Sur les fonctions d'une infinité de variables.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Le but de cette Note[1]) est de démontrer les théorèmes suivants:

Théorème I. *Soit F la famille de toutes les fonctions $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ d'une infinité de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$, définies pour $0<x_i<1$. Il existe une fonction $\varphi(x)$ définie et croissante pour $0<x<1$, une suite infinie de nombres réels $c_1, c_2, c_3, \ldots$ et, pour toute fonction f de la famille F, une fonction mesurable $g(x)$ définie pour $0<x<1$, telles qu'on a pour toute suite infinie de nombres x_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$, où $0<x_i<1$:*

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3 \ldots) = g(c_1\varphi(x_1) + c_2\varphi(x_2) + c_3\varphi(x_3) + \ldots).$$

Théorème II. *Soit Φ une famille donnée quelconque de puissance du continu de fonctions d'une infinité de variables x_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ définies pour $0<x_i<1$. Il existe pour la famille Φ une fonction $\varphi(x)$, définie et croissante pour $0<x<1$, une suite infinie de nombres réels $c_1, c_2, c_3, \ldots$, une fonction mesurable $g(x)$, définie pour $0<x<1$ et; pour toute fonction f de la famille Φ, un nombre t $(0<t<1)$, tels qu'on a pour toute suite infinie de nombres x_i $(0<x_i<1)$:*

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = g(t + c_1\varphi(x_1) + c_2\varphi(x_2) + \ldots)$$

---

[1]) Cf. les travaux connexes: L. Bieberbach, *Journ. f. r. u. a. Math.* **165**, p. 92; A. Lindenbaum, *Fund. Math.* **20**, p. 26—27; S. Ruziewicz, Al doilea Congres al Mat. Romani 1932, *Mathematica* (Cluj) Vol. IX, p. 83; S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Mathematica* (Cluj), Vol. VII, p. 89; W. Sierpiński: *Prace Mat.-Fiz.* **41**, p. 173; W. Sierpiński *C. R. Soc. Sc. Varsovie* Année XXVI, p. 12; W. Sierpiński: *Publ. Math. Univ. Belgrade* t. III (1934), p. 42.

Démonstrations.

I. Définissons pour $0<x<1$ la fonction $\varphi(x)$ comme il suit. Si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

est le développement dyadique de x contenant une infinité de chiffres $\neq 0$, posons

$$(3) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{10^n}}$$

La fonction $\varphi(x)$ est, comme on voit sans peine, croissante (continue pour tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$).

Posons

$$(4) \qquad c_i = \frac{1}{2^{9\cdot 10^i}} \quad \text{pour} \quad i=1, 2, 3, \ldots$$

Pour toute suite infinie x_i $(0<x_i<1)$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ la somme

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi(x_i),$$

ordonnée d'après les puissances croissantes des dénominateurs, présente, comme on le voit sans peine, le développement dyadique contenant une infinité de chiffres $\neq 0$ d'un nombre t, où $0<t<1$.

En effet, en posant pour $i=1, 2, 3, \ldots$

$$x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(i)}}{2^n},$$

nous avons, d'après (3) et (4):

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(i)}}{2^{9\cdot 10^i + 10^n}}.$$

Il n'y aura aucune réduction de termes de cette somme en l'ordonnant d'après les grandeurs croissantes de leurs dénominateurs, puisque, comme on le voit sans peine, l'égalité

$$9\cdot 10^p + 10^q = 9\cdot 10^r + 10^s$$

pour p, q, r et s naturels, donne $p=r$ et $q=s$.

Désignons par N l'ensemble de tous les nombres x $(0<x<1)$ pour lesquels il existe une suite infinie x_i $(0<x_i<1;\quad i=1,2,3,\ldots)$, telle que

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i). \tag{6}$$

L'ensemble N est de mesure lebesguienne nulle, tout nombre de cet ensemble ayant, dans son développement dyadique, tous les chiffres aux places impaires égaux à 0.

Ensuite, on voit sans peine que l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i')$$

donne $x_i=x_i'$ pour $i=1,2,3,\ldots$ Cela prouve qu'il existe pour tout nombre x de l'ensemble N une suite infinie unique x_i $(0<x_i<1;$ $i=1,2,3,\ldots)$ pour laquelle on a l'égalité (6). Nous pouvons donc définir, pour toute fonction donnée f de la famille F, la fonction $g(x)$ pour $x\,\epsilon\,N$, en posant

$$g(x)=f(x_1,x_2,x_3,\ldots)\quad \text{si}\quad x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i).$$

Posons encore:

$$g(x)=0\quad \text{pour}\quad x \text{ non } \epsilon\, N.$$

La fonction $g(x)$ est non nulle seulement pour (certains) nombres de l'ensemble N, qui est de mesure nulle: elle est donc mesurable (L).

Or, pour toute suite infinie de nombres $x_i\,(0<x_i<1;\; i=1,2,3,\ldots)$ nous avons évidemment la formule (1).

Le théorème I est ainsi démontré.

II. Définissons la fonction $\varphi(x)$ et la suite $c_1, c_2, c_3,\ldots$ comme plus haut par les formules (3) et (4).

La famille Φ étant de puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions de Φ et les nombres t de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^{2n-1}}, \tag{7}$$

où b_n $(n=1,2,3,\ldots)$ sont des nombres 0 ou 1, dont une infinité est $\neq 0$. Désignons généralement par t_f le nombre (7) correspondant à la fonction f de la famille Φ.

L'ensemble U de tous les nombres

$$t_f+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i),$$

où $f\,\epsilon\,\Phi$ et $0<x_i<1$ pour $i=1,2,3,\ldots$, est encore de mesure nulle (chacun de ces nombres ayant un développement dyadique dont tous les chiffres aux places paires et non divisibles par 5 sont nuls).

Or, comme on voit sans peine, l'égalité

$$t_f+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i)=t_{f'}+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i')$$

entraîne les égalités $f=f'$ et $x_i=x_i'$ pour $i=1,2,3,\ldots$ Il existe donc pour tout nombre x de U une fonction unique f de Φ et une suite unique x_i $(0<x_i<1;\; i=1,2,3,\ldots)$, telles qu'on a l'égalité

$$x=t_f+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i).$$

Nous pouvons donc définir pour $x\,\epsilon\,U$ la fonction $g(x)$, en posant

$$g(x)=f(x_1,x_2,x_3,\ldots)\quad \text{si}\quad x=t_f+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i).$$

Posons encore:

$$g(x)=0\quad \text{pour}\quad x \text{ non } \epsilon\, U.$$

Comme dans I, nous concluons que la fonction $g(x)$ est mesurable L et qu'on a pour toute fonction f de la famille Φ et toute suite x_i $(0<x_i<1;\; i=1,2,3,\ldots)$ l'égalité

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots)=g\Big(t_f+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi(x_i)\Big).$$

Le théorème II est ainsi démontré.