Bruschlinsky, N. [1] *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. 109 (1934), pp. 525—537.

Čech, E. [1] *Trois théorèmes sur l'homologie*, Publ. de la Fac. de Sc. de l'Univ. Masaryk (1931), fasc. 144.

— [2] *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. XIX (1932), pp. 149—183.

Eilenberg, S. [1] *Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XXII (1934), pp. 292—296.

— [2] *Sur les transformations continues d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. XXIV (1935), pp. 160—176.

Freudenthal, H. [1] *Die Hopfsche Gruppe*, Compositio Math. 2 (1935), pp. 134—162.

Janiszewski, Z. [1] *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* (en polonais), Prace Matematyczno-Fizyczne 26 (1915), pp. 11—63.

Janiszewski, Z. et Kuratowski, C. [1] *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I (1920), pp. 210—222.

Kuratowski, C. [1] *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933.

— [2] *Théorie des continus irréductibles entre deux points, I*, Fund. Math. III (1922), pp. 200—231 et *II*, Fund. Math. X (1929), pp. 225—275.

— [3] *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. VI (1924), pp. 130—145.

— [4] *Les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer*, Fund. Math. VIII (1926), pp. 137—150.

— [5] *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. XII (1928), pp. 20—42.

— [6] *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. XII (1928), pp. 214—239.

— [7] *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 307—318.

— [8] *Théorème sur trois continus*, Monatshefte für Math. u. Phys. 36 (1929), pp. 77—80.

Kuratowski, C. et Straszewicz, S. [1] *Généralisation d'un théorème de Janiszewski*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 152—157.

Mayer, W. [1] *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Math. u. Phys. 36 (1929), pp. 1—42.

Moore, R. L. [1] *Concerning continuous curves in the plane*, Math. Zeit. 15 (1922), pp. 254—260.

— [2] *Concerning upper semi-continuous collection of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), pp. 416—428.

Pontrjagin, L. [1] *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Math. Ann. 105 (1931), pp. 165—205.

Straszewicz, S. [1] *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. VII (1925), pp. 159—187.

Vietoris, L. [1] *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte fur Math. u. Phys. 37 (1930), pp. 159—162.

Whyburn, G. T. [1] *Non-alternating transformations*, Amer. Jour. of Math. 56 (1934), pp. 294—302.

Sur l'existence de l'intégrale d'une différentielle totale.

Par

G. Van der Lijn (Bruxelles).

Soient $P(x,y,z)$ et $Q(x,y,z)$ deux fonctions mesurables définies dans un intervalle I $(a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B,\ c\leqslant z\leqslant C)$ de l'espace euclidien à trois dimensions. Soient $\varepsilon(x,y,z)$ une fonction mesurable positive définie dans I, et η un nombre positif.

Théorème. *Il existe au moins une fonction $z(x,y)$ des deux variables x et y, continue et dérivable dans le rectangle R $(a\leqslant x\leqslant A,$ $b\leqslant y\leqslant B)$, et telle que, exception faite des points d'un ensemble S dont la mesure superficielle est moindre que $\eta\cdot \operatorname{mes} R$, on ait les relations*

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}-P[x,y,z(x,y)]\right|\leqslant \varepsilon[x,y,z(x,y)] \quad \textit{et}$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}-Q[x,y,z(x,y)]\right|\leqslant \varepsilon[x,y,z(x,y)].$$

Démonstration. Soit M_0 un point (x_0,y_0,z_0) où les trois fonctions P, Q et ε sont approximativement continues. Désignons par H l'ensemble des points où l'on a simultanément les trois relations

$$(1)\qquad \begin{aligned} |P(x,y,z)-P(x_0,y_0,z_0)| &< \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0)\\ |Q(x,y,z)-Q(x_0,y_0,z_0)| &< \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0)\\ |\varepsilon(x,y,z)-\varepsilon(x_0,y_0,z_0)| &< \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

Cet ensemble admet le point M_0 pour point de densité, et il en est de même de l'ensemble H' des point (x',y',z') en lequel se transforme l'ensemble H par les relations

$$(2)\qquad x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z-(x-x_0)\,P(x_0,y_0,z_0)-(y-y_0)\,Q(x_0,y_0,z_0).$$

Désignons par C_n le cube de centre M_0 et de côté $1/n$. Il existe une infinité de valeurs de n assez grandes pour que l'on ait l'inégalité

$$\text{mes}\, H'\cdot C_n > \left(1-\frac{\eta}{2}\right) \text{mes}\, C_n. \tag{3}$$

Soit $E_n(\mathfrak{z})$ l'ensemble des points (x, y) tels que le point $(x, y, \mathfrak{z})$ appartienne au produit $H'\cdot C_n$. On sait que cet ensemble est mesurable pour presque chaque valeur de $\mathfrak{z}$ et que l'on a la relation

$$\text{mes}\, H'\cdot C_n = \int\limits_{z_0-\frac{1}{2n}}^{z_0+\frac{1}{2n}} \text{mes}\, E_n(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}.$$

Par suite, si l_n désigne la borne supérieure de $\text{mes}\, E_n(\mathfrak{z})$, nous avons la relation

$$\text{mes}\, H'\cdot C_n \leqslant \frac{l_n}{n}$$

et, en tenant compte de la relation (3),

$$l_n > \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{\eta}{2}\right).$$

Il existe donc une valeur $\mathfrak{z}_n$ de $\mathfrak{z}$ pour laquelle on a l'inégalité

$$\text{mes}\, E_n(\mathfrak{z}_n) > \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{\eta}{2}\right).$$

Le plan $z'=\mathfrak{z}_n$ est le transformé, par les formules (2), du plan $z=z_n(x, y)$ où $z_n(x, y)=\mathfrak{z}_n+(x-x_0)\ P(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)\,Q(x_0, y_0, z_0)$. Désignons par r_n le carré de centre (x_0, y_0) et de côté $1/n$.

Aux points de $E_n(\mathfrak{z}_n)\cdot r_n$ nous avons les relations

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = P(x_0, y_0, z_0), \qquad \frac{\partial z_n}{\partial y} = Q(x_0, y_0, z_0)$$

ainsi que les relations (1). Par suite, en ces points, nous avons les relations

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x} - P(x, y, z_n)\right| < \varepsilon(x, y, z_n), \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y} - Q(x, y, z_n)\right| < \varepsilon(x, y, z_n)$$

et les points de r_n étrangers à $E_n(\mathfrak{z}_n)$ forment un ensemble de mesure moindre que $(\eta/2)\cdot\text{mes}\, r_n$.

Considérons à présent l'ensemble des points où les trois fonctions P, Q et ε sont approximativement continues. On sait que cet ensemble ne diffère de l'intervalle I que par un ensemble de mesure spatiale nulle, et par suite, presque tout point du rectangle R est la projection d'un point au moins de cet ensemble. Presque tout point de R est donc le centre d'une infinité de carrés r_n, de côtés $1/\eta$ arbitrairement petits, et dans chacun desquels est définie une fonction $z_n(x, y)$ possédant dans r_n les propriétés énoncées par le théorème. En vertu du théorème de Vitali, le rectangle R peut être couvert par un nombre fini de rectangles r_n, sans point commun, exception faite d'une région O dont la mesure est moindre que $(\eta/2)\cdot\text{mes}\, R$. Toute fonction, continue et dérivable dans R, identique à $z_n(x, y)$ dans le carré r_n et arbitraire dans O, satisfait aux conditions du théorème.

On démontrerait semblablement un théorème analogue pour l'intégration de $\dfrac{\partial z_n}{\partial x\,\partial y}$.

Varsovie, le 3 juin 1935.