effet, si $f\sim 1$ sur Y, on a $fg_1\sim 1$ sur X, donc aussi, en vertu de § 1 (1), $fg_0\sim 1$ sur X, les fonctions fg_0 et fg_1 étant homotopes. Mais $fg_0=f$, d'où $f\sim 1$ sur X.

Soit $b_1(X)\geqslant n$. Il existe donc n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n\epsilon S_1^X$. Or, elles sont aussi linéairement indépendantes sur Y, d'où $b_1(Y)\geqslant n$.

Pour démontrer la deuxième inégalité, supposons que $r(X)\geqslant n$. Il existe donc une décomposition $X=X_1+X_2$ et n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n\epsilon S_1^X$, telles que $f_i\sim 1$ sur X_1 et sur X_2 $(i=1, 2, \dots, n)$. En posant $Y_1=Y\cdot X_1$ et $Y_2=Y\cdot X_2$, on obtient une décomposition $Y=Y_1+Y_2$ telle que $f_i\sim 1$ sur Y_1 et sur Y_2. Or, les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ étant linéairement indépendantes sur Y, il vient $r(Y)\geqslant n$.

Soit enfin $Y=Y_1+Y_2$ une décomposition pour laquelle

$$b_1(Y)-r(Y)=b_1(Y)-p(Y_1, Y_2).$$

Posons $X_1=g_1^{-1}(Y_1)$ et $X_2=g_1^{-1}(Y_2)$. Soit h la tranformation homomorphe de S_1^Y en sous-groupe de S_1^X, faisant correspondre à toute fonction $f\epsilon S_1^Y$ la fonction $h(f)=fg_1\epsilon S_1^X$. Pour toute fonction $f\epsilon S_1^Y$ telle que $f\sim 1$ sur Y_1, on a $fg_1\sim 1$ sur $X_1=g^{-1}(Y_1)$, d'où $h[P(Y_1, Y_2)]\subset P(X_1, X_2)$. Comme $P(X)\subset P(X_1, X_2)$, il vient

$$h[P(Y_1, Y_2)]\oplus P(X)\subset P(X_1, X_2)\ ^{18}).$$

Pour tout $f\epsilon S_1^X$, on a $f=fg_0$ et $fg_0\sim fg_1$ sur X, puisque fg_0 et fg_1 sont homotopes. Par conséquent $f\sim h(f')$ où f' désigne la fonction partielle de f sur Y. On en tire

$$h(S_1^Y)\oplus P(X)=S_1^X$$

et finalement

$$\begin{aligned} b_1(Y)-r(Y)=b_1(Y)-p(Y_1, Y_2)=\mathfrak{R}[S_1^Y/P(Y_1, Y_2)]\geqslant \\ \geqslant \mathfrak{R}[h(S_1^Y)/h[P(Y_1, Y_2)]]=\mathfrak{R}[h(S_1^Y)\oplus P(X)/h[P(Y_1, Y_2)]\oplus P(X)]\geqslant \\ \geqslant \mathfrak{R}[S_1^X/P(X_1, X_2)]=b_1(X)-p(X_1, X_2)\geqslant b_1(X)-r(X), \end{aligned}$$

ce qui donne le troisième inégalité.

---

[18]) $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ étant deux sous-groupes d'un groupe abelien $\mathfrak{B}$, nous désignons par $\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2$ le sous-groupe de $\mathfrak{B}$ composé de tous les éléments de la forme $x+y$ où $x\epsilon\mathfrak{A}_1$ et $y\epsilon\mathfrak{A}_2$. L'opération $\oplus$ a priorité avant l'opération $/$.

Les th. 2 et 3 impliquent immédiatement le

Théorème 4. *Pour tout ensemble* $Y \subset X$ *qui est un rétracte de* X *par déformation, on a*

$$b_1(Y)=b_1(X), \quad r(Y)=r(X) \quad \textit{et} \quad b_1(Y)-r(Y)=b_1(X)-r(X).$$

Théorème 5. *Si* X *est compact et* $\dim X \leqslant 1$, *chaque ensemble fini* $\Phi \subset S_1^X$ *est 2-compatible.*

Démonstration. Choisissons un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'on ait pour tout $f \epsilon \Phi$ la relation $f \sim 1$ sur chaque ensemble $Y \subset X$ de diamètre $< \varepsilon$. Par suite des hypothèses faites sur X, il existe une décomposition $X = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont des sommes d'un nombre fini d'ensembles fermés, disjoints et de diamètre $< \varepsilon$ [19]). Il en résulte que $f \sim 1$ sur X_1 et X_2 pour tout $f \epsilon \Phi$, donc que $\Phi \subset P(X_1, X_2)$.

Corollaire 6. *Si* X *est compact et* $\dim X \leqslant 1$, *on a*

$$r(X)=b_1(X).$$

Théorème 7. X *étant un vrai sous-ensemble fermé d'une pseudo-multiplicité* M_2 *à 2 dimensions, chaque ensemble fini* $\Phi \subset S_1^X$ *est 2-compatible.*

Démonstration. Il existe, d'après §1, (4), un ensemble ouvert $U \supset X$ sur lequel se laissent étendre toutes les fonctions de la famille Φ. Soit $P_2 \neq M_2$ un polyèdre 2-dimensionnel tel que $X \subset P_2 \subset U$. Il existe un polyèdre 1-dimensionnel $P_1 \subset P_2$ qui est un rétracte de P_2 par déformation [20]). En vertu du th. 4, on a donc $b_1(P_2)-r(P_2)=b_1(P_1)-r(P_1)$. Le nombre $b_1(P_1)$ étant fini, on déduit du cor. 6 l'égalité $b_1(P_1)-r(P_1)=0$. Par conséquent $b_1(P_2)-r(P_2)=0$. En vertu du th. 1, les fonctions de la famille Φ sont 2-compatibles sur P_2, donc aussi sur $X \subset P_2$.

Corollaire 8. X *étant un vrai sous-ensemble fermé d'une pseudo-multiplicité* M_2 *à 2 dimensions, on a*

$$r(X)=b_1(X).$$

---

[19]) S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), p. 148, th. 2.

[20]) C'est une conséquence du théorème connu: *P_n étant un vrai sous-polyèdre n-dimensionnel d'une pseudo-multiplicité M_n à n dimensions, il existe un polyèdre $(n-1)$-dimensionnel P_{n-1} qui est un rétracte de P_n par déformation.*

Corollaire 9. *On a pour tout ensemble compact* $X \subset R_2$

$$r(X)=b_1(X).$$

Soit une fonction $g \epsilon Y^X$. Considérons la transformation homomorphe de S_1^Y en sous-groupe de S_1^X qui fait correspondre à toute fonction $f \epsilon S_1^Y$ la fonction $fg \epsilon S_1^X$. La relation $f \sim 1$ sur Y implique évidemment la relation $fg \sim 1$ sur X. Cette homomorphie détermine donc une transformation homomorphe du groupe $\mathfrak{B}_1(Y)$ en un sous-groupe de $\mathfrak{B}_1(X)$. Pour que cette homomorphie soit une isomorphie, il faut et il suffit que pour tout $f \epsilon S_1^Y$

(h) $\qquad fg \sim 1$ *sur* X *entraîne* $f \sim 1$ *sur* Y.

Il est évident que dans cette hypothèse $b_1(X) \geqslant b_1(Y)$. Nous allons montrer qu'on a aussi $r(X) \geqslant r(Y)$. Soit $r(Y) \geqslant n$. Il existe donc une décomposition $Y = Y_1 + Y_2$ et n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n \epsilon S_1^Y$ telles que $f_i \sim 1$ sur Y_1 et sur Y_2 $(i=1,2,\dots,n)$. En posant donc $X_1 = g^{-1}(Y_1)$ et $X_2 = g^{-1}(Y_2)$, on a $f_i g \sim 1$ sur X_1 et sur X_2, de sorte que les fonctions $f_1 g, f_2 g, \dots, f_n g \epsilon S_1^Y$ sont 2-compatibles. Or, l'hypothèse (h) implique leur indépendance linéaire, d'où $r(X) \geqslant n$, c. q. f. d.

L'hypothèse (h) est satisfaite dans le cas où X est compact, $Y = g(X)$ et g est soit monotone [21]) soit intérieure [22]). On a donc le théorème suivant:

Théorème 10. *Etant donné une transformation monotone ou intérieure* g *d'un espace compact* X, *on a*

$$b_1(X) \geqslant b_1[g(X)] \quad \textit{et} \quad r(X) \geqslant r[g(X)].$$

§ 3. Transformations en tore T_2.

Soit $T_2 = S_1 \times S_1$. A tout couple ordonné de fonctions $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$ correspond d'une façon biunivoque une fonction $f = (f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ définie par la formule

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \text{ pour } x \epsilon X.$$

L'homotopie de deux fonctions $f = (f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ et $g = (g_1, g_2) \epsilon T_2^X$ équivaut, comme on le vérifie facilement, à l'homotopie simultanée de f_1 à g_1 et de f_2 à g_2. En vertu de §1, (1) on obtient donc l'énoncé suivant:

---

[21]) La transformation continue g est dite (selon M. G. T. Whyburn) *monotone*, lorsque pour tout $y \epsilon g(X)$ l'ensemble $g^{-1}(y)$ est connexe. Pour la démonstration de (h) voir S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), p. 165.

[22]) La transformation continue g est dite (selon M. S. Stoïlow) *intérieure*, lorsque pour tout ensemble ouvert $U \subset X$ l'ensemble $g(U)$ est ouvert dans $g(X)$. Pour la démonstration de (h) voir S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), p. 174.

Pour que deux fonctions $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ et $g=(g_1, g_2) \epsilon T_2^X$ soient homotopes, il faut et il suffit que l'on ait

$$f_1 \sim g_1 \quad \textit{et} \quad f_2 \sim g_2 \quad \textit{sur } X.$$

Une transformation $f \epsilon T_2^X$ sera dite *essentielle*[23]), lorsque, pour toute transformation $g \epsilon T_2^X$ homotope avec f, on a $g(X)=T_2$.

Comme d'autre part l'ensemble $P_1=(1)\times S_1+S_1\times(1)$ s'obtient, pour tout $y \epsilon T_2$, de $T_2-(y)$ par une déformation continue dans T_2, on a l'énoncé suivant:

Pour qu'une transformation $f \epsilon T_2^X$ ne soit pas essentielle, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $g \epsilon T_2^X$ homotope à f et telle que

$$g(X) \subset P_1.$$

Théorème 1. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour tout couple $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$:*

(α_1) *les transformations f_1 et f_2 sont 2-compatibles*

(α_2) *il existe une décomposition $X=X_1+X_2$ pour laquelle $f_1 \sim 1$ sur X_1 et $f_2 \sim 1$ sur X_2*

(α_3) *la transformation $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ n'est pas essentielle.*

Démonstration. Il est évident que (α_1) entraîne (α_2). Admettons la condition (α_2). Il existe alors deux fonctions $\varphi_1 \epsilon R_1^{X_1}$ et $\varphi_2 \epsilon R_1^{X_2}$ telles que $f_1(x)=e^{i\varphi_1(x)}$ pour $x \epsilon X_1$ et $f_2(x)=e^{i\varphi_2(x)}$ pour $x \epsilon X_2$. Soient $\psi_1 \epsilon R_1^X$ et $\psi_2 \epsilon R_1^X$ des extensions de φ_1 et de φ_2 respectivement[24]). Posons $g_1(x)=f_1(x)\cdot e^{-i\psi_1(x)}$ et $g_2(x)=f_2(x)\cdot e^{-i\psi_2(x)}$ pour $x \epsilon X$. On a $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ sur X, d'où l'homotopie des transformations $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ et $g=(g_1, g_2) \epsilon T_2^X$. On a $g_1(x)=1$ pour $x \epsilon X_1$ et $g_2(x)=1$ pour tout $x \epsilon X_2$, d'où $g(X_1) \subset (1)\times S_1$ et $g(X_2) \subset S_1 \times (1)$. Finalement $g(X) \subset (1)\times S_1+S_1\times(1)=P_1$, de sorte que la transformation $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ n'est pas essentielle et par conséquent la condition (α_3) est satisfaite.

Reste à montrer que (α_3) implique (α_1). Soit à ce but $g=(g_1, g_2) \epsilon T_2^X$ une transformation homotope à $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$, est telle que $g(X) \subset P_1$. Soit $S_1=L_1+L_2$ la décomposition de S_1 en deux arcs aux extrémités -1 et 1. Posons:

$$X_1=g^{-1}[(1)\times L_1+L_1\times(1)] \quad \text{et} \quad X_2=g^{-1}[(1)\times L_2+L_2\times(1)].$$

Il vient $X=X_1+X_2$ et les ensembles X_1 et X_2 sont fermés. On a $g(x) \epsilon (1)\times L_1+L_1\times(1)$ pour tout $x \epsilon X_1$, d'où $g_1(x) \epsilon L_1$ et $g_2(x) \epsilon L_1$. Par conséquent, $g_1(X_1) \subset L_1$ et $g_2(X_1) \subset L_1$ et, par raison de symétrie, $g_1(X_2) \subset L_2$ et $g_2(X_2) \subset L_2$. Il en résulte en vertu de § 1 (2) que $g_1, g_2 \epsilon P(X_1, X_2)$. Or, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ sur X, d'où $f_1, f_2 \epsilon P(X_1, X_2)$, c. q. f. d.

Théorème 2. *Si $b_1(X)-r(X)=0$, aucune transformation $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ n'est essentielle.*

Démonstration. D'après le § 2, th. 1, il existe une décomposition $X=X_1+X_2$ telle que $P(X_1, X_2)=S_1^X$. En particulier, on a donc $f_1, f_2 \epsilon P(X_1, X_2)$, c. à d. que f_1 et f_2 sont 2-compatibles. Ainsi la transformation $f=(f_1, f_2)$ n'est pas essentielle en vertu du th. 1.

Théorème 3. *Si $b_1(X) \geqslant 2$ et aucune transformation $f \epsilon T_2^X$ n'est essentielle, on a $r(X) \geqslant 2$.*

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$ deux transformations linéairement indépendantes. La transformation $f=(f_1, f_2) \epsilon T_2^X$ n'étant pas essentielle, il résulte du th. 1 que les fonctions f_1 et f_2 sont 2-compatibles. Donc $r(X) \geqslant 2$.

Les th. 2 et 3 et § 1, (2) et (4), donnent le

Théorème 4. *Si $b_1(X)=2$, on a $r(X)=1$ ou $r(X)=2$ suivant qu'il existe une transformation essentielle $f \epsilon T_2^X$ ou non.*

§ 4. Produits cartésiens.

Nous ferons correspondre à toute fonction $f \epsilon S_1^X$ ainsi qu'à toute fonction $g \epsilon S_1^Y$ les fonctions $f^*, g^* \epsilon S^{X\times Y}$ définies comme il suit:

$$f^*(x, y)=f(x), \qquad (x, y) \epsilon X\times Y$$
$$g^*(x, y)=g(y).$$

Remarquons d'abord que

(1) *La relation $f^*\cdot g^* \sim 1$ sur $X\times Y$ équivaut à la réunion des relations $f \sim 1$ sur X et $g \sim 1$ sur Y.*

[23]) H. Hopf, Recueil Soc. Math. de Moscou 37 (1932), p. 53—62.

[24]) v. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933, p. 211.

En effet, soit $(x_0, y_0) \epsilon X \times Y$. Si $f^* \cdot g^* \sim 1$ sur $X \times Y$, on a $f^* \cdot g^* \sim 1$ sur $X \times (y_0)$ et sur $(x_0) \times Y$. Mais $g^* \sim 1$ sur $X \times (y_0)$ et $f^* \sim 1$ sur $(x_0) \times Y$, donc $f^* \sim 1$ sur $X \times (y_0)$ et $g^* \sim 1$ sur $(x_0) \times Y$. Il en résulte que $f \sim 1$ sur X et $g \sim 1$ sur Y.

La proposition (1) implique immédiatement l'enoncé suivant:

(2) *Les indépendances linéaires de fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n \epsilon S_1^X$ *et* $g_1, g_2, \ldots, g_m \epsilon S_1^Y$ *entraînent celle des fonctions* $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*, g_1^*, g_2^*, \ldots, g_m^* \epsilon S_1^{X \times Y}$.

Il en résulte le

Théorème 1. $b_1(X \times Y) \geqslant b_1(X) + b_1(Y)$.

Admettons maintenant que X et Y soient des continus. Soit $h \epsilon S_1^{X \times Y}$ et $(x_0, y_0) \epsilon X \times Y$. Posons $f(x) = h(x, y_0)$ pour $x \epsilon X$ et $g(y) = h(x_0, y)$ pour $y \epsilon Y$. On a évidemment $h \sim f^* \cdot g^*$ sur $X \times (y_0)$ et sur $(x_0) \times Y$. Il en résulte en vertu de §1 (7) que $h \sim f^* \cdot g^*$ sur $X \times Y$. En vertu de (1) on obtient

(3) *Si X et Y sont des continus, la relation qui fait correspondre à tout couple de fonctions $f \epsilon S_1^X$ et $g \epsilon S_1^Y$ la fonction $f^* \cdot g^* \epsilon S_1^{X \times Y}$ détermine l'isomorphie*

$$\mathfrak{B}_1(X \times Y) \simeq \mathfrak{B}_1(X) \times \mathfrak{B}_1(Y) \quad {}^{25}).$$

On en tire immédiatement le

Théorème 2. *Pour tout couple des continus X et Y, on a*

$$b_1(X \times Y) = b_1(X) + b_1(Y).$$

Remarque. On vérifie facilement que, pour X et Y compacts, on a

$$b_1(X \times Y) = b_1(X) \cdot b_0(Y) + b_0(X) \cdot b_1(Y).$$

Théorème 3. *On a pour* $T_2 = S_1 \times S_2$

$$b_1(T_2) = 2 \quad \textit{et} \quad r(T_2) = 1.$$

Démonstration. La formule $b_1(T_2) = 2$ résulte du th. 2, puisque $b_1(S_1) = 1$ [26]). Pour démontrer que $r(T_2) = 1$, il s'agit donc en vertu de §3 th. 4 d'indiquer une transformation essentielle

[25]) $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ étant des groupes abeliens, on désigne par $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ le groupe des couples (x, y) où $x \epsilon \mathfrak{A}_1$, $y \epsilon \mathfrak{A}_2$, avec $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

[26]) S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), p. 94, démonstration du th. 5.

$f \epsilon T_2^{T_2}$. Or, il suffit de poser $f(x) = x$ pour $x \epsilon T_2$, puisque T_2 n'admet notoirement aucune déformation continue en son vrai sous-ensemble [27]).

Théorème 4. *Pour que deux transformations $f \epsilon S_1^X$ et $g \epsilon S_1^Y$, où X et Y sont supposés compacts, soient toutes les deux non ~ 1, il faut et il suffit que la transformation $h = f \times g \epsilon T_2^{X \times Y}$, définie par la formule*

$$h(x, y) = (f(x), g(y)) \quad \textit{pour} \quad (x, y) \epsilon X \times Y,$$

soit essentielle.

Démonstration. Il est évident que la condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est aussi nécessaire, remarquons que l'on a

$$h(x, y) = (f(x), g(y)) = (f^*(x, y), g^*(x, y)),$$

d'où $h = (f^*, g^*)$. En vertu de §3, th. 1, il suffit donc d'établir la proposition suivante:

(4) *X et Y étant compacts et $f \epsilon S_1^X$, $g \epsilon S_1^Y$ deux fonctions telles que f non ~ 1 sur X et g non ~ 1 sur Y, les fonctions $f^*, g^* \epsilon S_1^{X \times Y}$ ne sont pas 2-compatibles.*

Démonstration. On peut admettre que X et Y sont des sous-ensembles fermés du cube fondamental de Hilbert Q_ω. Les fonctions f et g se laissent donc (§1, (4)) étendre respectivement sur certains ensembles $U \supset Y$ et $V \supset Y$ ouverts dans ce cube. On a donc $f^*, g^* \epsilon S_1^{U \times V}$. Supposons à présent que les fonctions f^* et g^* soient 2-compatibles sur l'ensemble $X \times Y$. Il existe alors une décomposition $X \times Y = Z_1 + Z_2$ telle que $f^*, g^* \epsilon P(Z_1, Z_2)$. En vertu de §1 (5) il existe dans $U \times V$ deux ensembles ouverts $W_1 \supset Z_1$ et $W_2 \supset Z_2$ tels que $f^*, g^* \epsilon P(\overline{W}_1, \overline{W}_2)$. Soient X' et Y' deux ensembles fermés et localement connexes tels que

$$X \subset X' \subset U, \quad Y \subset Y' \subset V, \quad X' \times Y' \subset W_1 + W_2.$$

Les fonctions f^* et g^* sont alors 2-compatibles sur $X' \times Y'$.

[27]) Cela résulte p. ex. du fait que T_2, considéré comme sous-ensemble de R_3, y est une coupure irréductible. Or, le th. de balayage de M. K. Borsuk (Monatshefte für Math. u. Phys. 38 (1931), p. 385) implique qu'une coupure irréductible compacte X de R_n n'admet aucune déformation continue en son vrai sous-ensemble.

L'ensemble X' est compact, localement connexe et on a f *non* ~ 1 sur X'. Il existe donc en vertu de § 1 (8) une courbe simple fermée $C_1 \subset X'$ telle que f *non* ~ 1 sur C_1. D'une façon analogue, on trouve une courbe simple fermée $C_2 \subset Y'$ telle que g^* *non* ~ 1 sur C_2. Les fonctions f^* et g^* sont donc 2-compatibles sur l'ensemble $T_2' = C_1 \times C_2$, et d'après (2) elles y sont linéairement indépendantes. Il en résulte que $r(T_2') \geqslant 2$, contrairement au th. 3.

Remarque. Il serait intéressant de savoir si l'on peut supprimer dans le th. 4 l'hypothèse de compacité de X et de Y.

La proposition (4) nous permet d'établir le th. suivant, qui est le th. principal de ce §:

Théorème 5. *On a pour tout couple des continus X et Y:*

$$r(X \times Y) = \max\,[r(X), r(Y)].$$

Démonstration. Soit $y_0 \epsilon Y$. On a $r(X) = r(X \times (y_0))$, puisque X et $X \times (y_0)$ sont homéomorphes. D'autre part, $r(X \times (y_0)) \leqslant r(X \times Y)$, puisque $X \times (y_0)$ est un rétracte de $X \times Y$ (§ 1, th. 1). Par conséquent $r(X \times Y) \geqslant r(X)$ et, par raison de symétrie, $r(X \times Y) \geqslant r(Y)$, d'où $r(X \times Y) \geqslant \max\,[r(X), r(Y)]$.

Pour prouver que $r(X \times Y) \leqslant \max\,[r(X), r(Y)]$, supposons que $r(X \times Y) \geqslant n$, $r(X) < n$ et $r(Y) < n$. Il existerait alors une décomposition $X \times Y = Z_1 + Z_2$ telle que $P(Z_1, Z_2) \geqslant n$.

Soit $(x_0, y_0) \epsilon X \times Y$ et $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ deux décompositions satisfaisant aux conditions:

$$\begin{aligned} X_i \times (y_0) &= Z_i \cdot (X \times (y_0)), \\ (x_0) \times Y_i &= Z_i \cdot ((x_0) \times Y). \end{aligned} \qquad i = 1, 2$$

Si, pour une certaine fonction $h \epsilon P(Z_1, Z_2)$, on a $h \sim f^* \cdot g^*$ où $f \epsilon S_1^X$ et $g \epsilon S_1^Y$. alors $h \sim 1$ sur $X_1 \times (y_0)$, sur $X_2 \times (y_0)$, sur $(x_0) \times Y_1$ et sur $(x_0) \times Y_2$ et, par conséquent $f^* \sim 1$ sur $X_1 \times (y_0)$ et sur $X_2 \times (y_0)$ et $g^* \sim 1$ sur $(x_0) \times Y_1$ et sur $(x_0) \times Y_2$, puisque $g^*(x, y_0) = g(y_0) = \text{const}$ et $f^*(x_0, y) = f(x_0) = \text{const}$. Il en résulte que $f \epsilon P(X_1, X_2)$ et $g \epsilon P(Y_1, Y_2)$. Conformément à (3), on peut donc admettre que le groupe $P(Z_1, Z_2)/P(X \times Y)$ est un sous-groupe de $[P(X_1, X_2)/P(X)] \times [P(Y_1, Y_2)/P(Y)]$. Les inégalités $p(Z_1, Z_2) \geqslant n$, $r(X) < n$ et $r(Y) < n$ impliquent les inégalités

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[P(Z_1, Z_2)/P(X \times Y)] &> \mathfrak{R}[P(X_1, X_2)/P(X)], \\ \mathfrak{R}[P(Z_1, Z_2)/P(X \times Y)] &> \mathfrak{R}[P(Y_1, Y_2)/P(Y)]. \end{aligned}$$

On en déduit [28]) que

$$\begin{aligned} [P(Z_1, Z_2)/P(X \times Y)] \cdot [P(X_1, X_2)/P(X)] &\neq (0) \neq \\ \neq [P(Z_1, Z_2)/P(X \times Y)] \cdot [P(Y_1, Y_2)/P(Y)]&. \end{aligned}$$

Ces inégalités, traduites en langage de fonctions, expriment l'existence de deux fonctions $f \epsilon P(X_1, X_2)$ et $g \epsilon P(Y_1, Y_2)$ telles que f *non* ~ 1 sur X, g *non* ~ 1 sur Y et $f^*, g^* \epsilon P(Z_1, Z_2)$. On obtient donc une contradiction avec (4)

§ 5. Enlacement faible.

Nous allons appliquer dans ce § les considérations des §§ 2 et 3 à l'étude d'une certaine relation topologique dans l'espace euclidien à 3 dimensions R_3 (compactifié par l'addition du point à l'infini).

Rappelons d'abord quelques notions introduites par M. K. Borsuk et moi [29]).

Soit $P \subset R_3$ un polyèdre et γ un cycle 1-dimensionnel et à coefficients entiers de $R_3 - P$. Le cycle γ et une fonction $f \epsilon S_1^P$ sont dits *parallèles* [30]), lorsqu'on a pour tout cycle (1-dimensionnel) $\bar{\gamma}$ de P

$$v(\gamma; \bar{\gamma}) = g(f; \bar{\gamma})$$

où $v(\gamma; \bar{\gamma})$ désigne le coefficient d'enlacement des cycles γ et $\bar{\gamma}$ et $g(f; \bar{\gamma})$ le „Abbildungsgrad" de la transformation de $\bar{\gamma}$ par f.

Soient $X \subset R_3$ un ensemble compact et γ un cycle de $R_3 - X$. Le cycle γ et une fonction $f \epsilon S_1^X$ sont dits *parallèles au sens fort* [31]), lorsqu'il existe un polyèdre $P \supset X$ sur lequel la fonction f admet une extension $f' \epsilon S_1^P$ parallèle à γ.

Etant donné deux fonctions $f_1, f_2 \epsilon S_1^Y$ telles que $f_1 \sim f_2$ sur X et deux cycles γ_1, γ_2 de $R_3 - X$ tels que $\gamma_1 \approx \gamma_2$ dans $R_3 - X$, les parallélismes forts de f_1 à γ_1 et de f_2 à γ_2 sont équivalents. Il

[28]) En vertu du lemme: $\mathfrak{B}$ *étant un sous-groupe du produit* $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ *de deux groupes abeliens libres tels que* $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}) > \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1)$ *et* $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}) > \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_2)$, *il existe des éléments* $x \epsilon \mathfrak{A}_1$ *et* $y \epsilon \mathfrak{A}_2$ *tels que* $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \epsilon \mathfrak{B}$ *et* $y \epsilon \mathfrak{B}$. En effet, en supposant que la partie commune de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{A}_1$ se réduit à l'élément 0, on trouverait que la fonction faisant correspondre à tout $(x, y) \epsilon \mathfrak{B}$ l'élément $x \epsilon \mathfrak{A}_1$ est une isomorphie, ce qui est impossible, puisque $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}) > \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1)$.

[29]) K. Borsuk et S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen Euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. 26 (1936), p. 207—223.

[30]) ibid., p. 210.

[31]) ibid., p. 217.

en résulte que le parallélisme fort peut être considéré comme une relation entre les éléments des groupes $\mathfrak{B}_1(X)$ et $B^1(R_3-X)$ [32]). On montre [33]) que *cette relation est une isomorphie.*

Notons encore que si la fonction $f \epsilon S_1^X$ et le cycle γ de R_3-X sont parallèles au sens fort et si Y est un sous-ensemble fermé de X, la fonction $f \epsilon S_1^Y$ et le cycle γ de R_3-Y sont aussi parallèles au sens fort.

Soient dans l'espace R_3 deux tores ouverts (c. à d. ensembles homéomorphes à $S_1 \times R_2$) C_1 et C_2 tels que $\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2 = 0$. Posons $X = R_3 - (C_1 + C_2)$. On a alors [33]) $b_1(X) = p_1(R_3 - X) = p_1(C_1 + C_2) = p_1(C_1) + p_1(C_2) = 2$. D'après §2, (2) et (4), on a donc soit $r(X)=1$, soit $r(X)=2$.

Deux cycles 1-dimensionnels γ_1 et γ_2 de R_3 seront dits *faiblement enlacés*, lorsque pour tout couple de polyèdres $P_1 \subset R_3$ et $P_2 \subset R_3$ tels que $\gamma_i \approx 0$ dans P_i $(i=1,2)$, on a $P_1 \cdot P_2 \neq 0$.

Les tores ouverts C_1 et C_2 seront dits *faiblement enlacés*, lorsque tout couple de cycles γ_i de C_i tels que γ_i *non* ≈ 0 dans C_i $(i=1,2)$ est faiblement enlacé.

Théorème 1. *On a $r(X)=1$ ou $r(X)=2$ où $X=R_3-(C_1+C_2)$, suivant que les tores C_1 et C_2 sont faiblement enlacés ou non.*

Démonstration. Supposons que les tores C_1 et C_2 ne sont pas faiblement enlacés. Il existe alors deux cycles γ_i de C_i et deux polyèdres P_i tels que

$$\begin{aligned} &\gamma_i \approx 0 \quad \text{dans } P_i, \\ &\gamma_i \text{ non} \approx 0 \quad \text{dans } C_i, \\ &P_1 \cdot P_2 = 0. \end{aligned} \qquad i=1,2$$

Soient $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$ deux fonctions respectivement parallèles au sens fort aux cycles γ_1 et γ_2. Les cycles γ_1 et γ_2 étant linéairement indépendants (dans le sens de l'homologie $\approx$) dans C_1+C_2, les fonctions f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes. Choisissons deux ensembles ouverts U_1 et U_2 tels que

$$P_1 \subset U_1, \qquad P_2 \subset U_2 \qquad \text{et} \qquad U_1 \cdot U_2 = 0.$$

[32]) $B^1(Y)$ désigne le premier groupe de Betti de Y. Comme les cycles ont des coefficients entiers et l'homologie $\approx$ est conçue avec division, $B^1(Y)$ est un groupe (abelien) sans éléments d'ordre fini. On pose par définition: $p_1(Y) = \mathfrak{R}[B^1(Y)]$.

[33]) K. Borsuk et S. Eilenberg, l. c., p. 218, Satz 2.

Posons:

$$X_1 = X - U_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = X - U_2.$$

Les ensembles X_1 et X_2 sont donc fermés et on a $X = X_1 + X_2$ et $\gamma_i \approx 0$ dans $R_3 - X_i$ $(i=1,2)$. Par conséquent, $f_i \sim 1$ sur X_i $(i=1,2)$ et d'après §3 th.1 les fonctions $f_1, f_2 \epsilon S_1^X$ sont 2-compatibles. Ainsi $r(X) \geqslant 2$.

Supposons que $r(X)=2$. Il existe donc selon §2 th.1 une décomposition $X = X_1 + X_2$ telle que l'on a $f \sim 1$ sur X_1 et sur X_2, quelle que soit la fonction $f \epsilon S_1^X$. Il en résulte que, pour tout cycle γ de $C_1 + C_2$, on a $\gamma \approx 0$ dans $R_3 - X_1$ et dans $R_3 - X_2$. Il existe donc deux cycles γ_i de C_i tels que

$$\begin{aligned} &\gamma_i \approx 0 \quad \text{dans } R_3 - X_i, \\ &\gamma_i \text{ non} \approx 0 \quad \text{dans } C_i. \end{aligned} \qquad i=1,2$$

Choisissons deux polyèdres $P_i \subset R_3 - X_i$ tels que $\gamma_i \approx 0$ dans P_i. On a $P_1 \cdot P_2 \cdot X = P_1 \cdot P_2 \cdot (X_1 + X_2) = 0$ et $\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2 = 0$; il existe par conséquent un $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$\varrho(X, P_1 \cdot P_2) > \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \varrho(\overline{C}_1, \overline{C}_2) > \varepsilon \quad ^{34)}.$$

Soient K_i deux complexes 2-dimensionnels de P_i avec $K_i = \alpha_i \cdot \gamma$ $(\alpha_i \neq 0,\ i=1,2)$. Supposons que K_i soient donnés dans une division simpliciale en simplexes de diamètre $< \varepsilon$. Désignons par K_i la somme de tous les simplexes de K_i (munis des mêmes coefficients) qui ont un point commun avec $R_3 - C_i$. Posons $\gamma_i' = K_i'$. On a évidemment

$$\gamma_i' \approx \alpha_i \cdot \gamma_i \quad \text{dans } C_i \qquad i=1,2,$$

d'où γ_i' *non* ≈ 0 dans C_i. Or, les cycles γ_1' et γ_2' ne sont pas faiblement enlacés, puisque les complexes K_1' et K_2' n'ont aucun point commun. Il en résulte que les tores C_1 et C_2 ne sont non plus faiblement enlacés.

Le th.1 et §3 th.4 donnent le

Théorème 2. *Pour que deux tores ouverts C_1 et C_2 soient faiblement enlacés, il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle $f \epsilon T_2^{R_3-(C_1+C_2)}$.*

[34]) $\varrho(X, Y) = \sup |x - y|$ pour $x \epsilon X$ et $y \epsilon Y$.

II. CONTINUS LOCALEMENT CONNEXES.

§ 1. Autres définitions de $r(X)$.

X désignera dans ce § et dans le suivant un continu localement connexe.

(1) *Soit $f_1, f_2, ..., f_n \in S_1^X$. Pour tout ensemble fermé $Y \subset X$ tel que $f_i \sim 1$ sur Y $(i=1, 2, ..., n)$, il existe un continu localement connexe $Y' \subset X$ tel que $Y \subset Y'$ et $f_i \sim 1$ sur Y' $(i=1, 2, ..., n)$.*

Démonstration. En vertu de I, § 1, (5), il existe un ensemble ouvert $U \subset X$ tel que $Y \subset U$ et $f_i \sim 1$ sur U $(i=1, 2, ..., n)$. Soit $Y_1 \subset U$ un ensemble fermé, localement connexe et tel que $Y \subset Y_1$. L'ensemble Y_1 (comme compact et localement connexe) admet un nombre fini k de composantes. Dans le cas $k=1$ on peut évidemment poser $Y'=Y_1$, puisque Y_1 est un continu. Nous allons maintenant ramener le cas de k $(k>1)$ au cas de $k-1$. Soit à ce but $L \subset X$ un arc simple tel que l'ensemble $Y_1 \cdot L$ se réduise aux extrémités a et b de L, ces dernières étant situées respectivement dans deux composantes distinctes A et B de Y_1. En vertu de I, § 1, (8), on a $f_i \sim 1$ sur L. Par l'application successive de I, § 1, (6) on obtient donc $f_i \sim 1$ sur $A+L+B$, d'où $f_i \sim 1$ sur Y_1+L $(i=1, 2, ..., n)$. Or, l'ensemble Y_1+L est fermé, localement connexe et ne contient que $k-1$ composantes.

Théorème 1. *On a*

$$r(X)=\sup\,[b_0(X_1, X_2)-1] \quad ^{2}),$$

en faisant parcourir X_1 et X_2 les continus tels que $X=X_1+X_2$.

Théorème 1'. *On a*

$$r(X)=\sup\,[b_0(X_1, X_2)-1] \quad ^{2}),$$

en faisant parcourir X_1 et X_2 les continus localement connexes tels que $X=X_1+X_2$.

Démonstration. Pour toute décomposition $X=X_1+X_2$ en continus, on a selon I, § 1, (12), $p(X_1, X_2)=b_0(X_1, X_2)-1$, d'où $r(X) \geqslant \sup\,[b_0(X_1, X_2)-1]$. Admettons que $r(X) \geqslant n$. Il existe donc n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, ..., f_n \in S_1^X$ et une décomposition $X=X_1+X_2$ (en X_1 et X_2 fermés) telle que $f_i \sim 1$ sur X_1 et sur X_2 $(i=1, 2, ..., n)$. En vertu de (1), il existe deux continus localement connexes X_1' et X_2' tels que $X_1 \subset X_1' \subset X$, $X_2 \subset X_2' \subset X$, $f_i \sim 1$ sur X_1' et sur X_2' $(i=1, 2, ..., n)$. Par conséquent, $X=X_1'+X_2'$ et $p(X_1', X_2') \geqslant n$. D'après I, § 1, (12), on a donc $b_0(X_1' \cdot X_2')-1 \geqslant n$, ce qui prouve les deux théorèmes.

Remarque. On voit sans peine qu'*en supposant que X est un polyèdre connexe*, on peut affirmer dans (1) que Y' est un polyèdre connexe, de sorte que *toutes les décompositions dont il est question dans cet ouvrage peuvent être remplacées par celles en polyèdres connexes.*

Théorème 2. *Pour que l'on ait $r(X) \geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe un polyèdre (topologique) 1-dimensionnel $P_1 \subset X$ tel que $b_1(P_1)=n$ et qui soit un rétracte de X.*

Démonstration. La condition est nécessaire. D'après le th. 1, il existe une décomposition $X=X_1+X_2$ en continus tels que $b_0(X_1 \cdot X_2)-1 \geqslant n$. On peut s'arranger de façon que X_1, X_2 et $X_1 \cdot X_2$ soient localement connexes. Alors on construit facilement deux polyèdres (topologiques) $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$ connexes, 1-dimensionnels, sans courbes simples fermées et tels que $D_1 \cdot D_2$ se compose de $n+1$ composantes contenues dans $n+1$ composantes différentes de $X_1 \cdot X_2$. Chaque composante de $D_1 \cdot D_2$ est un polyèdre (topologique) connexe, 1-dimensionnel et sans courbes simples fermées, donc un rétracte absolu [35]).

Il en résulte que l'ensemble $D_1 \cdot D_2$ est un rétracte de $X_1 \cdot X_2$. Soit f la rétraction de $X_1 \cdot X$ en D. Posons:

$$\begin{array}{ll} f_1(x)=f(x) & \text{pour } x \in X_1 \cdot X_2 \\ f_1(x)=x & \text{pour } x \in D_1, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_2(x)=f(x) & \text{pour } x \in X_1 \cdot X_2 \\ f_2(x)=x & \text{pour } x \in D_1. \end{array}$$

Les ensembles D_1 et D_2 étant des rétractes absolus [35]), il existe [36])

[35]) Un espace compact X est dit *étracte absolu* (K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 159), lorsqu'il est un rétracté de tout espace dans lequel il est plongé. Les polyèdres connexes 1-dimensionnels qui ne contiennent aucune courbe simple fermée sont des rétractes absolus.

[36]) K. Borsuk, ibid., p. 161.

deux fonctions $g_1 \epsilon D_1^{X_1}$ et $g_2 \epsilon D_2^{X_2}$ qui sont des extensions de f_1 et de f_2 respectivement. En posant

$$g(x)=g_i(x) \quad \text{pour} \quad x \epsilon X_i, \qquad i=1,2$$

on trouve que D_1+D_2 est un rétracte de X. Reste à prouver que $b_1(D_1+D_2)=n$. Soit $f \epsilon S_1^{D_1+D_2}$. Aucun des continus localement connexes D_1 et D_2 ne contenant de courbes simples fermées, on trouve selon I, §1, (8), $f \sim 1$ sur D_1 et sur D_2, c. à d. $f \epsilon P(D_1, D_2)$. On a donc $S_1^{D_1+D_2}=P(D_1, D_2)$, d'où $b_1(D_1+D_2)=p(D_1, D_2)$, donc en vertu de I, §1, (12), $b_1(D_1+D_2)=b_0(D_1 \cdot D_2)-1=n$.

La condition est suffisante. Soit $P_1 \subset X$ un rétracte 1-dimensionnel de X et $b_1(P_1)=n$. En vertu de I, §2, th. 6 et 2, on a donc $n=b_1(P_1)=r(P_1) \leqslant r(X)$, d'où $r(X) \geqslant n$.

Théorème 3. *On a*

$$r(X)=\sup b_1(Y),$$

en faisant parcourir Y tous les rétractes 1-dimensionnels de X.

Démonstration. Il résulte du th. 2 que $r(X) \leqslant \sup b_1(Y)$. D'autre part, pour tout rétracte 1-dimensionnel Y de X, on a en vertu de I, §2, th. 6 et 2, $b_1(Y)=r(Y) \leqslant r(X)$, d'où $r(X) \geqslant \sup b_1(Y)$.

Théorème 4. *Pour que l'on ait $r(X) \geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe une transformation monotone*[21]) *g de X telle que $b_1[g(X)] \geqslant n$ et* $\dim [g(X)]=1$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $r(X) \geqslant n$. Il existe en vertu du th. 3 un rétracte Y de X tel que $b_1(Y) \geqslant n$ et $\dim Y=1$. Soit Y^X une fonction telle que l'on ait $f(y)=y$ pour $y \epsilon Y$. Il existe [37]) un continu Z et deux fonctions $g \epsilon Z^X$ et $h \epsilon Y^Z$ telles que 1° g est monotone 2° $Z=g(X)$ 3° $\dim Z \leqslant \dim Y$ 4° $f=hg$.

En vertu de 3°, on a $\dim Z=1$. Reste à montrer que $b_1(Z) \geqslant n$. Or, pour tout $y \epsilon Y$, on a $f(y)=y$, d'où $hg(y)=y$. La fonction g transforme donc l'ensemble $Y \subset X$ en $g(Y) \subset Z$ par homéomorphie.

Considérons la fonction $gh(z)$ pour $z \epsilon Z$. Pour $z \epsilon g(Y)$, il existe un $y \epsilon Y$ tel que $z=g(y)$, donc $gh(z)=ghg(y)=g(y)$, puisque $hg(y)=f(y)=y$, d'où $gh(z)=z$ pour $z \epsilon g(Y)$. L'ensemble $g(Y)$ est donc un rétracte de Z. Or, $g(Y)$ est homéomorphe à Y. Par conséquent $b_1[g(Y)] \geqslant n$, d'où en vertu de I, §2, th. 2, $b_1(Z) \geqslant n$.

La condition est suffisante. En vertu de I, §2, th. 10 et 6, on a en effet $r(X) \geqslant r[g(X)]=b_1[g(X)] \geqslant n$.

[37]) G. T. Whyburn, Amer. Jour. of Math. 56 (1934), p. 297; S. Eilenberg, Fund. Math. 22 (1934), p. 292—293.

§ 2. Le groupe fondamental.

Soit G un groupe topologique. Un sous-groupe G' de G sera dit *rétracte de* G [38]), lorsqu'il existe une transformation homomorphe et continue h transformant G en G' de manière que $h(x)=x$ pour $x \epsilon G'$.

Nous allons considérer une fonction $\tau(G)$ faisant correspondre à tout groupe topologique G un entier non négatif ou ∞, defini comme il suit:

Pour que l'on ait $\tau(G) \geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-groupe G' de G qui soit: 1° discret (c. à d. sans point d'accumulation dans G), 2° libre (non-abelien), 3° un rétracte de G, 4° engendré par n générateurs (libres).

On voit aussitôt que dans le cas où G est un groupe abelien, on a soit $\tau(G)=1$ soit $\tau(G)=0$.

Désignons par $\pi_1(X)$ le groupe fondamental du continu localement connexe X, relativement à un point fixe $x_0 \epsilon X$. Dans le cas où on ne suppose rien de plus sur la structure locale de X, le groupe $\pi_1(X)$ doit être considéré comme un groupe topologique [39]). Si X est non seulement localement connexe en dimension 0 (c. à d. localement connexe dans le sens ordinaire), mais aussi en dimension 1 (c. à d. que toute fonction $f \epsilon X^{S_1}$ est homotope à 0 dans un ensemble de diamètre arbitrairement petit, pourvu que le diamètre de $f(S_1)$ soit suffisamment petit), le groupe $\pi_1(X)$ devient un groupe discret à un nombre fini de générateurs et de relations définissantes.

Théorème 1. *On a pour tout continu localement connexe X*

$$r(X)=\tau[\pi_1(X)].$$

La démonstration repose entièrement sur la proposition suivante, qui résulte de la théorie des espaces asphériques de M. W. Hurewicz [40]):

[38]) W. Hurewicz, *Beiträge zur Topologie der Deformationen IV, Asphärische Räume*, Proceed. Akad. Amsterdam 39 (1936), p. 220.

[39]) ibid., p. 218—219.

[40]) ibid., p. 216 et 220.

(1) *Pour qu'un polyèdre $P_1 \subset X$ connexe et à 1 dimension soit un rétracte du continu localement connexe X, il faut et il suffit que:*

(*) *chaque parcours clos W dans P_1 qui est homotope à 0 dans X soit homotope à 0 dans P_1.*

(**) *le groupe $\pi_1(P_1)$ (qui peut être considéré en vertu de (*) comme un sous-groupe de $\pi_1(X)$) soit un rétracte de $\pi_1(X)$.*

Ceci admis, soit $r(X) \geqslant n$. En vertu de II, §1, th. 2, il existe donc un polyèdre (topologique) 1-dimensionnel $P_1 \subset X$ étant un rétracte de X tel que $b_1(P_1)=n$. Le groupe $\pi_1(P_1)$ est alors un groupe discret libre à n générateurs et en vertu de (**) il est un rétracte de $\pi_1(X)$. Par conséquent $\tau[\pi_1(X)] \geqslant n$, d'où $r(X) \leqslant \tau[\pi_1(X)]$

Pour démontrer l'inégalité inverse, admettons que $\tau[\pi_1(X)] \geqslant n$. Soient donc $w_1, w_2, \dots, w_n$ les n éléments de $\pi_1(X)$ qui engendrent un groupe discret, libre et qui constitue un rétracte de $\pi_1(X)$.

Considérons dans le cercle-unité K_2 (défini par l'inégalité $|z| \leqslant 1$) un polyèdre Q_1 à 1 dimension composé de n courbes simples fermées $C_1, C_2, \dots, C_n$ ayant deux à deux exactement un point en commun, à savoir le point 0.

Soit $f \epsilon X^{Q_1}$ une transformation continue telle que le parcours $f \epsilon X^{C_i}$ appartienne à l'élément w_i $(i=1, 2, \dots, n)$. Soit, dans le produit cartésien $X \times K_2$, P_1 le sous-ensemble composé de points de la forme $g(x)=(f(x), x)$ pour $x \epsilon Q_1$. La fonction g établit une homéomorphie entre P_1 et Q_1. On en conclut que $b_1(P_1)=n$.

En identifiant chaque point $x \epsilon X$ avec le point $(x, 0) \epsilon X \times K_2$, les groupes $\pi_1(X)$ et $\pi_1(X \times K_2)$ sont identiques. En considérant les parcours $f_t(x)=(f(x), tx)$ pour $x \epsilon C_i$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, on trouve que les parcours $f \epsilon (X \times K_1)^{C_i}$ et $W_i = g \epsilon (X \times K_1)^{C_i}$ sont homotopes et appartiennent aux éléments w_i de $\pi_1(X \times K_1)$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Soit W un parcours clos de P_1, non homotope à 0 dans P_1. Il est donc homotope à une expression non triviale des parcours W_i. Or, on a $W_i \epsilon w_i$ et, le sous-groupe G' de $\pi_1(X \times K_1)$ engendré par $w_1, w_2, \dots, w_n$ étant libre, chaque expression non triviale de $w_1, w_2, \dots, w_n$ diffère de 0. Par conséquent, le parcours W n'est pas homotope à 0 dans $X \times K_1$. La condition (*) est ainsi satisfaite. La condition (**) l'est aussi, puisque $G' = \pi_1(P_1)$ est supposé un rétracte de $\pi_1(X \times K_2)$. Il résulte donc de (1) que P_1 est un rétracte de $X \times K_2$. En vertu de II, §1, th. 2, on a donc $r(X \times K_2) \geqslant n$, d'où, en vertu de I, §2, th. 4, $r(X) \geqslant n$, puisque X est un rétracte de $X \times K_2$ par déformation. On a donc $r(X) \geqslant \tau[\pi_1(X)]$, ce qui achève la démontration.

Corollaire 2. *Si, pour deux continus localement connexes X_1 et X_2, les groupes $\pi_1(X_1)$ et $\pi_1(X_2)$ sont isomorphes, on a $r(X_1)=r(X_2)$.*

Corollaire 3. *Si, pour un continu localement connexe X, le groupe $\pi_1(X)$ est abelien, on a soit $r(X)=0$, soit $r(X)=1$.*

Corollaire 4. *Si un continu localement connexe X est un groupe topologique, on a soit $r(X)=0$, soit $r(X)=1$.*

Pour démontrer le cor. 4, on n'a qu'à remarquer que, X étant un groupe topologique, le groupe $\pi_1(X)$ est abelien [41].

Théorème 5 [42]. *Si un continu X localement connexe en dimensions 0 et 1 est métriquement homogène, on a soit $r(X)=0$, soit $r(X)=1$.*

Démonstration. Soient u et w deux éléments du groupe $\pi_1(X)$. D'après un théorème de MM. D. van Dantzig et B. L. van der Waerden [43], $\pi_1(X)$ contient seulement un nombre fini d'éléments différents de la forme $u^{-n} w u^n$. Le sous-groupe de $\pi_1(X)$ engendré par u et w est donc non libre, d'où on tire $\tau[\pi_1(X)] < 2$.

Théorème 6. *Si le groupe $\pi_1(X)$ d'un continu X localement connexe en dimensions 0 et 1 est un groupe libre, on a $r(X)=b_1(X)$.*

Démonstration. Soit $\pi_1(X)$ un groupe libre à n générateurs. On a donc $\tau[\pi_1(X)] \geqslant n$ et par conséquent $r(X) \geqslant n$. D'autre part, on en déduit [44] pour le premier nombre de Betti $p_1(X)$ que $p_1(X)=n$. Le continu X étant localement connexe, on a [45] $p_1(X)=b_1(X)$ et finalement $r(X)=b_1(X)$.

Nous allons évaluer maintenant le nombre $r(G \times H)$ pour le produit direct $G \times H$ des groupes G et H. Nous établirons notamment l'équivalence des deux propositions suivantes:

---

[41]) ibid., p. 223, renvoi [19a]).

[42]) Je dois ce théorème à M. W. Hurewicz.

[43]) D. van Dantzig und B. L. van der Waerden, Abh. Hamb. Sem. 6 (1928), p. 269.

[44]) W. Hurewicz, l. c., p. 229, renvoi [15]).

[45]) K. Borsuk et S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), p. 221.

(P_1) *On a pour tout couple* X, Y *de polyèdres connexes*

$$r(X\times Y)=\max[r(X), r(Y)].$$

(P_2) *On a pour tout couple* G, H *de groupes au nombre fini de générateurs et de relations définissantes*

$$\tau(G\times H)=\max[\tau(G), \tau(H)].$$

En effet:

(i) $$\pi_1(X\times Y)=\pi_1(X)\times\pi_1(Y)\ ^{46)}.$$

Admettons (P_2). Il vient alors en vertu de (i) et (P_2)

$$r(X\times Y)=\tau[\pi_1(X\times Y)]=\tau[\pi_1(X)\times\pi_1(Y)]=$$
$$=\max[\tau(\pi_1(X)), \tau(\pi_1(Y))]=\max[r(X), r(Y)].$$

Admettons (P_1). G et H étant deux groupes au nombre fini de générateurs et de relations définissantes, il existe [47]) deux polyèdres connexes X et Y tels que

(ii) $$\pi_1(X)=G \quad \text{et} \quad \pi_1(Y)=H.$$

En vertu de (ii), (i) et (P_1), on a alors

$$\tau(G\times H)=\tau[\pi_1(X)\times\pi_1(Y)]=\tau[\pi_1(X\times Y)]=r(X\times Y)=$$
$$=\max[r(X), r(Y)]=\max[\tau(\pi_1(X)), \tau(\pi_1(Y))]=\max[\tau(G), \tau(H)].$$

On peut remplacer dans ce qui precède la notion de polyèdre connexe par celle de continu localement connexe en dimensions 0 et 1.

Or, la proposition (P_1) a été établie pour les continus arbitraires (voir Chap. I, § 4, th. 5).

La démonstration suivante de (P_2), purement algébrique, m'a été obligeamment communiquée par M. W. Hurewicz.

Le cas $\tau(G)=\tau(H)=0$ doit être traité séparément. On trouve sans peine $\tau(G\times H)=0$.

Le groupe G étant un rétracte de $G\times H$, on a $\tau(G)\leqslant\tau(G\times H)$. Pareillement, $\tau(H)\leqslant\tau(G\times H)$. On a donc $\tau(G\times H)\leqslant\max[\tau(G), \tau(H)]$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, supposons que $\tau(G\times H)=n$ et que $\tau(G)<n>\tau(H)$. Le cas $\tau(G)=\tau(H)=0$ étant exclu, on peut admettre $n\geqslant 2$.

[46]) Seifert—Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig—Berlin, B. G. Teubner, 1934, p. 156.

[47]) ibid., p. 180.

Soit Γ une transformation homomorphe rétractant le groupe $G\times H$ en sous-groupe $F\subset G\times H$ à n générateurs libres. On a

$$F=\Gamma(G)\oplus\Gamma(H),$$

c. à d. que F se compose de tous les éléments de la forme $\Gamma(g)\cdot\Gamma(h)$, g et h désignant les eléments de G et de H respectivement.

La relation $g\cdot h=h\cdot g$ entraîne

(iii) $$\Gamma(g)\cdot\Gamma(h)=\Gamma(h)\cdot\Gamma(g).$$

Soit maintenant:

$$f=\Gamma(g)=\Gamma(h),$$
$$f_1=\Gamma(g_1)\cdot\Gamma(h_1).$$

On a en vertu de (iii)

$$f\cdot f_1=\Gamma(h)\cdot\Gamma(g_1)\cdot\Gamma(h_1)=\Gamma(g_1)\cdot\Gamma(h)\cdot\Gamma(h_1)=$$
$$=\Gamma(g_1)\cdot\Gamma(g)\cdot\Gamma(h_1)=\Gamma(g_1)\cdot\Gamma(h_1)\cdot\Gamma(g)=f_1\cdot f.$$

L'élément f satisfait donc à la condition $f\cdot f_1=f_1\cdot f$ pour tout $f_1\in F$, a. à d. qu'il appartient au *centre* du groupe F. Or, le centre d'un groupe à $n\geqslant 2$ générateurs libres se compose de l'élément neutre e. On en tire $f=e$ pour tout f tel que $f\in\Gamma(G)$ et $f\in\Gamma(H)$.

Considérons deux éléments $f_1\neq e$ et $f_2\neq e$ tels que

$$f_1\in\Gamma(G) \quad \text{et} \quad f_2\in\Gamma(H).$$

On a alors $(f_1)^{n_1}\neq(f_2)^{n_2}$ pour tout couple d'entiers sauf $n_1=n_2=0$; d'autre part, en vertu de (iii), on a $f_1\cdot f_2=f_2\cdot f_1$. Le sous-groupe de F engendré par les éléments f_1 et f_2 est donc un groupe obelien libre à 2 générateurs, contrairement au théorème de O. Schreier, d'après lequel le sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre. On peut donc admettre que

$$\Gamma(H)=(e).$$

Soit Γ_1 la transformation homomorphe de $G\times H$ en G, telle que $\Gamma_1(g\cdot h)=g$. Un calcul facile montre que l'homomorphie $\Gamma_1\Gamma$ effectue la rétraction de G en son sous-groupe $\Gamma_1(F)$, qui est isomorphe de F. On en tire $\tau(G)\geqslant n$.

III. GÉNÉRALISATIONS.

§ 1. Définition et propriétés élémentaires de $r_k(X)$.

Comme une généralisation des notions introduites dans le § 2 du Chap. I, nous allons considérer les décompositions de l'espace métrique X en sommandes fermés $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ et étudier les nombres

$$r_k(X) = \sup p(X_1, X_2, \ldots, X_k),$$
$$b_1(X) - r_k(X) = \inf [b_1(X) - p(X_1, X_2, \ldots, X_k)],$$

où sup et inf s'étendent sur toutes les décompositions de ce genre.

On voit immédiatement que *pour que l'on ait $r_k(X) \geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ linéairement indépendantes et k-compatibles.*

Tout comme au § 2 du Chap. I, on obtient les formules et les théorèmes suivants:

(1) $$[b_1(X) - r_k(X)] + r_k(X) = b_1(X),$$

(2) $$0 = r_1(X) \leqslant r_2(X) = r(X) \leqslant r_3(X) \leqslant \ldots \leqslant b_1(X),$$

(3) $$b_1(X) = b_1(X) - r_1(X) \geqslant b_1(X) - r_2(X) = b_1(X) - r(X) \geqslant$$
$$\geqslant b_1(X) - r_3(X) \geqslant \ldots \geqslant 0,$$

(4) $b_1(X) = 0$ *équivaut à* $r_k(X) = 0$ *pour* $k > 1$,

(5) $b_1(X) = 1$ *implique* $r_k(X) = 1$ *pour* $k > 1$.

Théorème 1. *Pour que l'on ait $b_1(X) - r_k(X) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ telle que $f \sim 1$ sur X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ pour tout $f \in S_1^X$,* c. à d. telle que $P(X_1, X_2, \ldots, X_k) = S_1^X$.

Cette condition exprime que l'ensemble composé de toutes les fonctions $f \in S_1^X$ est k-compatible.

Théorème 2. *Pour tout ensemble $Y \subset X$ qui est un rétracte de X, on a*

$$r_k(Y) \leqslant r_k(X) \qquad \text{et} \qquad b_1(Y) - r_k(Y) \leqslant b_1(X) - r_k(X).$$

Théorème 3. *Pour tout ensemble $Y \subset X$ s'obtenant de X par une déformation continue (dans X), on a*

$$r_k(Y) \geqslant r_k(X) \qquad \text{et} \qquad b_1(Y) - r_k(Y) \geqslant b_1(X) - r_k(X).$$

Théorème 4. *Pour tout ensemble $Y \subset X$ qui est un rétracte de X par déformation, on a*

$$r_k(Y) = r_k(X) \qquad \text{et} \qquad b_1(Y) - r_k(Y) = b_1(X) - r_k(Y).$$

Théorème 5. *Si X est compact et* $\dim X \leqslant k-1$, *chaque ensemble fini $\Phi \subset S_1^X$ est k-compatible.*

Corollaire 6. *Si X est compact et* $\dim X \leqslant k-1$, *on a*

$$r_k(X) = b_1(X).$$

Théorème 7. *X étant un vrai sous-ensemble fermé d'une pseudo-multiplicité M_k à k dimensions, chaque ensemble fini $\Phi \subset S_1^X$ est k-compatible.*

Corollaire 8. *X étant un vrai sous-ensemble fermé d'une pseudo-multiplicité M_k à k dimensions, on a*

$$r_k(X) = b_1(X).$$

Corollaire 9. *On a pour tout ensemble compact $X \subset R_k$*

$$r_k(X) = b_1(X).$$

Théorème 10. *Etant donné une transformation monotone ou intérieure g d'un espace compact X, on a*

$$r_k(X) \geqslant r_k[g(X)].$$

§ 2. Transformations en tores T_n.

L'espace est dans ce § supposé compact.

Soit T_n le produit cartésien de n circonférences S_1. A tout système ordonné de n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ correspond d'une façon biunivoque une fonction $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in T_n^X$ définie par la formule

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \qquad \text{pour} \quad x \in X.$$

L'homotopie de deux fonctions $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in T_n^X$ et $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T_n^X$ équivaut, comme on le vérifie facilement, à l'homotopie simultanée des f_i aux g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En vertu de I, § 1, (1), on obtient donc l'énoncé suivant:

Pour que deux transformations $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in T_n^X$ et $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T_n^X$ soient homotopes, il faut et il suffit que l'on ait

$$f_i \sim g_i \quad \textit{sur } X \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Une transformation $f \epsilon T_n^X$ sera dite *essentielle en dimension* k, lorsqu'on a pour toute transformation $g \epsilon T_n^X$ homotope à f

$$\dim [g(X)] \geqslant k.$$

Chaque sous-ensemble 0-dimensionnel et fermé de T_n étant contractile dans T_n (vers un point), on trouve que les transformations $f \epsilon T_n^X$ essentielles en dimension 1 coïncident avec les transformations non contractiles (c. à d. non homotopes à une fonction $g(x)=\text{const.}$).

Chaque ensemble fermé $Y \subset T_n \neq Y$ se laisse déformer dans T_n en un ensemble de dimension $\leqslant n-1$. Il en résulte que pour qu'*une transformation* $f \epsilon T_n^X$ *soit essentielle en dimension* n, *il faut et il suffit que, pour toute transformation* $g \epsilon T_n^X$ *homotope à* f, *on ait* $g(X)=T_n$. Les transformations essentielles $f \epsilon T_2^X$ coïncident donc avec celles essentielles en dimension 2.

Toute transformation $f \epsilon T_n^X$ est inessentielle (c. à d. n'est pas essentielle) en toute dimension $k>n$.

Désignons par $P_{n,k}$ $(k=0,1,...,n)$ l'ensemble des points

$$x=(x_1, x_2, ..., x_n) \epsilon T_n$$

ayant au moins $n-k$ coordonnées égales à 1. On a:

$$P_{n,0} \subset P_{n,1} \subset ... \subset P_{n,n} = T_n \quad \text{et} \quad \dim P_{n,k}=k.$$

Faisons correspondre à tout point

$$x=(x_1, x_2, ..., x_n) \epsilon R_n$$

le point

$$h(x)=(e^{ix_1}, e^{ix_2}, ..., e^{ix_n}) \epsilon T_n.$$

On a ainsi $h \epsilon T_n^{R_n}$. Posons $Q_{n,k}=h^{-1}(P_{n,k})$. On voit aussitôt que $Q_{n,k}$ est l'ensemble des points de R_n dont au moins $n-k$ coordonnées sont $\equiv 0 \mod 2\pi$.

(1) *Toute transformation* $\varphi \epsilon Q_{n,k}^X$, *où* X *est un sous-ensemble fermé d'un espace compact* Y, *admet une extension* $\varphi' \epsilon Q_{n,k+1}^Y$.

Démonstration. Il existe un polyèdre $W \subset Q_{n,k}$ tel que $\varphi(X) \subset W$. On voit facilement qu'il existe un polyèdre $W_1 \subset Q_{n,k+1}$ dans lequel le polyèdre W est contractile. La fonction $\varphi \epsilon W_1^X$ est donc homotope à une transformation $\varphi_1(x)=\text{const.}$ Il en résulte [48]) l'existence d'une extension $\varphi' \epsilon W_1^Y$ de la fonction φ, c. q. f. d.

[48]) K Borsuk Fund. Math. 19 (1932). p. 229.

Théorème 1. *Pour tout système ordonné de* n *fonctions*

$$(*) \qquad f_1, f_2, ..., f_n \epsilon S_1^X$$

les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(α_1) *les transformations* $(*)$ *sont* k*-compatibles*

(α_2) *il existe une transformation* $g \epsilon T_n^X$ *homotope à la transformation*

$$(**) \qquad f=(f_1, f_2, ..., f_n) \epsilon T_n^X$$

et telle que $g(X) \subset P_{n,k+1}$

(α_3) *la transformation* $(**)$ *est inessentielle en dimension* k.

Démonstration. $(\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$. Dans le cas $k=1$ la condition (α_1) exprime que $f_j \sim 1$ sur X pour $j=1, 2, ..., n$. La transformation $(**)$ est alors homotope à la transformation $g(x)=(1, 1, ..., 1)=P_{n,0}$. La condition (α_2) est donc satisfaite. Admettons que l'implication $(\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$ soit démontrée dans le cas de $k-1$.

Selon (α_1), il existe une décomposition

$$X=X_1+X_2+...+X_k$$

telle que

$$f_1, f_2, ..., f_n \epsilon P(X_1, X_2, ..., X_k).$$

Posons

$$X'=X_1+X_2+...+X_{k-1}.$$

Les transformations $(*)$ sont donc $(k-1)$-compatibles sur l'ensemble X'. Il existe par conséquent des transformations

$$f_1', f_2', ..., f_n' \epsilon S_1^{X'}$$

telles que

$$f_j \sim f_j' \quad \text{sur } X' \qquad \text{pour} \quad j=1, 2, ..., n$$

et que

$$\text{(i)} \qquad f'(X') \subset P_{n,k-2} \quad \text{où} \quad f'=(f_1', f_2', ..., f_n') \epsilon T_n^{X'}.$$

Soient $\varphi_j \epsilon R_1^{X'}$ $(j=1, 2, ..., n)$ n fonctions telles que

$$\text{(ii)} \qquad f_j'(x)=f_j(x) \cdot e^{i\varphi_j(x)} \qquad \text{pour} \quad x \epsilon X'.$$

La relation $f_j \sim 1$ sur X_k implique l'existence des fonctions $\varphi_j \epsilon R_1^{X_k}$ $(j=1, 2, ..., n)$ telles que

$$\text{(iii)} \qquad f_j(x)=e^{i\varphi_j'(x)} \qquad \text{pour} \quad x \epsilon X_k.$$

En posant donc $\varphi_j''(x)=\varphi_j(x)+\varphi_j'(x)$ pour $x\in X'\cdot X_k$, on a

$$f_j'(x)=e^{i\varphi_j'(x)}\cdot e^{i\varphi_j(x)}=e^{i\varphi_j''(x)} \qquad \text{pour} \quad x\in X'\cdot X_k.$$

Posons

$$\varphi''=(\varphi_1'', \varphi_2'', \ldots, \varphi_n'')\in R_n^{X'\cdot X_k}$$

On a alors $f'(x)=h(\varphi''(x))$ pour $x\in X'\cdot X_k$, d'où en vertu de (i)

$$\varphi''(X'\cdot X_k)\subset Q_{n,k-2}.$$

Il existe donc d'après (1) une fonction

$$\varphi^*=(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*)\in R_n^{X_k}$$

telle que

(iv) $$\varphi^*(X_k)\subset Q_{n,k-1}$$

et que

$$\varphi^*(x)=\varphi_j''(x) \qquad \text{pour} \quad x\in X'\cdot X_k \text{ et } j=1, 2, \ldots, n.$$

Posons pour $j=1, 2, \ldots, n$:

$$\psi_j(x)=\varphi_j(x) \qquad \text{pour} \quad x\in X',$$
$$\psi_j(x)=\varphi_j^*(x)-\varphi_j'(x) \qquad \text{pour} \quad x\in X_k.$$

Si $x\in X'\cdot X_k$, on a $\varphi_j^*(x)-\varphi_j'(x)=\varphi_j''(x)-\varphi_j'(x)=\varphi_j(x)$. On a ainsi $\psi_j\in R_1^X$ pour $j=1, 2, \ldots, n$. Posons:

$$g_j(x)=f_j(x)\cdot e^{i\psi_j(x)}$$

et

$$g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)\in T_n^X.$$

Pour $x\in X'$, il vient selon (ii) $g_j(x)=f_j'(x)$, d'où en vertu de (i)

$$g(X')\subset P_{n,k-1}.$$

Pour $x\in X_k$, on a en vertu de (iii)

$$g_j(x)=f_j(x)\cdot e^{i\psi_j(x)}=e^{i\varphi_j'(x)}\cdot e^{i[\varphi_j^*(x)-\varphi_j'(x)]}=e^{i\varphi_j^*(x)},$$

d'où en vertu de (iv)

$$g(X_k)\subset P_{n,k-1}.$$

Finalement $g(X)\subset P_{n,k-1}$, conformément à (α_2).

L'implication $(\alpha_2)\to(\alpha_3)$ étant évidente, il reste à prouver que $(\alpha_3)\to(\alpha_1)$.

Soient $g_i\in S_1^X$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ n transformations telles que

(v) $$g_i\sim f_i \quad \text{sur } X$$

et que

$$\dim[g(X)]\leqslant k-1 \quad \text{où} \quad g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)\in T_n^X.$$

Faisons correspondre à tout point $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in T_n$ le point $c_i(x)=x_i\in S_1$. On a ainsi $c_i\in S_1^{T_n}$ et $c_i g=g_i$ pour $i=1, 2, \ldots, n$. D'après III, §1, th. 5, les fonctions $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont k-compatibles sur l'ensemble $g(X)$. Il existe donc une décomposition

$$g(X)=Y_1+Y_2+\ldots+Y_k$$

telle que

$$c_1, c_2, \ldots, c_n\in P(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

Comme $g_i=c_i g$ pour $i=1, 2, \ldots, n$, on obtient, en posant $X_i=g^{-1}(Y_i)$, une décomposition

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_k$$

telle que

$$g_1, g_2, \ldots, g_n\in P(X_1, X_2, \ldots, X_k),$$

ce qui donne (α_1) en vertu de (v).

Théorème 2. *Si $b_1(X)-r_k(X)=0$, chaque transformation $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)\in T_n^X$ est inessentielle en dimension k.*

Démonstration. D'après III, §1, th. 1, les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son k-compatibles. En vertu du th. 1, la transformation $f\in T_n^X$ est par conséquent inessentielle en dimension k.

Théorème 3. *Si $b_1(X)\geqslant n$ et chaque transformation $f\in T_n^X$ est inessentielle en dimension k, on a $r_k(X)\geqslant n$.*

Démonstration. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n\in S_n^X$ n transformations linéairement indépendantes. La transformation $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)\in T_n^X$ étant inessentielle en dimension k, il résulte du th. 1 que les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont k-compatibles, d'où $r_k(X)\geqslant n$.

Les th. 2 et 3 donnent le

Théorème 4. *Si $b_1(X)=n$, on a $r_k(X)<n$ ou $r_k(X)=n$, suivant qu'il existe ou non une transformation $f\in T_n^X$ essentielle en dimension k.*

Corollaire 5. *Si $b_1(X)=n$, on a $r_k(X)=n$ pour $k>n$.*

Pour établir ce corollaire, il suffit d'observer que chaque transformation $f \in T_n^X$ est inessentielle en toutes les dimensions $k > n$. La même remarque donne en vertu du th. 1 le suivant

Corollaire 6. *Les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ sont toujours k-compatibles pour $k > n$.*

Théorème 7. *Si les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ et $g_1, g_2, \ldots, g_n \in S_1^X$ sont respectivement k_1- et k_2-compatibles, les transformations $f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2, \ldots, f_n \cdot g_n \in S_1^X$ sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles.*

Démonstration. En posant

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in T_n^X \qquad \text{et} \qquad g = g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T_n^X,$$

on peut supposer en vertu du th. 1 que

$$f(X) \subset P_{n, k_1 - 1} \qquad \text{et} \qquad g(X) \subset P_{n, k_2 - 1}.$$

Pour tout $x \in X$, on a donc dans la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tout au plus $k_1 - 1$ points différents de 1 et dans la suite $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ tout au plus $k_2 - 1$ de tels points. Par conséquent

$$(f_1(x) \cdot g_1(x), f_2(x) \cdot g_2(x), \ldots, f_n(x) \cdot g_n(x)) \in P_{n, k_1 + k_2 - 2},$$

de sorte que, en vertu du th. 1, les fonctions $f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2, \ldots, f_n \cdot g_n$ sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles.

Théorème 8. *Si les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_{n_1} \in S_1^X$ et $g_1, g_2, \ldots, g_{n_2} \in S_1^X$ sont respectivement k_1- et k_2-compatibles, les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_{n_1}, g_1, g_2, \ldots, g_{n_2} \in S_1^X$ sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles.*

Démonstration. Posons:

$$f_i = 1 \qquad \text{pour} \quad i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2,$$

$$g_i' = 1 \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n_1,$$

$$g_i' = g_{i - n_1} \qquad \text{pour} \quad i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2.$$

Selon le th. 7 les transformations $f_1 \cdot g_1', f_2 \cdot g_2', \ldots, f_{n_1 + n_2} \cdot g_{n_1 + n_2}'$ sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles. Or, on a $f_i \cdot g_i' = f_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n_1$ et $f_i \cdot g_i' = g_{i - n_1}$ pour $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2$, de sorte que les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_{n_1}, g_1, g_2, \ldots, g_{n_2}$ sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles.

Théorème 9. *Si $b_1(X) > r_k(X)$, on a $r_{k+1}(X) > r_k(X)$.*

Démonstration. Soit $r_k(X) = n$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ n fonctions linéairement indépendantes et k-compatibles. Il résulte de l'inégalité $b_1(X) > n$ qu'il existe une fonction $f_{n+1} \in S_1^X$ telle que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sont encore linéairement indépendantes. En vertu du cor. 6, la transformation f_{n+1} est 2-compatible, donc en vertu du th. 8 les transformations $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ sont $(k+1)$-compatibles. D'où $r_{k+1}(X) \geqslant n + 1$.

Théorème 10. $r_{k_1 + k_2 - 1}(X \times Y) \geqslant r_{k_1}(X) + r_{k_2}(Y)$.

Démonstration. Soit $r_{k_1}(X) \geqslant n_1$ et $r_{k_2}(Y) \geqslant n_2$. Il existe donc n_1 fonctions linéairement indépendantes et k_1-compatibles $f_1, f_2, \ldots, f_{n_1} \in S_1^X$ et n_2 fonctions linéairement indépendantes et k_2-compatibles $g_1, g_2, \ldots, g_{n_2} \in S_1^Y$. Les fonctions $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_{n_1}^* \in S_1^{X \times Y}$ (voir Chap. I, § 4) sont donc k_1-compatibles et les fonctions $g_1^*, g_1^*, \ldots, g_{n_2}^* \in S_1^{X \times Y}$ sont k_2-compatibles. D'après le th. 8 les fonctions

$$f_1^*, f_2^*, \ldots, f_{n_1}^*, g_1^*, g_2^*, \ldots, g_{n_2}^* \in S_1^{X \times Y}$$

sont $(k_1 + k_2 - 1)$-compatibles. Or, ces fonctions sont en vertu de I, § 4, (2), linéairement indépendantes, de sorte que l'on a $r_{k_1 + k_2 - 1}(X) \geqslant n_1 + n_2$.

§ 3. Catégorie 1-dimensionnelle.

L'espace est dans ce § supposé compact.

MM. Lusternik et Schnirelmann[49]) ont introduit une fonction cat (X) (*catégorie* de X), qui fait correspondre à tout espace X un entier positif ou ∞ et qui est définie comme il suit: cat $(X) \leqslant k$ signifie l'existence d'une décomposition $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ en ensembles fermés et contractiles dans X.

Les mêmes auteurs [50]) ont introduit un nombre kat(X) (*catégorie homologique* de X): kat $(X) \leqslant k$ signifie notamment l'existence d'une décomposition $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ en ensembles fermés tels que chaque cycle γ dans X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ est homologue à 0 dans X.

Nous allons considérer dans ce § un coefficient kat$_1(X)$ (*catégorie homologique* 1-*dimensionnelle* de X), définie comme il suit: on a

---

[49]) L. Lusternik et L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels* (Actualités Scientifiques, vol. 188), p. 25.

[50]) ibid., p. 39.

$\mathrm{kat}_1(X) \leqslant k$, lorsqu'il existe une décomposition $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ en ensembles fermés tels que chaque cycle convergent γ_1 dans X_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, 1-dimensionnel et à coefficients rationnels est homologue à 0 dans X.

On a évidemment $\mathrm{cat}(X) \geqslant \mathrm{kat}(X) \geqslant \mathrm{kat}_1(X)$.

Pour que chaque cycle 1-dimensionnel γ_1 dans X_i (convergent et à coefficients rationnels) soit homologue à 0 dans X, il faut et il suffit que pour tout $f \in S_1^X$ on ait $f \sim 1$ sur X[51]). On en tire en vertu de III, §1, th. 1, le théorème suivant:

Théorème 1. *Le nombre* $\mathrm{kat}_1(X)$ *est égal au plus petit entier* k *pour lequel* $b_1(X) - r_k(X) = 0$ *et à* ∞ *à défaut d'un tel* k.

Les th. 2—4 du Chap. III, §1 nous donnent les théorèmes suivants:

Théorème 2. *Pour tout ensemble* $Y \subset X$ *qui est un rétracte de* X, *on a*

$$\mathrm{kat}_1(Y) \leqslant \mathrm{kat}_1(X).$$

Théorème 3. *Pour tout ensemble* $Y \subset X$ *s'obtenant de* X *par une déformation continue (dans* X*), on a*

$$\mathrm{kat}_1(Y) \geqslant \mathrm{kat}_1(X).$$

Théorème 4. *Pour tout ensemble* $Y \subset X$ *qui est un rétracte de* X *par déformation, on a*

$$\mathrm{kat}_1(Y) = \mathrm{kat}_1(X).$$

Nous allons nous borner dans la suite aux X compacts pour lesquels $b_1(X) < \infty$.

Les cor. 6, 8 et 9 de III §1 et le cor. 5 de III §2 donnent les théorèmes suivants:

Théorème 5. $\mathrm{kat}_1(X) \leqslant \dim X + 1$.

Théorème 6. X *étant un vrai sous-ensemble fermé d'une pseudo-multiplicité* M_n *à n-dimensions, on a* $\mathrm{kat}_1(X) \leqslant n$.

Corollaire 7. *Si* $X \subset R_n$, *on a* $\mathrm{kat}_1(X) \leqslant n$.

Théorème 8. $\mathrm{kat}_1(X) \leqslant b_1(X) + 1$.

[51]) cf. K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), p. 224, où ce th. est démontré dans le cas $X_i = X$; le cas général s'obtient par une relativisation de la démonstration.

Théorème 9. X *et* Y *étant des continus* (*avec* $b_1(X) < \infty$ *et* $b_1(Y) < \infty$), *on a*

$$\mathrm{kat}_1(X \times Y) \leqslant \mathrm{kat}_1(X) + \mathrm{kat}_1(Y) - 1.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{kat}_1(X) = k_1$, $\mathrm{kat}_1(Y) = k_2$. On a donc $b_1(X) = r_{k_1}(X)$ et $b_1(Y) = r_{k_2}(X)$. En vertu de III, §2, th. 10, et I, §4, th. 2, il vient

$$r_{k_1+k_2-1}(X \times Y) \geqslant r_{k_1}(X) + r_{k_2}(Y) = b_1(X) + b_1(Y) = b_1(X \times Y),$$

d'où $b_1(X \times Y) - r_{k_1+k_2-1}(X \times Y) = 0$ et par suite $\mathrm{kat}_1(X \times Y) \leqslant k_1 + k_2 - 1$.

Il serait intéressant de savoir si l'inégalité dans le th. 9 peut être remplacée par l'égalité.

Voici un théorème, qui résulte immédiatement de III, §2, th. 2 et 4, et qui permet d'évaluer le nombre $\mathrm{kat}_1(X)$ (toujours dans le cas $b_1(X) < \infty$) par les transformations continues en tores T_n.

Théorème 10. *Pour que l'on ait* $\mathrm{kat}_1(X) \leqslant k$, *il faut et il suffit que toute transformation* $f \in T_n^X$ $(n=1, 2, \ldots)$ *soit inessentielle en dimension* k.

Pour terminer, nous allons évaluer les nombres $b_1(T_n)$, $r_k(T_n)$ et $\mathrm{kat}_1(T_n)$. On a:

(1) $\quad b_1(T_n) = n,$

(2) $\quad r_k(T_n) = k - 1 \quad$ *pour* $\quad k = 1, 2, \ldots, n,$

(3) $\quad r_k(T_n) = n \quad$ *pour* $\quad k > n,$

(4) $\quad \mathrm{kat}_1(T_n) = n + 1.$

La formule (1) résulte de I, §4, th. 2. Pour établir (2), il suffit, en vertu de III, §2, cor. 9, de prouver que $r_n(T_n) < n$. Il suffit donc, en vertu de III, §2, th. 4, d'indiquer une transformation $f \in T_n^{T_n}$ qui soit essentielle en dimension n. Or, on en obtient une, en posant $f(x) = x$ pour $x \in T_n$[52]). Quant à la formule (3), elle résulte de III §1, cor. 6. La formule (4) s'obtient de (1)—(3).

Notons que $\mathrm{kat}_1(T_n) = n + 1 = \dim T_n + 1 = b_1(T_n) + 1$ et $\mathrm{kat}_1(T_{n_1+n_2}) = n_1 + n_2 + 1 = (n_1+1) + (n_2+1) - 1 = \mathrm{kat}_1(T_{n_1}) + \mathrm{kat}_1(T_{n_2}) - 1$, ce qui prouve que dans les inégalités des th. 5, 8 et 9 les membres gauches ne se laissent pas remplacer par des nombres plus petits.

[52]) C'est une conséquence du fait que T n'admet aucune déformation en son vrai sous-ensemble; cf. renvoi [27]).

Supplément

(Correction à mon article „Transformations continues en circonférence et la topologie du plan“ [53])).

Le groupe $\mathfrak{B}_1(X)$, introduit p. 89, n'est pas nécessairement libre. Comme l'a remarqué M. J. Schreier, il y en est démontre seulement que ce groupe ne contient pas d'éléments d'ordre fini, ce qui ne suffit notoirement pas pour qu'un groupe soit libre. En particulier, il en est aussi de-même du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ en question, qui peut ne pas être libre, p. ex. lorsque X est un solénoide de van Dantzig [54]).

En conséquence, la définition du nombre $b_1(X)$ comme nombre d'éléments de la base du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$, donnée également p. 89, est inexacte: la base peut notamment être en défaut. La définition exacte se trouve p. 221 de l'ouvrage de K. Borsuk et S. Eilenberg *„Über Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie“* [55]) et p. 157 de mon article présent *„Sur les espaces multicohérents“*, où le nombre $b_1(X)$ est défini comme le plus grand nombre d'éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{B}_1(X)$, lorsque ce nombre est fini, et comme ∞ en cas contraire.

Ce changement de la définition comporte de petites modifications formelles, d'ailleurs évidentes, dans les démonstrations du lemme 5 et du th. 8 de mon article en question (p. 97—99), et nullepart ailleurs. La démonstration de la liberté du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ pour les sous-ensembles compacts X de S_2 y est contenu dans l'enoncé du lemme 2 (p. 91).

[53]) Fund. Math. 26 (1936), p. 61—112.
[54]) Fund. Math. 15 (1930), p. 102—125.
[55]) Fund. Math. 26 (1926), p. 207—223.

Sur un problème concernant les fonctions de première classe.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$f(x)$ étant une fonction de classe 1 de Baire d'une variable réelle, le problème se pose: *existe-t-il dans tout ensemble linéaire indénombrable un sous-ensemble indénombrable sur lequel la fonction $f(x)$ est continue?*

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu que la réponse à ce problème est *négative*.

Théorème: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe 1 de Baire et un ensemble linéaire indénombrable E, tel que la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout sous-ensemble indénombrable de E.*

La démonstration sera basée sur quatre lemmes.

Lemme 1. *Si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle semi-continue supérieurement, la fonction $\mathrm{E}f(x)$ l'est aussi* (Et désignant le plus grand entier qui ne dépasse pas t).

Démonstration. Posons pour tout x_0 réel donné

$$\varepsilon = \mathrm{E}f(x_0)+1-f(x_0); \tag{1}$$

c'est évidemment un nombre positif.

La fonction $f(x)$ étant par hypothèse semi-continue supérieurement, il existe pour x_0 un nombre positif δ tel que

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon \quad \text{pour } |x-x_0|<\delta,$$