Sur une propriété de la base hamelienne.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, qui donne une solution immédiate d'un problème posé par M. E. Szpilrajn[1]):

Théorème: *Si B est une base de M. Hamel[2]) et S une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles linéaires quelconques, dont chacun est superposable par translation ou par rotation avec B, l'ensemble S a la mesure intérieure (lebesguienne) nulle.*

Démonstration. Soient E_1 et E_2 deux ensembles quelconques de nombres réels de puissance $<2^{\aleph_0}$. L'ensemble $E=E_1+E_2$ est donc aussi de puissance $<2^{\aleph_0}$. Chacun des nombres x de E peut être représenté (et cela d'une seule façon) sous la forme

$$x=a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n, \tag{1}$$

où n est un nombre naturel, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres rationnels et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des éléments de la base B.

Les éléments de la base B utilisés dans les représentations (1) des nombres x de E constituent donc un ensemble H de puissance $<2^{\aleph_0}$ (puisque $\overline{\overline{E}}<2^{\aleph_0}$). Or, la base B étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe un nombre $b\neq 0$ de la base B qui n'est pas un élément de H. Soit B^* l'ensemble de tous les nombres $-t$ où $t\in B$.

[1]) Voir *Fund. Math.* t. XXV, p. 546. La solution du problème de M. Szpilrajn a été déduite par M. W. Sierpiński d'un théorème de la théorie générale des ensembles: v. ibid. p. 547—550.

[2]) Pour la définition de la base de M. G. Hamel voir p. ex. *Fund. Math.* t. I, p. 105.

Désignons généralement par $M(a)$ la translation de longueur a de l'ensemble M (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres $x+a$ où $x\in M$). Posons

$$S=\sum_{x\in E_1} B(x)+\sum_{x\in E_2} B^*(x). \tag{2}$$

Pour démontrer notre théorème, il suffira évidemment de prouver que $\text{mes}_i\, S=0$.

Or, on montre sans peine que pour prouver qu'un ensemble linéaire M est de mesure intérieure lebesguienne nulle, il suffit de démontrer qu'il existe une suite infinie bornée de nombres réels $u_1, u_2, u_3, \ldots$, telle que les ensembles $M(u_1)$, $M(u_2)$, $M(u_3)$,... soient disjoints deux à deux. Pour prouver notre théorème, il suffira donc de démontrer que les ensembles $S\left(\frac{b}{1}\right)$, $S\left(\frac{b}{2}\right)$, $S\left(\frac{b}{3}\right)$,... sont deux à deux disjoints. Supposons donc que ce n'est pas le cas. Il existe alors deux nombres naturels p et $q\neq p$ et un nombre réel y, tels que

$$y\in S\left(\frac{b}{p}\right) \quad \text{et} \quad y\in S\left(\frac{b}{q}\right). \tag{3}$$

D'après (3) et (2) il existe donc deux nombres x_1 et x_2 de l'ensemble E, tels que

$$y\in B\left(x_1+\frac{b}{p}\right)+B^*\left(x_1+\frac{b}{p}\right) \quad \text{et} \quad y\in B\left(x_2+\frac{b}{q}\right)+B^*\left(x_2+\frac{b}{q}\right),$$

d'où il résulte que

$$y=\pm b'+x_1+\frac{b}{p}=\pm b''+x_2+\frac{b}{q} \tag{4}$$

où $b'\in B$ et $b''\in B$.

Les développements (1) des nombres x_1 et x_2 ne contenant pas l'élément b de la base B (car $x_1\in E$ et $x_2\in E$), on voit sans peine que le développement de $\pm b'+x_1+\frac{b}{p}$ contient l'élément b de la base B soit avec le coefficient $\frac{1}{p}$ (si $b'\neq b$), soit avec le coefficient $\pm 1+\frac{1}{p}$ (si $b'=b$). Pareillement, le développement (1) de $\pm b''+x_2+\frac{b}{q}$ contient b soit avec le coefficient $\frac{1}{q}$, soit avec le coefficient $\pm 1+\frac{1}{q}$.

D'après (4) (le développement (1) de tout nombre réel x étant unique), on a donc nécessairement une des égalités

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{q}, \qquad \pm1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{p}=\pm1+\frac{1}{q}, \qquad \pm1+\frac{1}{p}=\pm1+\frac{1}{q}.$$

Or, aucune de ces égalités n'est possible, p et q étant deux nombres naturels distincts.

Notre théorème est ainsi démontré.

Comme on sait, il existe une base hamelienne non mesurable (L)[1]. Il résulte donc de notre théorème ce

Corollaire: *Il existe un ensemble linéaire Q non mesurable (L) et tel que toute somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles superposables avec Q par translation ou par rotation est de mesure intérieure nulle.*

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. I, p. 108.

Remarque sur les translations d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. E. Szpilrajn a posé le problème suivant [1]):

Peut-on démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble linéaire E non mesurable (L), tel que, quelle que soit la suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, E_3,\ldots$, dont chacun est superposable avec E par translation, les ensembles $E_1+E_2+E_3+\ldots$ et $CE_1+CE_2+CE_3+\ldots$ sont de mesure intérieure nulle?

J'ai déduit récemment une solution positive de ce problème d'un théorème de la théorie générale des ensembles [2]).

Le but de cette Note est de remarquer qu'un ensemble dont j'ai démontré l'existence (à l'aide de l'axiome du choix) dans le t. XIX des *Fundamenta Mathematicae* (p. 24—27) satisfait aux conditions de M. Szpilrajn.

J'ai démontré l. c. (à l'aide du théorème de M. Zermelo) qu'il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, ne contient aucun sous-ensemble parfait [3]) et qui est transformé par chaque translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu. (L'ensemble CN jouit donc de la même propriété).

Désignons par $N(a)$ la translation de longueur a de l'ensemble N et soit $a_1, a_2, a_3,\ldots$ une suite infinie donnée quelconque de nombres réels. Posons

$$S = N(a_1)+N(a_2)+N(a_3)+\ldots$$

---

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XXV, p. 546.

[2]) voir ibidem, p. 550.

[3]) Cette propriété de l'ensemble N n'est pas exprimée dans l'énoncé du Théorème II (l. c., p. 24—25), mais elle est établie dans la démonstration de ce théorème.