$T=T_2T_1$ where T_1 is monotone and T_2 has this same property, is unique [6]), it follows that for any $p\,\epsilon\,T_1(A)$, $T_1^{-1}(p)$ is a component of $T^{-1}T_2(p)$.

Now let $x, y\,\epsilon\,B$ and let X_1 and X_2 be distinct components of $T^{-1}(x)$. Let $x_1=T_1(X_1)$, $x_2=T_1(X_2)$. By what we have just shown, x_1 and x_2 are distinct points of $T_2^{-1}(x)$. Thus if we let $A'=T_1(A)$ we have a separation

$$A'-T_2^{-1}(y)=A_1'+A_2', \quad \text{where} \quad x_i\subset A_i' \qquad (i=1,2).$$

Applying T_1^{-1} to this we get

$$A-T^{-1}(y)=T_1^{-1}(A_1')+T_1^{-1}(A_2'), \quad \text{since} \quad T_1^{-1}T_2^{-1}=T^{-1};$$

and this must be a separation since T_1 is continuous. Finally, $T_1^{-1}(A_i')\supset X_i$ so that T is completely componentwise alternating.

---

[6]) To prove this it suffices to show that if $T=T_2\,T_1$ is any such factorization, then for any $p\,\epsilon\,T_1(A)$, $T^{-1}(p)$ is a component of $T^{-1}T_2(p)$. Now since $T=T_2\,T_1$, we must have $T_1^{-1}(p)\subset T^{-1}T_2(p)$. Also, since T_1 is monotone, $T_1^{-1}(p)$ is connected. Thus $T_1^{-1}(p)$ is contained in some single component X of $T^{-1}T_2(p)$. It remains to show that $T_1(X)=p$. If not, then $T_1(X)$ is a non-degenerate, continuum; but then since T_2 maps only 0-dimensional sets into single points, it would follow that $T_2\,T_1(X)=T(X)$ could not reduce to a single point, contrary to the fact that $T(X)=x$.

The University of Virginia.

Sur les fonctions de deux variables réelles.

Par

Vojtěch Jarník (Praha).

Le but de cette note est de montrer que l'on peut, à l'aide d'un léger changement de la méthode de démonstration, remplacer quelques résultats de M. Blumberg [1]) et de Mlle Schmeiser [2]) par des résultats plus précis. Pour ne pas compliquer inutilement la note actuelle, nous n'envisagerons que le théorème 2^a de Mlle Schmeiser, auquel nous allons donner une forme plus précise que voici:

Théorème. *Soit π le plan euclidien; soit s une droite de ce plan; soit $f(x,y)=f(P)$ une fonction réelle [3]) définie dans π. P étant un point quelconque de s et d étant une direction quelconque de P, désignons par $\overrightarrow{Pd}$ la demidroite issue du point P dans la direction d (le point P étant regardé comme n'appartenant pas à $\overrightarrow{Pd}$).*

Enfin, désignons par $E(P,d)$ l'ensemble de tous les nombres ξ jouissant de la propriété suivante: il existe une suite de points $P_1, P_2, \dots$ telle que

$$P_n\,\epsilon\,\overrightarrow{Pd}, \qquad P_n\to P, \qquad f(P_n)\to\xi \qquad \textit{pour} \quad n\to\infty \text{ [4])}.$$

Alors il existe un ensemble dénombrable $D\,\epsilon\,s$ jouissant de la propriété suivante: d_1, d_2 étant deux directions quelconques, situées d'un même côté de la droite s, on a

$$(1) \qquad E(P,d_1)\cdot E(P,d_2)\neq 0$$

pour chaque $P\,\epsilon\,s-D$.

---

[1]) Fund. Math. 16 (1930), p. 17—24.

[2]) Fund. Math. 22 (1934), p. 70—76.

[3]) La démonstration s'applique d'ailleurs aussi dans le cas d'une fonction *complexe* de deux variables *réelles*.

[4]) On admet aussi les valeurs $\xi=\pm\infty$.

Remarque. Désignons par $I(P, d)$ le plus petit intervalle fermé qui contient l'ensemble $E(P, d)$. En remplaçant la relation (1) par la relation moins précise

$$I(P, d_1) \cdot I(P, d_2) \neq 0,$$

on obtient précisément le théorème 2^a de Mlle Schmeiser.

Démonstration. Supposons, ce qui est évidemment permis, que $0 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$, que la droite s est la droite $y=0$ et que toutes les directions considérées dans la suite sont situées dans le demiplan $y > 0$.

n (entier et positif) étant donné, considérons tous les intervalles fermés (en nombre n)

$$(2) \qquad \langle k n^{-1}, (k+1) n^{-1} \rangle \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Chaque ensemble non vide qui est la somme d'un certain nombre d'intervalles (2), soit appelé un *ensemble normal d'ordre n*. En particulier, $E \neq 0$ étant un ensemble quelconque tel que $E \subset \langle 0,1 \rangle$, désignons par $[E]_n$ la somme de tous les intervalles (2) pour lesquels on a $\langle (k-1)n^{-1}, (k+2)n^{-1} \rangle \cdot E \neq 0$. Soient maintenant $\varkappa$, λ, δ trois directions différentes telles que λ soit située entre $\varkappa$ et δ. Soient: n un nombre donné et E un ensemble normal donné d'ordre n. Soit $A = A(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$ l'ensemble de tous les points $P \epsilon s$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe au moins une direction d_P située entre $\varkappa$ et λ et telle que $[E(P, d_P)]_n = E$. Choisissons une telle direction d_P pour chaque $P \epsilon A$. Choisissons encore un intervalle ouvert $I_P \subset \overrightarrow{Pd_P}$ de longueur $< 1/n$, dont P est un point extrême et tel que l'on ait $f(R) \epsilon E$ pour chaque point $R \epsilon I_P$. La projection de I_P sur s, suivant la direction δ, est un intervalle ouvert I'_P dont P est un point extrême. Posons

$$(3) \qquad A' = A'(\varkappa, \lambda, \delta, E, n) = \sum_{P \epsilon A} I'_P, \qquad A'' = A''(\varkappa, \lambda, \delta, E, n) = A - A';$$

donc A'' est un ensemble dénombrable [5]).

Ajoutons la remarque suivante: soit d une direction quelconque mais telle que δ soit située une λ et d; soit $P \epsilon A'(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$, donc $P \epsilon I'_Q$ pour un certain $Q \epsilon A(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$. La demidroite $\overrightarrow{Pd}$ rencontre évidemment la demidroite $\overrightarrow{Qd_Q}$ dans un point $R \epsilon I_Q$, d'où $f(R) \epsilon E$. Evidemment, P, d, $\varkappa$, λ, δ étant donnés, on a $R \to P$ pour $n \to \infty$ uniformément par rapport à E.

[5]) En effet, pour $P \neq Q$, $P \epsilon A''$ et $Q \epsilon A''$, on a $I'_P I'_Q = 0$.

Soit maintenant

$$(4) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

une suite de directions qui est dense dans le demiplan $y > 0$; posons

$$(5) \qquad D = \sum A''(\varkappa, \lambda, \delta, E, n),$$

où la sommation porte 1) sur tous les systèmes $\varkappa$, λ, δ de directions choisies dans (4) et telles que λ est située entre $\varkappa$ et δ, 2) sur toutes les valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots$, 3) n étant donné, sur tous les ensembles normaux E d'ordre n. Donc D est dénombrable.

Soient maintenant $P \epsilon s - D$ et d_1, d_2 deux directions différentes. Choisissons, dans (4), trois directions $\varkappa$, λ, δ telles que d_1 soit située entre $\varkappa$ et λ, λ entre d_1 et δ, δ entre λ et d_2. Soit $n > 0$ un nombre entier; on a évidemment

$$P \epsilon A(\varkappa, \lambda, \delta, [E(P, d_1)]_n, n),$$

donc (d'après (3) et (5))

$$P \epsilon A'(\varkappa, \lambda, \delta, [E(P, d_1)]_n, n).$$

D'après la remarque, il existe un point $R_n \epsilon \overrightarrow{Pd_2}$ tel que

$$(6) \qquad f(R_n) \epsilon [E(P, d_1)]_n$$

et l'on a $R_n \to P$ pour $n \to \infty$. La suite $f(R_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ possède au moins une valeur limite $\xi \epsilon E(P, d_2)$ et, d'après (6), on a aussi $\xi \epsilon E(P, d_1)$, d'où la relation (1).

Remarque I [6]). Montrons encore que l'on ne peut pas remplacer la relation (1) par la relation

$$(7) \qquad E(P, d_1) \cdot E(P, d_2) \cdot E(P, d_3) \neq 0,$$

même s'il s'agit de trois directions d_1, d_2, d_3 fixées d'avance. En effet, soient R l'ensemble de tous les nombres réels et M_1 un ensemble *non dénombrable* de nombres réels jouissant des propriétés suivantes: 1) si $a \epsilon M_1$, $b \epsilon M_1$ et $a \neq b$, on a $\frac{1}{2}(a+b) \epsilon R - M_1$; on

[6]) L'idée principale des remarques I, II est empruntée à la note citée de M. Blumberg.

voit que l'ensemble $M_2=R-M_1$ est alors dense dans R. 2) Chaque point de M_1 est point limite de M_1 du côté gauche et du côté droit [7]). Posons ensuite: $f(x,y)=0$ pour $x\epsilon M_2$; $f(x,y)=-1$ pour $x\epsilon M_1$, $x-y\epsilon M_1$; $f(x,y)=-1$ pour $x\epsilon M_1$, $x-y\epsilon M_2$. Désignons par s la droite $y=0$ et par d_1, d_2, d_3 les directions des demidroites suivantes: $y>0, x=0$; $y>0, y=x$; $y>0, y=-x$. Soit $x\epsilon M_1$, $P=(x,0)$; on voit aisément que chacun des trois ensembles $E(P,d_1)$, $E(P,d_2)$, $E(P,d_3)$ est composé de deux nombres, à savoir de $-1, 1$, de $0, 1$ et de $0, -1$ respectivement. Donc la relation (7) est en défaut pour chaque point P d'un ensemble *non dénombrable* (à savoir pour $P=(x,0)$, $x\epsilon M_1$).

Remarque II. Pour donner une application de notre théorème, soit $F(x)$ une fonction réelle et finie d'une variable réelle. Posons

$$f(x,x)=0,\qquad f(x,y)=\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\qquad\text{pour}\qquad y\neq x.$$

Soit s la droite $y=x$; soient d_1 et d_2 les directions des demidroites $y>0, x=0$ et $x<0, y=0$ respectivement. Pour $P=(x,x)$, les valeurs de $f(\xi,\eta)$ sur les demidroites $\overrightarrow{Pd_1}$ et $\overrightarrow{Pd_2}$ sont données respectivement par $\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))$ et par $\frac{1}{h}(F(x)-F(x-h))$ (pour $h>0$). Donc: il existe un ensemble dénombrable D tel que l'on peut, à chaque $x\epsilon R-D$ [8]), faire correspondre deux suites $h_1, h_2, \dots$; $k_1, k_2, \dots$ telles que

$$h_n>0,\ h_n\to 0;\quad k_n<0,\ k_n\to 0;\quad \lim_{n=\infty}\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}=\lim_{n=\infty}\frac{F(x+k_n)-F(x)}{k_n}.$$

C'est un théorème un peu plus précis que le théorème bien connu d'après lequel on a pour $x\epsilon R-D$:

$$\limsup_{h=0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\geqq\liminf_{h=0-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

[7]) On peut prendre pour M_1 p. ex. l'ensemble de tous les nombres irrationnels de la forme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot 3^{-n}$, chaque a_n étant égal à 0 ou à 2.

[8]) R désigne l'ensemble de tous les nombres réels.

Sur un théorème de M. Roger.

Par

S. Saks (Warszawa).

Dans ma Note *„Sur quelques propriétés métriques d'ensembles“* (Fund. Math., **26** (1936), pp. 234—240) contenant une généralisation des théorèmes bien connus de M. Denjoy sur les nombres dérivés, j'ai observé que les méthodes employées par moi pour le cas du plan peuvent être appliquées, sans modification essentielle, pour obtenir les résultats analogues, concernant l'espace et signalés par M. F. Roger dans la série de ses communications de C. R. J'ai accompagné cette observation par des exemples de quelques-uns des théorèmes de M. Roger dans l'espace, les autres théorèmes m'ayant semblé être des conséquences assez proches de ceux que j'ai établis pour le plan. Or, puisque M. Roger vient d'observer dans le renvoi de sa note récente de C. R. (**202** (1936), pp. 1403—1405) que ma remarque „reste muette“ sur les autres de ses résultats, qu'il considère comme moins simples et plus importants, j'en publie ici une démonstration détaillée, pour montrer explicitement qu'ils se réduisent aussitôt au cas du plan. Je les formule ici sous la forme du théorème suivant dans l'espace à 3 dimensions, l'extension sur $n\geqslant 3$ dimensions (de ce théorème, ainsi que des résultats mentionnés dans ma note précédente) s'obtenant facilement par induction.

R désignant un ensemble dans l'espace à 3 dimensions, l'ensemble P des points a de R où $\mathrm{contg}_R\, a$ *laisse échapper un plan entier est la somme d'une infinité au plus dénombrable d'ensembles de longueur finie, et dans tout point de P, excepté au plus un ensemble de longueur nulle, l'ensemble R possède une tangente unique.*