D'après (4) (le développement (1) de tout nombre réel x étant unique), on a donc nécessairement une des égalités

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{q}, \qquad \pm 1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{p}=\pm 1+\frac{1}{q}, \qquad \pm 1+\frac{1}{p}=\pm 1+\frac{1}{q}.$$

Or, aucune de ces égalités n'est possible, p et q étant deux nombres naturels distincts.

Notre théorème est ainsi démontré.

Comme on sait, il existe une base hamelienne non mesurable (L)[1]. Il résulte donc de notre théorème ce

Corollaire: *Il existe un ensemble linéaire Q non mesurable (L) et tel que toute somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles superposables avec Q par translation ou par rotation est de mesure intérieure nulle.*

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. I, p. 108.

Remarque sur les translations d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. E. Szpilrajn a posé le problème suivant [1]):

Peut-on démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble linéaire E non mesurable (L), tel que, quelle que soit la suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, E_3, \dots$, dont chacun est superposable avec E par translation, les ensembles $E_1+E_2+E_3+\dots$ et $CE_1+CE_2+CE_3+\dots$ sont de mesure intérieure nulle?

J'ai déduit récemment une solution positive de ce problème d'un théorème de la théorie générale des ensembles [2]).

Le but de cette Note est de remarquer qu'un ensemble dont j'ai démontré l'existence (à l'aide de l'axiome du choix) dans le t. XIX des *Fundamenta Mathematicae* (p. 24—27) satisfait aux conditions de M. Szpilrajn.

J'ai démontré l. c. (à l'aide du théorème de M. Zermelo) qu'il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, ne contient aucun sous-ensemble parfait [3]) et qui est transformé par chaque translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu. (L'ensemble CN jouit donc de la même propriété).

Désignons par $N(a)$ la translation de longueur a de l'ensemble N et soit $a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite infinie donnée quelconque de nombres réels. Posons

$$S = N(a_1)+N(a_2)+N(a_3)+\dots$$

---

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XXV, p. 546.

[2]) voir ibidem, p. 550.

[3]) Cette propriété de l'ensemble N n'est pas exprimée dans l'énoncé du Théorème II (l. c., p. 24—25), mais elle est établie dans la démonstration de ce théorème.

D'après la propriété de l'ensemble N, chacun des ensembles $N(a_k)$ N $<(k=1, 2, 3, ...)$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Donc (le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$ n'étant pas, d'après le théorème de J. König, une somme d'une infinité dénombrable de nombres cardinaux $< 2^{\aleph_0}$), l'ensemble

$$(1) \qquad R = S - N = \sum_{k=1}^{\infty} [N(a_k) - N]$$

est aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Or, on a d'après (1):

$$(2) \qquad N \supset S - R.$$

Supposons que l'ensemble S contienne un sous-ensemble parfait P. Comme on sait, en supprimant dans un ensemble parfait moins que $2^{\aleph_0}$ points, on obtient un ensemble contenant des sous-ensembles parfaits. L'ensemble $S-R$ contiendrait donc un sous-ensemble parfait, contrairement à (2) et à la propriété de l'ensemble N. L'ensemble S ne contient donc aucun sous-ensemble parfait et par suite est de mesure intérieure nulle.

De même, on démontre que l'ensemble

$$CN(a_1) + CN(a_2) + CN(a_3) + \dots$$

est de mesure intérieure nulle.

L'ensemble N satisfait donc aux conditions de M. Szpilrajn.

Transformations continues en circonférence et la topologie du plan.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Ce mémoire [1]) a pour but de développer une méthode permettant de traiter sans notions d'homologie toutes les propriétés topologiques qui s'expriment par le premier nombre de Betti. Les théorèmes sur l'unicohérence et sur les coupures du plan, que l'on démontrait jusqu'à présent par des procédés très divers, seront démontrés ici par une méthode unique. Dans beaucoup de cas on obtient ces théorèmes dans une forme plus générale (v. surtout parties I et II); le plus souvent c'est l'hypothèse de compacité qui se trouve superflue.

Table des matières.

---

[1]) Les deux premières parties de ce mémoire constituent ma Thèse présentée en septembre 1935 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques.

Les résultats principaux de ce mémoire ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Varsovie, à la séance du 22. 3. 1935.

Quelques théorèmes des parties I et II se trouvent dans ma note [2].

Pour les chiffres entre crochets voir la table des ouvrages cités, p. 111.