Sur les suites transfinies multiples universelles.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Théorème I. *Il existe une suite transfinie double de nombres ordinaux* $< \Omega$ $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\, \beta<\Omega}$ *telle que pour toute suite transfinie double de nombres ordinaux* $< \Omega$ $\{u_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\, \beta<\Omega}$ *il existe une suite transfinie simple de nombres ordinaux* $< \Omega$ $\{v_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ *satisfaisant à l'égalité*

$$(1) \qquad u_\beta^\alpha = v_{a_\beta^\alpha} \qquad \textit{pour} \quad \alpha < \Omega, \;\; \beta < \Omega. \;[1]$$

Démonstration. Ordonnons l'ensemble S de tous les systèmes (α, β) de deux nombres ordinaux $<\Omega$ par la convention suivante:

$(\alpha, \beta) \prec (\alpha_1, \beta_1)$, si $\alpha+\beta < \alpha_1+\beta_1$ ou bien si $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$ et $\alpha<\alpha_1$.

Comme on sait, l'ensemble S est ainsi bien ordonné du type Ω [2]).

Désignons maintenant, pour tout système (α, β) de deux nombres ordinaux $< \Omega$, par a_β^α le rang du système (α, β) dans l'ensemble S que nous venons de bien ordonner. Ce sera évidemment un nombre ordinal $< \Omega$, et nous aurons (pour deux systèmes (α, β) et (γ, δ) de S)

$$a_\beta^\alpha = a_\delta^\gamma$$

dans le cas et dans ce cas seulement où $\alpha=\gamma$ et $\beta=\delta$.

---

[1]) Cf. la littérature citée par M. S. Ruziewicz dans *Fund. Math.* t. 26, p. 52, renvoi [1]).

[2]) Voir p. ex. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 217—218.

Je dis que la suite transfinie double $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\, \beta<\Omega}$ satisfait aux conditions du théorème I.

En effet, soit $\{u_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\, \beta<\Omega}$ une suite transfinie double quelconque de nombres ordinaux $<\Omega$. Définissons la suite transfinie simple $\{v_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ de nombres ordinaux $<\Omega$ comme il suit.

Soient ξ un nombre ordinal donné $<\Omega$ et (α, β) le système occupant la ξ-ième place dans l'ensemble S (bien ordonné comme plus haut); nous aurons d'après la définition de la suite double $\{a_\beta^\alpha\}$:

$$\xi = a_\beta^\alpha. \tag{2}$$

Les nombres ordinaux α et β sont bien déterminés par le nombre ordinal ξ. Nous poserons:

$$v_\xi = u_\beta^\alpha. \tag{3}$$

D'après (3) et (2) nous trouvons tout de suite la formule (1).

Le théorème I est ainsi démontré et nous avons *défini effectivement* une suite transfinie double $\{a_\beta^\alpha\}$ satisfaisant aux conditions de ce théorème.

On démontre sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite transfinie double $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\, \beta<\Omega}$ de nombres ordinaux $<\Omega$ satisfasse aux conditions du théorème I, est que l'égalité $a_\beta^\alpha = a_\delta^\gamma$ entraîne toujours les égalités $\alpha=\gamma$ et $\beta=\delta$ [1]).

Le théorème I se généralise sans aucune difficulté aux suites transfinies triples et, généralement, aux suites transfinies multiples de rang fini m quelconque $(m=2, 3, 4, \dots)$. Or, le problème se pose si le théorème I peut être généralisé aux suites transfinies multiples

[1]) Cf. ma note dans les *Prace Matematyczno-Fizyczne*, t. 41, p. 173. Il est à remarquer qu'une suite double $\{a_\beta^\alpha\}$ qui satisfait aux conditions du théorème I ne peut pas être de la forme $a_\beta^\alpha = u_\alpha + v_\beta$ (comme c'est le cas pour les fonctions réelles de deux variables réelles, à valeurs distinctes). En effet, soient $\{u_\xi\}$ et $\{v_\xi\}$ deux suites transfinies du type Ω formées chacune de nombres ordinaux différents $<\Omega$. Il existe, comme on sait, un nombre ordinal $\lambda<\Omega$, tel que $\omega^\lambda > u_1$ et $\omega^\lambda > u_2$, ce qui donne $u_1+\omega^\lambda = u_2+\omega^\lambda = \omega^\lambda$. La suite transfinie $\{v_\xi\}$ étant à termes différents, il existe, comme on voit sans peine, un nombre ordinal $\beta<\Omega$, tel que $v_\beta > \omega^\lambda$, d'où $v_\beta = \omega^\lambda + \delta$ où δ est un nombre ordinal positif $<\Omega$. On a donc $u_1+v_\beta = u_1+(\omega^\lambda+\delta) = (u_1+\omega^\lambda)+\delta = \omega^\lambda+\delta = v_\beta$ et pareillement $u_2+v_\beta = v_\beta$, donc $u_1+v_\beta = u_2+v_\beta$ et $a_\beta^1 = a_\beta^2$, ce qui est impossible, si la suite double $\{a_\beta^\alpha\}$ satisfait aux conditions du théorème I.

de rang $\aleph_0$ de multiplicité. Nous prouverons que ce problème est équivalent aux problème si l'hypothèse du continu est vraie ou non. Nous démontrerons notamment ce

Théorème II. *L'hypothèse du continu* $\boldsymbol{H}\,(2^{\aleph_0}=\aleph_1)$ *est équivalente à la proposition* $\boldsymbol{P}$ *suivante:*

$\boldsymbol{P}$. *Il existe une fonction* $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ *d'une suite infinie de nombres ordinaux* $<\Omega$, *dont les valeurs sont des nombres ordinaux* $<\Omega$ *et telle que pour toute fonction* $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ *de même nature il existe une fonction* $\varphi(a)$ *d'une seule variable ordinale* $<\Omega$, *dont les valeurs sont des nombres ordinaux* $<\Omega$ *et satisfaisant à l'égalité*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = \varphi(F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)) \tag{4}$$

pour toute suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ *de nombres ordinaux* $<\Omega$.

Démonstration. 1° $\boldsymbol{H}\rightarrow\boldsymbol{P}$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il en résulte que $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$: il existe donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble de toutes les suites infinies $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ de nombres ordinaux $<\Omega$ et l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$. Désignons par $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ le nombre ordinal correspondant ainsi à la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ de nombres ordinaux $<\Omega$. On voit sans peine que la fonction $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}$.

En effet, $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ étant une fonction donnée d'une suite infinie de nombres ordinaux $<\Omega$ (dont les valeurs sont des nombres ordinaux $<\Omega$), il suffit de définir la fonction φ comme il suit: ξ étant un nombre ordinal $<\Omega$, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ la suite infinie de nombres ordinaux $<\Omega$ qui lui correspond (dans la correspondance biunivoque envisagée plus haut). Nous aurons donc $\xi = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$.

En posant $\varphi(\xi) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, nous aurons évidemment toujours la formule (4). On a ainsi $\boldsymbol{H}\rightarrow\boldsymbol{P}$.

2° $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}$ et soit $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ une fonction qui satisfait aux conditions de cette proposition. On voit sans peine que si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)$ sont deux suites infinies distinctes de nombres ordinaux $<\Omega$, on a

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \neq F(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots).$$

En effet, supposons qu'on ait

$$F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots) = F(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots) \tag{5}$$

pour deux suites infinies distinctes de nombres ordinaux $<\Omega$ $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ et $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$. Soit $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ la fonction d'une suite infinie de nombres ordinaux $<\Omega$ définie comme il suit: $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)=2$ et $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)=1$ pour toutes les suites infinies $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ de nombres ordinaux $<\Omega$, distinctes de la suite $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ D'après la proposition $\boldsymbol{P}$, il existe une fonction $\varphi(\alpha)$ du nombre ordinal $\alpha<\Omega$, telle qu'on a la formule (4), donc en particulier

$$f(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots)=\varphi(F(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots)) \quad \text{et} \quad f(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots)=\varphi(F(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots)),$$

d'où, d'après (5): $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)=f(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$, donc $2=1$, c. à. d. une contradiction.

La fonction F fait donc correspondre des nombres ordinaux $<\Omega$ différents aux suites infinies distinctes de nombres ordinaux $<\Omega$. Or, l'ensemble de ces suites étant de puissance $\aleph_1^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ et l'ensemble de nombres ordinaux $<\Omega$ étant de puissance $\aleph_1$, il en résulte que $2^{\aleph_0}\leqslant\aleph_1$, ce qui donne $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. On a donc $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{H}$.

Le théorème II est ainsi démontré.

Il est à remarquer que pour les fonctions réelles d'une suite infinie de variables réelles on démontre une proposition analogue à la proposition $\boldsymbol{P}$ sans faire appel à l'hypothèse du continu et même d'une façon effective[1]).

Quant au théorème I, il est encore à remarquer qu'il se généralise sans peine aux suites transfinies multiples de rang fini (quelconque) et de type transfini quelconque (même plus grand que Ω).

Or, d'après une remarque due à M. A. Mostowski, les théorèmes I et II peuvent être déduits sans peine de la proposition suivante de la théorie générale des ensembles, dont la démonstration n'offre pas de difficulté:

P et Q étant deux ensembles non vides quelconques, la condition $\overline{\overline{P}}\leqslant\overline{\overline{Q}}$ équivaut à la condition suivante: il existe une fonction $F(p)$ définie dans l'ensemble P et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble Q, telle que pour toute fonction $f(p)$ de même nature il existe une fonction $\varphi(q)$ définie dans Q et dont les valeurs appartiennent à Q, satisfaisant à la formule

$$f(p)=\varphi(F(p)) \quad \textit{pour} \quad p\,\epsilon\,P.$$

[1]) Voir W. Sierpiński *Publ. math. Univ. Belgrade*, t. III (1934), p. 42 et S. Ruziewicz, *Fund. Math.*, t. 26, p. 52.

Théorème III. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une suite transfinie double de nombres ordinaux $<\Omega$ $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\,\beta<\Omega}$ telle que pour toute suite transfinie double de nombres ordinaux $<\Omega$ $\{u_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\,\beta<\Omega}$ il existe une suite transfinie (simple) croissante de nombres ordinaux $<\Omega$ $\{v_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ satisfaisant à l'égalité*

$$(6) \qquad u_\beta^\alpha = a_{v_\beta}^{v_\alpha}, \quad \textit{pour} \quad \alpha<\Omega,\ \beta<\Omega.\ ^{1)}$$

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. L'ensemble de toutes les suites infinies de nombres ordinaux $<\Omega$ étant de puissance $\aleph_1^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$, donc, d'après notre hypothèse, de puissance $\aleph_1$, il existe (d'après l'égalité $\aleph_1\aleph_1=\aleph_1$) une suite transfinie du type Ω, formée de suites infinies de nombres ordinaux $<\Omega$ et contenant chacune de ces suites une infinité indénombrable de fois, soit

$$(7) \qquad (\varphi_1^\xi, \varphi_2^\xi, \varphi_3^\xi, \ldots) \qquad (\xi<\Omega).$$

Soit μ_1 le plus petit nombre ordinal dépassant chacun des nombres $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1, \ldots$ (c'est évidemment un nombre ordinal $<\Omega$, puisque $\varphi_n^\xi<\Omega$ pour $\xi<\Omega$, $n=1,2,3,\ldots$).

Soit maintenant α un nombre ordinal donné >1 et $<\Omega$ et supposons définis tous les nombres μ_ξ où $\xi<\alpha$. Nous définirons μ_α comme le plus petit nombre ordinal tel que

$$(8) \qquad \mu_\alpha>\varphi_n^\xi \ \text{pour}\ \xi\leqslant\alpha,\ n=1,2,3,\ldots, \quad \text{et} \quad \mu_\alpha>\mu_\xi \ \text{pour}\ \xi<\alpha$$

(ici encore on aura évidemment $\mu_\alpha<\Omega$).

On a donc $\mu_\alpha\neq\mu_\beta$ pour $\alpha\neq\beta$ $(\alpha<\Omega,\ \beta<\Omega)$ et on ne peut pas avoir à la fois

$$\mu_\alpha=\varphi_m^\beta \quad \text{et} \quad \mu_\beta=\varphi_n^\alpha$$

pour aucun système de deux nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ et $\beta<\Omega$ et de deux nombres naturels m et n (puisque, si $\alpha\leqslant\beta$, on a, d'après (8), $\mu_\beta>\varphi_n^\alpha$ pour $n=1,2,3,\ldots$, et, si $\beta<\alpha$, on a $\mu_\alpha>\varphi_m^\beta$ pour $m=1,2,3,\ldots$).

Nous définirons maintenant la suite transfinie double $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\,\beta<\Omega}$ (de nombres ordinaux $<\Omega$) comme il suit.

Soient α et β deux nombres ordinaux donnés $<\Omega$.

[1]) Cf. ma Note dans le *Bulletin Acad. Polonaise*, séance du 5 Février 1936, p. 12.

S'il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que

$$\alpha = \mu_\lambda \quad \text{et} \quad \beta = \mu_\lambda,$$

nous poserons

$$a_\beta^\alpha = \varphi_1^\lambda.$$

S'il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ et un nombre naturel n tels que

$$\alpha = \mu_\lambda \quad \text{et} \quad \beta = \varphi_{3n}^\lambda,$$

soit k la plus petite valeur de n. Nous poserons dans ce cas

$$a_\beta^\alpha = \varphi_{3k-1}^\lambda.$$

S'il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ et un nombre naturel n tels que

$$\alpha = \varphi_{3n}^\lambda, \qquad \beta = \mu_\lambda,$$

soit k la plus petite valeur de n. Nous poserons dans ce cas

$$a_\beta^\alpha = \varphi_{3k+1}^\lambda.$$

Dans tous les autres cas nous poserons

$$a_\beta^\alpha = 1.$$

Je dis que la suite double $\{a_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\beta<\Omega}$ ainsi définie satisfait aux conditions du théorème III.

En effet, soit $\{u_\beta^\alpha\}_{\alpha<\Omega,\beta<\Omega}$ une suite transfinie double quelconque de nombres ordinaux $<\Omega$. Nous définirons une suite transfinie croissante du type Ω de nombres ordinaux $<\Omega$, $\{\nu_\xi\}_{\xi<\Omega}$ comme il suit.

D'après la définition de la suite (7), il existe un nombre ordinal $\nu_1 < \Omega$ tel que

$$\varphi_1^{\nu_1} = u_1^1, \qquad \varphi_2^{\nu_1} = \varphi_3^{\nu_1} = \ldots = 1. \tag{9}$$

Soit maintenant α un nombre ordinal >1 et $<\Omega$ et supposons déjà définis tous les nombres ordinaux ν_ξ où $\xi<\alpha$.

Soit $\gamma_1^\alpha, \gamma_2^\alpha, \gamma_3^\alpha, \ldots$ une suite infinie formée de tous les nombres ordinaux $<\alpha$. Si cette suite est finie, répétons infiniment le même terme.

D'après la définition de la suite (7), il existe un nombre ordinal $\nu_\alpha<\Omega$ tel que $\nu_\alpha>\nu_\xi$ pour $\xi<\alpha$ et que

$$\varphi_1^{\nu_\alpha} = u_\alpha^\alpha, \quad \varphi_{3k}^{\nu_\alpha} = \mu_{\nu_{\gamma_n^\alpha}}, \quad \varphi_{3k-1}^{\nu_\alpha} = u_{\gamma_k^\alpha}^\alpha, \quad \varphi_{3k+1}^{\nu_\alpha} = u_\alpha^{\gamma_k^\alpha} \quad \text{pour } k=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

La suite transfinie $\{\nu_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie.

Posons

$$v_\alpha = \mu_{\nu_\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega. \tag{11}$$

Je dis qu'on a la formule (6).

Soient, en effet, α et β deux nombres ordinaux quelconques $<\Omega$. D'après (11), on a

$$v_\alpha = \mu_{\nu_\alpha} \quad \text{et} \quad v_\beta = \mu_{\nu_\beta}, \tag{12}$$

donc

$$a_{v_\beta}^{v_\alpha} = a_{\mu_{\nu_\beta}}^{\mu_{\nu_\alpha}}. \tag{13}$$

Si $\alpha=\beta$, on a, d'après la formule (13) et la définition de la suite double $\{a_\beta^\alpha\}$:

$$a_{v_\beta}^{v_\alpha} = \varphi_1^{\nu_\alpha};$$

donc, si $\alpha=\beta=1$, on a d'après (9) et si $\alpha=\beta>1$, d'après (10):

$$a_{v_\beta}^{v_\alpha} = u_\beta^\alpha.$$

Si $\alpha<\beta$, il existe d'après la définition de la suite $\gamma_1^\beta, \gamma_2^\beta, \gamma_3^\beta, \ldots$ le plus petit nombre naturel k pour lequel $\alpha=\gamma_k^\beta$ et on a d'après (10)

$$\varphi_{3k}^{\nu_\beta} = \mu_{\nu_{\gamma_k^\beta}} = \mu_{\nu_\alpha}. \tag{15}$$

Or, je dis que $\varphi_{3n}^{\nu_\beta} \neq \mu_{\nu_\alpha}$ pour $n<k$. En effet, s'il était $\varphi_{3n}^{\nu_\beta} = \mu_{\nu_\alpha}$ pour un nombre naturel $n<k$, on aurait d'après (10) $\mu_{\nu_{\gamma_n^\beta}} = \mu_{\nu_{\gamma_k^\beta}}$, donc, la suite transfinie $\{\mu_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant croissante (d'après (8)), $\nu_{\gamma_n^\beta} = \nu_{\gamma_k^\beta}$, d'où, la suite transfinie $\{\nu_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant aussi croissante, $\gamma_n^\beta = \gamma_k^\beta$, ce qui est impossible, vu la définition du nombre k (puisque $n<k$).

D'après (15), k est donc le plus petit nombre naturel tel que $\mu_{\nu_\alpha} = \varphi_{3k}^{\nu_\beta}$; d'après la définition de la suite double $\{a_\beta^\alpha\}$ nous trouvons par conséquent

$$a_{\mu_{\nu_\beta}}^{\mu_{\nu_\alpha}} = \varphi_{3k+1}^{\nu_\beta},$$

donc, d'après (13) et (10):

$$a_{v_\beta}^{v_\alpha} = u_\beta^{\gamma_k^\beta},$$

ce qui donne d'après $\alpha=\gamma_k^\beta$ l'égalité (14).

Si $\beta < \alpha$, il existe le plus petit nombre naturel k tel que $\beta = \gamma_k^\alpha$ et nous trouvons comme plus haut

$$\varphi_{3k}^{\nu_\alpha} = \mu_{\nu_\beta} \quad \text{et} \quad \varphi_{3n}^{\nu_\alpha} \neq \mu_{\nu_\beta} \qquad \text{pour } n<k,$$

d'où, d'après la définition de la suite double $\{a_\beta^\alpha\}$,

$$a_{\mu_{\nu_\beta}}^{\mu_{\nu_\alpha}} = \varphi_{3k-1}^{\nu_\alpha},$$

donc d'après (13) et (10)

$$a_{\nu_\beta}^{\nu_\alpha} = u_{\gamma_k^\alpha}^\alpha,$$

ce qui donne, d'après $\beta = \gamma_k^\alpha$, l'égalité (14).

La formule (6) est ainsi établie et le théorème III est démontré.

Le théorème III peut être généralisé sans peine aux suites transfinies multiples (de rang fini quelconque de multiplicité). Or, il est à remarquer que, même en admettant l'hypothèse du continu, nous ne savons pas résoudre le problème suivant:

Existe-t-il une fonction $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ d'une suite infinie de nombres ordinaux $< \Omega$, dont les valeurs sont des nombres ordinaux $< \Omega$, telle que pour toute fonction $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ de même nature il existe une fonction $\varphi(\alpha)$ du nombre ordinal $\alpha < \Omega$, dont les valeurs soient des nombres ordinaux $< \Omega$ et qui satisfasse pour toute suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de nombres ordinaux $< \Omega$ à l'égalité

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = F(\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3), \ldots)?$$

(Cf. notre théorème II).

Or, il est à noter que la réponse est négative, si l'on remplace partout dans ce problème le nombre Ω par le nombre ω. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'ensemble de toutes les fonctions $f(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ d'une suite infinie de nombres naturels et dont les valeurs sont des nombres naturels est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, et que l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(n)$ d'une variable naturelle, dont les valeurs sont des nombres naturels (et même l'ensemble de toutes les suites infinies $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \varphi_3(n), \ldots$ de telles fonctions) est de puissance $2^{\aleph_0}$. (Cela prouve qu'un théorème, analogue au théorème III, que j'ai démontré[1]) pour les suites infinies doubles de nombres naturels et qui s'étend aux suites infinies multiples de rang fini quelconque, ne s'étend pas aux suites infinies de rang $\aleph_0$ de multiplicité). Il résulte de l'hypothèse du continu qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$ et l'ensemble de tous les nombres réels. En remplaçant dans le théorème III les nombres ordinaux $< \Omega$ par les nombres réels correspondants, nous obtenons tout de suite ce

[1]) *Bull. Inst. Math. Univ. Tomsk*, (1936).

Corollaire. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une fonction réelle $F(x, y)$ de deux variables réelles, telle que pour toute fonction réelle $f(x, y)$ de deux variables réelles il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une seule variable réelle qui satisfait pour tous les nombres réels x et y à l'égalité*

$$f(x, y) = F(\varphi(x), \varphi(y)).\ ^{1)}$$

[1]) J'ai donné une démonstration directe de cette proposition dans ma Note: *Sur une fonction universelle de deux variables réelles*, Bull. Acad. Polonaise 1936, p. 8.