Sierpiński, W. [4] *Sur les images biunivoques et continues dans un sens.* Fund. Math. 26 (1936), pp. 44—49.

— [5] *Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables.* Fund. Math. 26 (1936), pp. 327—333.

Szpilrajn, E. [1] *Sur une hypothèse de M. Borel.* Fund. Math. 15 (1930), pp. 126—127.

— [2] *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur la propriété de Baire.* Fund. Math. 22 (1934), pp. 303—311.

— [3] *Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles.* Fund. Math. 24 (1935), pp. 17—34.

Whitehead, A. N. and Russell, B. [I] *Principia Mathematica*, vol. II. Cambridge 1927.

Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, qui donne une solution à un problème posé récemment par M. E. Szpilrajn[1]):

Théorème I: *Il existe une suite infinie d'ensembles*

(1) $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

formés de nombres naturels, telle que

(2) $$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

étant une suite infinie donnée quelconque d'ensembles dont la somme $S=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *est dénombrable, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels* $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ *et une transformation biunivoque* f *de l'ensemble* N *de tous les nombres naturels en l'ensemble* S, $f(N)=S$, *telle que*

(3) $$f(X_{k_m}) = Y_m \quad pour \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

Nous déduirons le théorème I du théorème II que voici:

Théorème II: *Il existe une suite double*

$$\{a_n^m\} \; (m=1, 2, 3, \ldots; \; n=1, 2, 3, \ldots)$$

formée des nombres 0 *et* 1, *telle que*

$$\{u_n^m\} \; (m=1, 2, 3, \ldots; \; n=1, 2, 3, \ldots)$$

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. 26, p. 313 [1]).

étant une suite double donnée quelconque formée des nombres 0 *et* 1, *il existe une suite infinie croissante de nombres naturels* $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ *et une suite infinie* $l_1, l_2, l_3, \ldots$ *qui ne diffère de la suite* $1, 2, 3, \ldots$ *que, peut être, par l'ordre des termes, telles que*

$$a_{l_n}^{k_m} = u_n^m \quad \textit{pour} \quad m=1,2,3,\ldots \quad \textit{et} \quad n=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Démonstration. Soit

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots \tag{5}$$

une suite infinie formée de toutes les suites finies des nombres 0 et 1 (p. ex. $S_1=(0)$, $S_2=(1)$, $S_3=(0,0)$, $S_4=(0,1)$ $S_5=(1,0)$, $S_6=(1,1)$, $S_7=(0,0,0)$, $S_8=(0,0,1)$, etc).

Nous définirons (pour $m=1,2,3,\ldots$) la suite infinie

$$a_1^m,\ a_2^m,\ a_3^m, \ldots \tag{6}$$

comme il suit.

m étant un nombre naturel donné, il existe, comme on sait, des nombres naturels p et q bien déterminés par m, tels que

$$m = 2^{p-1}(2q-1).$$

Écrivons d'abord les termes consécutifs de la suite S_p et ensuite les termes consécutifs de la suite S_q, en la répétant une infinité de fois:

$$S_p,\ S_q,\ S_q,\ S_q,\ S_q, \ldots$$

La suite infinie de nombres 0 et 1 ainsi obtenue sera, par définition, la suite (6). Cette suite est évidemment périodique à partir d'un certain terme (p. ex. pour $m=60$ nous avons $p=3$, $q=8$, $S_3=(0,0)$, $S_8=(0,0,1)$, et la suite (6) est ici: 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...).

La suite double $\{a_n^m\}$ $(m=1,2,3,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots)$ est ainsi définie. Elle jouit, comme on le voit sans peine, de la propriété (P) suivante:

(P) Quel que soit le nombre naturel s et les nombres naturels $k_1, k_2, \ldots, k_s$, la suite infinie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ des suites finies

$$\sigma_n = (a_n^{k_1},\ a_n^{k_2}, \ldots,\ a_n^{k_s}) \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

est périodique à partir d'un certain terme.

Nous prouverons que la suite double $\{a_n^m\}$ satisfait aux conditions du théorème II.

Soit $\{u_n^m\}$ $(m=1,2,3,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots)$ une suite double donnée quelconque formée des nombres 0 et 1. Soit s un nombre naturel donnée. Soient $(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^s)$ $(i=1,2,\ldots,r_s)$ toutes les suites à s termes 0 ou 1 (parmi les 2^s suites possibles) pour lesquelles il existe une infinité de nombres naturels n tels que

$$u_n^m = c_i^m \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, s.$$

Soient $(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^s)$ $(i = r_s+1,\ r_s+2, \ldots, 2^s)$ toutes les autres suites à s termes 0 ou 1. Il existe donc, pour tout nombre naturel i tel que $r_s+1 \leqslant i \leqslant 2^s$, un nombre naturel p_i tel que la suite $(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^s)$ est distincte de chacune des suites $(u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^s)$ pour $n > p_i$. Soit

$$q_s = \max(p_{r_s+1}, p_{r_s+2}, \ldots, p_{2^s})$$

On voit sans peine que l'ensemble E_s de r_s suites $(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^s)$ $(i=1,2,\ldots,r_s)$ jouit des deux propriétés suivantes:

1° Toute suite $(u_n^1, u_n^1, \ldots, u_n^s)$ où $n > q_s$ est une des suites de l'ensemble E_s,

2° Il existe pour tout nombre $i=1,2,\ldots,r_s$ une infinité de nombres naturels n, pour lesquels les suites $(u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^s)$ et $(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^s)$ coïncident.

Nous appellerons E_s *l'ensemble* E_s *relatif aux suites* $\{u_n^m\}$ $(m=1,2,\ldots,s;\ n=1,2,3,\ldots)$.

Nous définirons maintenant par l'induction les suites infinies de nombres naturels $l_1, l_2, l_3, \ldots$ et $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ comme il suit.

Nous poserons $h_1 = q_1$ et

$$l_n = n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, h_1.$$

L'ensemble E_1 est formé de suites à un terme (0 ou 1); on a donc soit $E_1 = ((0))$, soit $E_1 = ((1))$, soit $E_1 = ((0),(1))$. Posons dans le premier cas $S=(0)$, dans le second $S=(1)$ et dans le troisième $S=(0,1)$. D'après la définition de la suite (5), il existe un nombre naturel p tel que $S_p = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{q_1}^1)$ et un nombre naturel q tel que $S_q = S$. Nous poserons

$$k_1 = 2^{p-1}(2q-1)$$

D'après la définition de la suite (6), nous aurons évidemment

$$a_{l_n}^{k_1} = u_n^1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, h_1.$$

Soit maintenant s un nombre naturel donné et supposons que nous ayons déjà défini les nombres $h_1, h_2, \ldots, h_s$; $l_1, l_2, \ldots, l_{h_s}$ et les nombres $k_1, k_2, \ldots, k_s$ tels que

1) $$h_s \geqslant q_s,$$

2) $$a_{l_n}^{k_m} = u_n^m \quad \text{pour} \quad m \leqslant s,\ n \leqslant h_s,$$

3) l'ensemble E_s relatif aux suites

$$\{a_{l_n}^{k_m}\} \ (m = 1, 2, \ldots, s;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

coïncide avec l'ensemble E_s relatif aux suites

$$\{u_n^m\} \ (m = 1, 2, \ldots, s;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

4) $$(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}) \in E_s \quad \text{pour} \quad n \neq l_1, l_2, \ldots, l_{h_s}.$$

(Les propriétés 1)—4) sont, comme on voit sans peine, vraies pour $s=1$).

Soit g le plus petit indice tel que $g \neq l_n$ pour $n = 1, 2, \ldots, h_s$. D'après 4) et 3), il existe le plus petit indice j tel que $j > h_s$ et

$$a_g^{k_m} = u_j^m \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, s.$$

Posons

$$h_{s+1} = \max(j, q_{s+1}).$$

Supposons que nous ayons déjà défini les nombres naturels l_n pour $n \leqslant i$, où i est un nombre naturel $\geqslant h_s$ et $< h_{s+1}$ (ce qui est vrai pour $i = h_s$). Il existe (d'après 4) et 3)) le plus petit indice r tel que

$$r > l_n \quad \text{pour} \quad n \leqslant i \quad \text{et} \quad a_r^{k_m} = u_{i+1}^m \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots, s.$$

Nous poserons $l_{i+1} = r$.

Les nombres $l_{h_s+1}, l_{h_s+2}, \ldots, l_{h_{s+1}}$ sont ainsi définis par l'induction.

D'après la propriété (P) de la suite double $\{a_n^m\}$, il existe un nombre naturel

(7) $$d \geqslant \max(l_1, l_2, \ldots, l_{h_{s+2}})$$

tel que la suite infinie des suites (à s termes)

$$(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}) \quad (n = d+1, d+2, \ldots)$$

est périodique: soit t le nombre de termes de la période: nous pouvons supposer que $t > k_s$ (en prenant, s'il faut, les multiples de la période).

D'après (7) et 4) toutes les suites

(8) $$(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}) \quad (n = d+1, d+2, \ldots, d+t).$$

appartiennent à E_s et (d'après les définitions des nombres d et t), toute suite de E_s est une des suites (8).

Nous définirons maintenant les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_{2t}$ comme il suit.

Si $1 \leqslant i \leqslant t$, nous poserons: $b_i = 0$ quand

$$(a_{d+i}^{k_1}, a_{d+i}^{k_2}, \ldots, a_{d+i}^{k_s}, 0) \in E_{s+1}$$

et $b_i = 1$ dans le cas contraire (donc, quand $(a_{d+i}^{k_1}, a_{d+i}^{k_2}, \ldots, a_{d+i}^{k_s}, 1) \in E_{s+1}$).

Si $t < i \leqslant 2t$, nous poserons: $b_i = 1$ quand

$$(a_{d+i}^{k_1}, a_{d+i}^{k_2}, \ldots, a_{d+i}^{k_s}, 1) \in E_{s+1}$$

et $b_i = 0$ dans le cas contraire.

D'après la définition de la suite (5), il existe un indice q tel que

$$S_q = (b_1, b_2, \ldots, b_{2t}).$$

D'après l'inégalité $t > k$ et la définition de la suite (5), on a $q > k_s$.

Soit n un indice $\leqslant d$ et $\neq l_1, l_2, \ldots, l_{h_{s+1}}$. D'après 4), on a $(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}) \in E_s$, et il existe un nombre c égal à 0 ou à 1, tel que $(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}, c) \in E_{s+1}$, ce qui résulte sans peine de 4) et de la définition de l'ensemble E_{s+1} (les s premiers termes de chaque suite de E_{s+1} formant une suite de E_s).

Si $(a_n^{k_1}, a_n^{k_2}, \ldots, a_n^{k_s}, 0) \epsilon E_{s+1}$, posons $f_n = 0$, sinon, posons $f_n = 1$. Les nombres f_n sont ainsi définis pour $n \leqslant d$, $n \neq l_1, l_2, \ldots, l_{h_{s+1}}$. Posons encore

$$f_n = u_n^{s+1} \quad \text{pour} \quad n = l_1, l_2, \ldots, l_{h_{s+1}}$$

D'après la définition de la suite (5), il existe un nombre naturel p tel que

$$S_p = (f_1, f_2, \ldots, f_d).$$

Nous poserons

$$k_{s+1} = 2^{p-1}(2q-1).$$

Comme $q > k_s$, on a $k_{s+1} > k_s$.

On vérifie sans peine que les propriétés 1)—4) subsistent quand on y remplace le nombre s par $s+1$. On démontre aussi facilement par l'induction que parmi les nombres $l_1, l_2, \ldots, l_{h_s}$ figurent tous les nombres $1, 2, \ldots, s$ (pour $s = 1, 2, 3, \ldots$). On en déduit aisément que la suite infinie $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ne diffère que, peut être, par l'ordre des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots$ Enfin, il résulte tout de suite de 2) (pour $s = 1, 2, 3, \ldots$) qu'on a la formule (4).

Le théorème II est ainsi démontré.

Soit maintenant $\{a_n^m\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite double satisfaisant aux conditions du théorème II. Posons, pour m naturels:

$$X_m = \underset{n}{\mathrm{E}}[a_n^m = 1]. \tag{9}$$

Je dis que la suite infinie d'ensembles (1) ainsi définie satisfait aux conditions du théorème I.

En effet, soit (2) une suite infinie donnée quelconque d'ensembles dont la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ est dénombrable; soit donc

$$S = (p_1, p_2, p_3, \ldots).$$

Définissons maintenant la suite double $\{u_n^m\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ en posant

$$\begin{aligned} u_n^m &= 1, \quad \text{si} \quad p_n \epsilon Y_m, \\ u_n^m &= 0, \quad \text{si} \quad p_n \,\textit{non}\, \epsilon Y_m. \end{aligned} \tag{10}$$

D'après le théorème II, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels $k_1, k_2, k_3, \ldots$ et une suite infinie $l_1, l_2, l_3, \ldots$ qui ne diffère de la suite $1, 2, 3, \ldots$ que, peut-être, par l'ordre des termes, tels qu'on a la formule (4).

Posons

$$f(l_n) = p_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

La fonction f ainsi définie transforme évidemment d'une façon biunivoque l'ensemble N de tous les nombres naturels en l'ensemble S. Je dis qu'on a la formule (3).

En effet, la suite $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ne différant de la suite $1, 2, 3, \ldots$ que, peut-être, par l'ordre des termes, la formule (9) donne (pour $m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$X_{k_m} = \underset{l_n}{\mathrm{E}}[a_{l_n}^{k_m} = 1]. \tag{12}$$

Or d'après (10), la formule $p_n \epsilon Y_m$ est (pour m et n naturels) équivalente à la formule $u_n^m = 1$, donc, d'après (4), à la formule $a_{l_n}^{k_m} = 1$ et, d'après (12), à la formule $l_n \epsilon X_{k_m}$. La transformation f étant biunivoque, cette dernière formule équivaut à la formule $f(l_n) = f(X_{k_n})$, donc, d'après (11), à la formule $p_n \epsilon f(X_{k_m})$.

Les formules $p_n \epsilon Y_m$ et $p_n \epsilon f(X_{k_m})$ sont ainsi équivalentes (pour m et n naturels), d'où la formule (3).

Le théorème I est ainsi démontré.