Supposons, en effet, que S_{n-1}^X ne soit pas connexe. Il existe alors un polyèdre 0-dimensionnel (c. à d. ensemble fini) $P \subset S_n - X$, tel que X n'est pas contractile dans $S_n - P$. L'ensemble $S_n - X$ étant connexe et ouvert, il existe donc une ligne simple polygonale L telle que $P \subset L \subset S_n - X$. A plus forte raison X n'est pas contractile dans $S_n - L$. Or, c'est impossible, puisque $S_n - L$ est évidemment homéomorphe à R_n.

Grundzüge des Systemenkalküls.

Zweiter Teil*).

Von

Alfred Tarski (Warschau).

§ 4. Die unzerlegbaren und die vollständigen Systeme.

Auf Grund des Systemenkalküls kann man gewisse Sätze tieferer Natur begründen, die die Mächtigkeit und die Struktur verschiedener Arten von deduktiven Systemen betreffen; in den Formulierungen und Beweisen der eben genannten Sätze kommen zwei Begriffe vor, die wir bis jetzt nicht benutzt haben, nämlich der Begriff eines unzerlegbaren (irreduziblen) und der eines vollständigen (gesättigten) Systems. Wir bezeichnen die Klasse der unzerlegbaren Systeme mit dem Symbol „$\mathfrak{U}$", die der vollständigen mit dem Symbol „$\mathfrak{V}$" [1]). Die Definitionen dieser beiden Begriffe sind völlig analog:

Definition 12. *$X \in \mathfrak{U}$ dann und nur dann, wenn $X \neq L$ und wenn für ein beliebiges System $Y \in \mathfrak{S}$, für das $Y \subset X$ ist, gilt: $Y = L$ oder $Y = X$ (m. a. W. wenn $\mathfrak{S}^X = \{L, X\}$).*

Definition 13. *$X \in \mathfrak{V}$ dann und nur dann, wenn $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq S$ und wenn für ein beliebiges System $Y \in \mathfrak{S}$, für das $X \subset Y$ ist, gilt: $Y = S$ oder $Y = X$ (m. a. W. wenn $\mathfrak{S}_X = \{S, X\}$).*

*) S. »*Fundamenta Mathematicae*«, Bd. XXV, S. 503—526.

[1]) Mit dem Begriff der Vollständigkeit habe ich mich schon in meinen früheren Arbeiten befasst (vgl. T_1, S. 26, Def. 4; T_2, S. 390 ff., insbesondere Def. I. 7); hier aber wird der Begriff in einem etwas veränderten Sinne gebraucht, da (1) er ausschliesslich auf deduktive Systeme und nicht auf beliebige Aussagenmengen angewendet wird und da (2) nur jene deduktiven Systeme als vollständig bezeichnet werden, die — in der alten Terminologie — zugleich vollständig und widerspruchsfrei sind. Der Begriff des unzerlegbaren Systems ist hier zum ersten Mal eingeführt worden (das Symbol „$\mathfrak{U}$" habe ich früher, z. B. in T_1 und T_2, in einem anderen Sinne verwendet).

Einige einfachere Folgerungen dieser Definitionen sind:

Satz 29. Folgende Bedingungen sind einander äquivalent: (1) $X \in \mathfrak{U}$; (2) $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq L$ *und die Formeln:* $Y, Z \in \mathfrak{S}$ *und* $X = Y \dot{+} Z$ *ziehen immer nach sich:* $X = Y$ *oder* $X = Z$; (3) $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq S$ *und für ein beliebiges System* $Y \in \mathfrak{S}$ *gilt:* $X \subset Y$ *oder* $X \subset \overline{Y}$.

Satz 30. Folgende Bedingungen sind einander äquivalent: (1) $X \in \mathfrak{V}$; (2) $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq S$ *und die Formeln* $Y, Z \in \mathfrak{S}$ *und* $X = Y \cdot Z$ *ziehen immer nach sich:* $X = Y$ *oder* $X = Z$; (3) $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq S$ *und für ein beliebiges System* $Y \in \mathfrak{S}$ *gilt:* $Y \subset X$ *oder* $\overline{Y} \subset X$.

In den Bedingungen (3) dieser beiden Sätze kann man die Formel „$Y \in \mathfrak{S}$" durch „$Y \in \mathfrak{A}$" ersetzen.

Satz 31. ^{a}) *Wenn* $X, Y \in \mathfrak{U}$ *und* $X \neq Y$, *so* $X \cdot Y = L$; ^{b}) *wenn* $X, Y \in \mathfrak{V}$ *und* $X \neq Y$, *so* $X \dot{+} Y = S$.

Satz 32. ^{a}) *Wenn* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{U}$ *und* $\dot{\sum\limits_{X \in \mathfrak{K}}} X \subset \dot{\sum\limits_{X \in \mathfrak{L}}} X$, *so* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$: ^{b}) *wenn* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{V}$, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{V}$ *und* $\prod\limits_{X \in \mathfrak{K}} X \subset \prod\limits_{X \in \mathfrak{L}} X$, *so* $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}$.

Im Gegensatz zu dem, was man auf Grund der Def. 12 und 13 sowie der Sätze 29 und 30 vermuten könnte, besteht zwischen den Eigenschaften der Klassen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ keine genaue duale Entsprechung. Einen kleinen Unterschied konnte man schon in Satz 32 sehen; die Divergenz tritt in den weiteren Sätzen deutlich hervor.

Satz 33. $X \in \mathfrak{U}$ *dann und nur dann wenn* $X \in \mathfrak{S}$ *und* $\overline{X} \in \mathfrak{V}$.

In diesem Satz kann man nicht einfach „$\mathfrak{U}$" durch „$\mathfrak{V}$" ersetzen und umgekehrt; es gilt dagegen:

Satz 34. Wenn $X \in \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{A}$, *so* $\overline{X} \in \mathfrak{U}$; *wenn* $X \in \mathfrak{V} - \mathfrak{A}$, *so* $\overline{X} = L$.

Einer der wesentlichen Unterschiede zwischen den Eigenschaften der Klassen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ besteht darin, dass die Klasse $\mathfrak{U}$ ausschliesslich aus axiomatisierbaren Systemen besteht, während die Klasse $\mathfrak{V}$ sowohl axiomatisierbare, als auch nichtaxiomatisierbare Systeme enthalten kann; aus Satz 34 folgt jedoch, dass die vollständigen Systeme in allen Fällen axiomatisierbare Komplemente besitzen, also konvergent sind:

Satz 35. $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{C}$.

Einen tieferen Charakter besitzt der Satz von Lindenbaum, nach dem jedes von S verschiedene System zu einem vollständigen System erweitert werden kann [1]). Dieses Ergebnis kann man in folgender Weise verstärken:

Satz 36. Wenn $X \in \mathfrak{S}$, *so* $X = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{S}_X \cdot \mathfrak{V}} Y$.

Auf diese Weise kann man jedes System als ein Produkt von vollständigen Systemen darstellen. In Bezug auf die Klasse $\mathfrak{U}$ fehlt der entsprechende duale Satz: wenn die Klasse $\mathfrak{S}$ unendlich ist, so gibt es, wie man leicht aus dem weiter unten angegebenen Satz 37 ersehen kann, sicherlich Systeme, die nicht Summen unzerlegbarer Systeme sind.

Wir kommen nun zu den am Anfang dieses Paragraphen angekündigten Sätzen.

Satz 37. Folgende Bedingungen sind einander äquivalent: (1) $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} < \aleph_0$; (2) $\overline{\overline{\mathfrak{V}}} < \aleph_0$; (3) *es gibt eine solche natürliche Zahl n, dass* $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} = n$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^n$; (4) *es gibt eine solche natürliche Zahl n, dass* $\overline{\overline{\mathfrak{V}}} = n$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^n$; (5) $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}$; (6) $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{A}$; (7) $S = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{U}}} Y$; (8) $X = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{S}^X \cdot \mathfrak{U}}} Y$ *für ein beliebiges* $X \in \mathfrak{S}$; (9) $X = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{S}_X \cdot \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{A}} Y$ *für ein beliebiges* $X \in \mathfrak{S}$.

Satz 38. Folgende Bedingungen sind einander äquivalent: (1) $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \geqslant \aleph_0$; (2) $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = 2^{\aleph_0}$; (3) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \aleph_0$; (4) $\overline{\overline{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}} \geqslant \aleph_0$; (5) $\overline{\overline{\mathfrak{S} - \mathfrak{C}}} = 2^{\aleph_0}$.

Indem wir die Relativierungssätze — 20 und 21 — anwenden, können wir aus den beiden letzten Sätzen Folgerungen von weit allgemeiner Natur ableiten, die sich auf jene deduktive Systeme beziehen, welche in einem gegebenen axiomatisierbaren System A enthalten sind oder ein gegebenes (nicht notwendig axiomatisierbares) System B umfassen. Es ist jedoch notwendig zu beachten,

---

[1]) Vgl. T_1, S. 26, Satz 12; T_2, S. 394, Satz I. 56.

dass bei der Verallgemeinerung der angegebenen Sätze alle Arten von Systemen, von denen in diesen Sätzen gesprochen wird, der Relativierung rücksichtlich auf die Menge A oder B unterliegen: nicht nur die Klassen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ gehen beziehungsweise in $\mathfrak{S}^A$ und $\mathfrak{A}^A$ oder in $\mathfrak{S}_B$ und $\mathfrak{A}_B$ über (vgl. die Sätze 20 und 21), sondern auch mit den Klassen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ geschieht entsprechendes. Indem wir die Definitionen dieser Klassen relativieren, überzeugen wir uns leicht, dass (unter der Voraussetzung: $A \epsilon \mathfrak{A}$) $\mathfrak{C}^A = \mathfrak{S}^A \cdot \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}^A = \mathfrak{S}^A \cdot \mathfrak{U}$ gilt, sowie dass die Klasse $\mathfrak{B}^A$ aus den und nur aus den Systemen X besteht, die die Formeln: $X \neq A$ und $\mathfrak{S}^A \cdot \mathfrak{S}_X = \{A, X\}$ erfüllen (man kann ebenso $\mathfrak{B}^A$ als die Klasse aller Systeme der Gestalt $A \cdot Y$ charakterisieren, wobei Y ein beliebiges vollständiges System ist, das A nicht umfasst). Ferner besteht die Klasse $\mathfrak{C}_B$ aus allen Systemen $X \epsilon \mathfrak{S}_B$, die die Bedingung erfüllen: unter den Systemen der Klasse $\mathfrak{A}_B$, die X umfassen, gibt es ein kleinstes System (wenn $B \epsilon \mathfrak{A}$, so $\mathfrak{C}_B = \mathfrak{S}_B \cdot \mathfrak{C}$); die Klasse $\mathfrak{U}_B$ besteht aus allen Systemen X, die die Formeln erfüllen: $X \neq B$ und $\mathfrak{S}_B \cdot \mathfrak{S}^X = \{B, X\}$ (die Formeln: $X \epsilon \mathfrak{U}_Y$ und $Y \epsilon \mathfrak{B}^X$ sind also äquivalent); schliesslich haben wir: $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{S}_A \cdot \mathfrak{B}$. Bei Relativierungen, die sich auf Satz 20 stützen, ist grundsätzlich die Voraussetzung: $A \epsilon \mathfrak{A}$ notwendig. Man kann jedoch zeigen, dass die Äquivalenz der relativierten Bedingungen (1), (3) und (5) des Satzes 37 nicht von dieser Voraussetzung abhängt, denn aus jeder dieser Bedingungen folgt, dass $A \epsilon \mathfrak{A}$; dasselbe betrifft die Bedingungen (7) und (8), wenn wir nur jede von ihnen mit den Worten verstärken: „*und* $\overline{\overline{\mathfrak{U}^A}} < \aleph_0$"; ähnlich sind die relativierten Formeln (1), (2), (3) und (5) des Satzes 38 miteinander äquivalent, unabhängig von der Voraussetzung der Axiomatisierbarkeit des Systems A (das alles gilt unter der Bedingung, dass wir das Symbol „$\mathfrak{A}^A$" als „$\mathfrak{S}^A \cdot \mathfrak{A}$" interpretieren, und von der allgemeineren, in Satz 20 aufgezeigten Interpretation absehen).

Den Satz 37 kann man dadurch erweitern, dass man als Bedingungen, die den Formeln (1)—(9) äquivalent sind, verschiedene Sätze des gewöhnlichen Klassenkalküls hinzufügt, die im Systemenkalkul nicht allgemeingültig sind, z. B. den Satz vom ausgeschlossenen Dritten (dessen Äquivalenz mit der Formel (5) aus dem Satz 17 gefolgert werden kann), den Satz von der doppelten Negation sowie die in Satz 23 angegebenen Sätze der Kontraposition, ferner den abgeschwächten Satz vom ausgeschlossenen Dritten und den Satz De Morgans, die in Satz 26 auftreten. Manche von den angeführten Sätzen des Klassenkalküls kann man zur Ergänzung der oben besprochenen Relativierungen des Satzes 37 benützen, wenn man nur den Anwendungsbereich dieser Sätze auf die Systeme der Klasse $\mathfrak{S}^A$ oder $\mathfrak{S}_B$ beschränkt; so z. B. sind, unter der Voraussetzung, dass $A \epsilon \mathfrak{A}$, die in Bezug auf das System A relativierten Bedingungen (1)—(9) des Satzes 37 der Bedingung äquivalent: $X = \overline{\overline{X}}$ *für ein beliebiges System* $X \epsilon \mathfrak{S}^A$.

Die Mächtigkeit der Klasse $\mathfrak{S}^A$ kann man den kardinalen Gehaltsgrad des Systems A, die Mächtigkeit der Klasse $\mathfrak{S}_B$ den kardinalen Vollständigkeitsgrad des Systems B nennen[1]). Da $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^S = \mathfrak{S}_L$, so ist die Mächtigkeit der Klasse $\mathfrak{S}$ zugleich der Gehaltsgrad des Systems S und der Vollständigkeitsgrad des Systems L; diese Kardinalzahl kann man den kardinalen Gehaltsgrad, bzw. Vollständigkeitsgrad der betrachteten deduktiven Theorie nennen. Aus den Sätzen 37 und 38 folgt, dass die Mächtigkeit der Klasse $\mathfrak{S}$ entweder eine natürliche Zahl von der Gestalt 2^n oder auch gleich $2^{\aleph_0}$ ist; den relativierten Sätzen gemäss betrifft dies ebenso den Gehaltsgrad und den Vollständigkeitsgrad eines beliebigen deduktiven Systems. Im Falle, dass der Vollständigkeitsgrad einer Theorie endlich ist, ist die Struktur der Theorie sehr einfach: wie der Satz 37 zeigt, sind dann alle Systeme axiomatisierbar, also unterscheidet sich der Systemenkalkül formal nicht vom Klassenkalkül; jedes System lässt sich — und zwar auf eine einzige Weise — als Summe einer endlichen Anzahl von unzerlegbaren Systemen oder als Produkt einer endlichen Anzahl von axiomatisierbaren vollständigen Systemen darstellen. Nahezu in gleich durchsichtiger Weise ordnen sich die Beziehungen zwischen den deduktiven Systemen in dem Fall, dass zwar nichtaxiomatisierbare Systeme bestehen, aber nur éines von ihnen vollständig ist. Dieser Fall wird in folgendem Satz behandelt:

Satz 39. Die Formeln: (1) $\overline{\overline{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}} = 1$ *und* (2) $\dot{\sum\limits_{Y \epsilon \mathfrak{U}}} Y \epsilon \mathfrak{B}$ *sind einander äquivalent und ziehen folgende Folgerungen nach sich:* (3) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\mathfrak{U}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}}} = \aleph_0$; (4) *wenn* $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X \cdot \mathfrak{U}}} = n < \aleph_0$, *so* $X \epsilon \mathfrak{A}$, $X = \dot{\sum\limits_{Y \epsilon \mathfrak{S}^X \cdot \mathfrak{U}}} Y$, $\overline{X} = \prod\limits_{Y \epsilon \mathfrak{S}^X \cdot \mathfrak{U}} \overline{Y}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X}} = 2^n$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}} = 2^{\aleph_0}$; (5) *wenn*

[1]) Den zweiten dieser Begriffe habe ich schon früher eingeführt; vgl. T_2, S. 396 ff., insbesondere Def. I. 8.

$\overline{\overline{\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}}=n<\aleph_0$, *so entweder* $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}$, $X=\prod_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}\overline{Y}$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}}=2^n$, *oder* $X\,\epsilon\,\mathfrak{C}-\mathfrak{A}$, $X=\sum_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{S}^X\cdot\mathfrak{U}}Y$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}}=2^{n+1}$, *wobei in beiden Fällen* $\overline{X}=\sum_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}Y$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X}}=2^{\aleph_0}$; (6) *wenn* $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X\cdot\mathfrak{U}}}=\overline{\overline{\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}}=\aleph_0$, *so* $X\,\epsilon\,\mathfrak{S}-\mathfrak{C}$, $X=\dot{\sum}_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{S}^X\cdot\mathfrak{U}}Y$, $\overline{X}=\sum_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}\overline{Y}$ *und* $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X}}=\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}}=2^{\aleph_0}$.

Die in den Sätzen 37 und 39 beschriebenen Fälle besitzen viele Berührungspunkte. Für beide Fälle charakteristisch ist die Rolle der unzerlegbaren Systeme als Grundelemente, aus denen sich sei es mit Hilfe der Operation der Addition allein, sei es auch mit Hilfe zweier Operationen—der Addition und der Komplementsbildung—beliebige deduktive Systeme konstruieren lassen. Die logische Alternative der beiden betrachteten Fälle könnte man in folgender Weise charakterisieren:

Satz 40. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (1) $\overline{\overline{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}}\leqslant 1$; (2) *wenn* $X=\dot{\sum}_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{U}}Y$, *so* $\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}}\leqslant 2$; (3) *für jedes System* $X\,\epsilon\,\mathfrak{A}$ *gilt entweder* $\overline{\overline{\mathfrak{S}^X}}<\aleph_0$, *oder* $\overline{\overline{\mathfrak{S}_X}}<\aleph_0$; (4) *für jedes System* $X\,\epsilon\,\mathfrak{S}$ *gilt entweder* $X=\dot{\sum}_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{S}^X\cdot\mathfrak{U}}Y$, *oder* $X=\prod_{Y\,\epsilon\,\mathfrak{U}-\mathfrak{S}^X}\overline{Y}$.

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir den Begriff des **strukturellen Typus** einer Theorie besprechen[1]). Wir sagen, dass zwei deduktive Theorien (oder allgemeiner: zwei beliebige „Modelle" des in § 1 angegebenen Systems von Axiomen und Grundbegriffen) denselben strukturellen Typus besitzen, wenn die Klasse aller deduktiven Systeme der ersten Theorie in Bezug auf die Beziehung der Inklusion isomorph ist mit der Klasse aller Systeme der zweiten Theorie, d. h. wenn sich zwischen den Systemen beider Theorien eine eineindeutige Zuordnung aufstellen lässt, die die

[1]) Diesen Begriff hat — unabhängig von mir — auch Lindenbaum als wichtig anerkannt.

folgende Bedingung erfüllt: wenn X_1 und Y_1 zwei beliebige Systeme der ersten Theorie sind, hingegen X_2 und Y_2 die ihnen zugeordneten Systeme der zweiten Theorie, so gilt $X_1\subset Y_1$ dann und nur dann, wenn $X_2\subset Y_2$; man kann dies noch anders ausdrücken: zwischen den Aussagen beider Theorien lässt sich eine mehrmehrdeutige Zuordnung aufstellen, so dass wenn x_1 und y_1 zwei beliebige Aussagen der ersten Theorie sind, hingegen x_2 und y_2 zwei beliebige ihnen entsprechende Aussagen der zweiten Theorie, dann die Formeln: $x_1\supset y_1$ und $x_2\supset y_2$ äquivalent sind.

Es zeigt sich, dass zwei Kardinalzahlen einen wesentlichen Einfluss auf den strukturellen Typus einer Theorie ausüben: die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der Klasse aller vollständigen axiomatisierbaren Systeme und die Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ der Klasse aller vollständigen nichtaxiomatisierbaren Systeme. Das geordnete Paar dieser Zahlen $(\mathfrak{a},\mathfrak{n})$ nennen wir **charakteristisches Paar einer deduktiven Theorie**. Die Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ können nicht ganz beliebig sein; schon aus den Sätzen 37 und 38 folgt, dass $\mathfrak{a}\leqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{n}\leqslant 2^{\aleph_0}$, sowie, dass sowohl der Fall: $\mathfrak{a}<\aleph_0$, $0<\mathfrak{n}<\aleph_0$ ausgeschlossen ist, als auch der Fall: $\mathfrak{a}=\aleph_0$, $\mathfrak{n}=0$. Andere Beziehungen zwischen den Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ hat A. **Mostowski** aufgestellt[1]); er hat nämlich bewiesen, dass nur folgende Paare von Zahlen als charakteristische Paare deduktiver Theorien auftreten können: (1) die Paare $(\mathfrak{a}, 0)$, wobei $\mathfrak{a}$ eine beliebige natürliche, von 0 verschiedene Zahl ist; (2) die Paare $(\aleph_0, \mathfrak{n})$, wobei $\mathfrak{n}$ eine beliebige Zahl $\leqslant\aleph_0$ ist; (3) die Paare $(\mathfrak{a}, 2^{\aleph_0})$, wobei $\mathfrak{a}$ eine beliebige Zahl $\leqslant\aleph_0$ ist (es folgt daraus u. a., dass die Zahl $\mathfrak{n}$ sowie die Zahl $\mathfrak{v}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}=\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ die Kontinuumhypothese realisieren). Es zeigt sich dabei, dass die betrachteten Zahlen keine weiteren Beschränkungen erfahren: wenn wir ein beliebiges Paar $(\mathfrak{a},\mathfrak{n})$ einer der drei aufgezeigten Arten haben, so kann man immer eine deduktive Theorie aufbauen, so dass $\overline{\overline{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}}}=\mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}}=\mathfrak{n}$.

Die einfachste Struktur besitzen Theorien mit dem charakteristischen Paar $(\mathfrak{a}, 0)$, wobei $\mathfrak{a}<\aleph_0$; ihnen folgen die Theorien mit dem Paar $(\aleph_0, 1)$. Aus den Sätzen 37 und 39, in denen wir Theorien dieser Art betrachtet haben, folgt, dass in diesen einfachsten Fällen schon das charakteristische Paar den strukturellen Typus einer Theorie eindeutig bestimmt: zwei Theorien mit demselben charakteristischen Paar besitzen denselben strukturellen Ty-

[1]) Die Ergebnisse der Untersuchungen **Mostowski's** im Bereiche des Systemenkalküls sind bis jetzt noch nicht publiziert.

pus. Mostowski hat gezeigt, dass sich dieses Ergebnis auf alle charakteristischen Paare $(\aleph_0, \mathfrak{n})$ erweitern lässt, wenn nur $\mathfrak{n} < \aleph_0$, dass aber im allgemeinen das charakteristische Paar den strukturellen Typus einer Theorie nicht bestimmt: schon unter den Theorien mit dem charakteristischen Paar $(\aleph_0, \aleph_0)$ treten unabzählbar viele verschiedene strukturelle Typen auf.

Man kann die Betrachtungen, die sich auf den strukturellen Typus einer ganzen Theorie beziehen, in Bezug auf die einzelnen Systeme der Theorie relativieren. Man muss dabei zwischen dem inneren und dem äusseren strukturellen Typus des Systems unterscheiden: zwei Systeme X und Y (einer und derselben Theorie oder selbst zweier verschiedenen deduktiven Theorien) besitzen denselben inneren, bzw. äusseren strukturellen Typus, wenn die Klassen $\mathfrak{S}^X$ und $\mathfrak{S}^Y$, bzw. $\mathfrak{S}_X$ und $\mathfrak{S}_Y$ hinsichtlich der Beziehung der Inklusion isomorph sind; der strukturelle Typus einer ganzen Theorie ist zugleich der innere strukturelle Typus des Systems S und der äussere des Systems L. Die Methode der Relativierung ermöglicht es, sich in den Untersuchungen über die strukturellen Typen nur auf eine einzige deduktive Theorie zu beschränken, ohne dass dadurch der Bereich der Betrachtungen wesentlich beschränkt wird: denn jede Theorie mit dem charakteristischen Paar $(\mathfrak{a}, 2^{\aleph_0})$ ist, wie Mostowski bewiesen hat, in dem Sinne universal, dass unter den strukturellen Typen einzelner Systeme dieser Theorie schon die strukturellen Typen aller möglichen Theorien vertreten sind.

§ 5. Anwendungen auf konkrete deduktive Theorien.

Wir werden jetzt die bisherigen Betrachtungen an Beispielen einiger konkreten deduktiven Theorien illustrieren, in denen sich die gegenseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Klassen von deduktiven Systeme in besonders durchsichtiger Weise ordnen.

Die erste von den Theorien, die wir im Sinne haben, könnte man als elementare Theorie der dichten Anordnung bezeichnen. In den Sätzen dieser Theorie treten Variablen von verschiedener Gestalt in einer abzählbaren Anzahl auf; es mögen dies z. B. die Zeichen „a'", „a''", „a'''" u. s. w. sein. Ausserdem haben wir hier vier Konstanten: das Zeichen des Vorangehens „R", das Zeichen der Negation „N", das Zeichen der Implikation „C" und den Alloperator „Π" [1]).

[1]) In Bezug auf die Symbolik vgl. LT, S. 31—32 und 44—45; T_6, S. 283—284.

Die Ausdrücke, die aus dem Symbol „R" und zwei ihm folgenden Variablen zusammengesetzt sind, z. B. „$Ra'a''$" (wir lesen: „*a' geht a'' voran*" oder „*a'' folgt a' nach*"), nennen wir elementare Formeln. Der Ausdruck, der aus dem Zeichen der Negation und aus dem ihm folgenden beliebigen Ausdruck x besteht, heisst Negation des Ausdruckes x, symbolisch $\bar{x}$; so z. B. ist „$NRa'a''$" (wir lesen: „*a' geht dem a'' nicht voran*" oder „*es ist falsch, dass a' dem a'' vorangeht*") die Negation der elementaren Formel „$R\,a'\,a''$". Die Formel, die aus dem Zeichen der Implikation und aus zwei der Reihe nach folgenden Ausdrücken x und y gebildet ist, wird die Implikation mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y, symbolisch $x \rightarrow y$, genannt; so z. B. ist „$C\,R\,a'a''\,N\,R\,a''\,a'$" (wir lesen: „*wenn a' dem a'' vorangeht, so a'' geht a' nicht voran*") eine Implikation mit dem Vorderglied „$R\,a'\,a''$" und dem Nachglied „$N\,R\,a''\,a'$". Indem wir vor einen beliebigen Ausdruck x den Alloperator samt einer ihm nachfolgenden Variable setzen, bekommen wir die Generalisation des Ausdruckes x in Bezug auf die gegebene Variable; z. B. „$\Pi\,a'\,N\,R\,a'\,a'$" (wir lesen: „*für ein beliebiges a' ist es falsch, dass a' sich selbst vorangeht*") ist die Generalisation des Ausdrucks „$N\,R\,a'\,a'$" in Bezug auf die Variable „a'".

Wir definieren ferner durch Rekursion eine gewisse Kategorie von Ausdrücken, die man Aussagefunktionen nennt: Aussagefunktionen erster Ordnung sind elementare Formeln, Funktionen höherer Ordnung entstehen aus Funktionen niederer Ordnung durch Anwendung einer der drei Operationen: der Negations-, der Implikations- und der Generalisationsbildung. Innerhalb der Variablen, die Bestandteile einer beliebigen Aussagefunktion sind, unterscheiden wir nach einer bekannten Methode [1]) freie und gebundene Variablen. Eine Aussagefunktion, die keine freien Variablen enthält, nennen wir eine (sinnvolle) Aussage; die Menge aller Aussagen bezeichnen wir mit dem Symbol „S".

Schliesslich definieren wir auf rekursivem Wege den Begriff des logischen Satzes. Zu den logischen Sätzen erster Ordnung, d. h. zu den logischen Axiomen, zählen wir Aussagefunktionen zweier Arten: (1) alle Ausdrücke des Typus $(\bar{x} \rightarrow x) \rightarrow x$, $x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y)$ und $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$, wobei x, y und z beliebige Aussagefunktionen sind; (2) folgende vier Aussagen:

[1]) Vgl. z. B. T_4, S. 102, Def. 6; T_6, S. 294, Def. 11.

$$c_1 = „N\,\Pi a'\,\Pi a''\,N R a' a''",$$

$$c_2 = „\Pi a'\,\Pi a''\,C R a' a''\,N R a'' a'",$$

$$c_3 = „\Pi a'\,\Pi a''\,\Pi a'''\,C R a' a''\,C N R a''' a''\,R a' a'''"$$

sowie

$$c_4 = „\Pi a'\,\Pi a''\,C R a' a''\,N\,\Pi a'''\,C R a' a'''\,N R a''' a''".$$

Wie man sieht, sind die Axiome der ersten Art beliebige Aussagefunktionen, die als Resultat einer Einsetzung in die Axiome des Aussagenkalküls gewonnen werden können. Von den Axiomen der zweiten Art drückt das erste aus, dass die Relation R nicht leer ist: es gibt zwei Dinge, von denen eines dem anderen vorangeht; die weiteren zwei charakterisieren R als eine Relation, die alle möglichen Dinge ordnet[1]); schliesslich behauptet das letzte, dass die durch die Relation R festgelegte Ordnung dicht ist: wenn a' dem a'' vorangeht, so gibt es ein solches Ding a''', das dem a' nachfolgt und dem a'' vorangeht[2]) — Die logischen Sätze höherer Ordnungen gewinnen wir aus den Sätzen niederer Ordnungen mit Hilfe einer der vier wohlbekannten Operationen: der Einsetzung, der Abtrennung, sowie der Hinzufügung und Weglassung des Alloperators im Nachglied[3]). Die Menge aller logischen Sätze, die keine freien Variablen enthalten, bezeichnen wir mit dem Symbol „L".

Wir haben also gezeigt, wie man alle Grundausdrücke der allgemeiner Metamathematik in ihrer Anwendung auf diejenige konkrete deduktive Theorie interpretieren soll, die zum Gegenstand der Betrachtung gewählt wurde. Wie man leicht feststellen kann, *bewahren* bei der obigen Interpretation *die Axiome* 1—5 *aus* § 1 *ihre Gültigkeit.* Es gelten also auch alle Folgerungen dieser Axiome; insbesondere kann man in den Überlegungen, die elementare Theorie der dichten Anordnung betreffen, den Systemenkalkül anwenden.

---

[1]) Die Axiome c_2 und c_3 weichen etwas von den gewöhnlichen Postulaten der Anordnung ab, und zwar deshalb, weil unter den Zeichen der betrachteten Theorie das Identitätszeichen nicht auftritt; vgl. hierzu J. Łukasiewicz: *O pojęciu wielkości (Über den Begriff der Grösse,* polnisch), Przegląd Filozoficzny (Revue Philosophique) 19, 1916, S. 35 ff.

[2]) Der Leser, den das Vorhandensein der Aussagen $c_1 - c_4$ unter der logischen Axiomen und dadurch auch unter den Elementen der Menge L wundert, möge die Aufmerksamkeit darauf lenken, dass die Menge L interpretiert werden kann als Gesamtheit von Aussagen, die man in dem Augenblicke als wahr anerkennt, in dem man die betrachtete deduktive Theorie zu treiben beginnt (vgl. § 1).

[3]) Vgl. T_4, S. 103; T_6, S. 296—299.

Ziehen wir jetzt zwei konkrete Aussagen in Betracht: $d_1 = „\Pi a'\,N\,\Pi a''\,N R a' a'''"$ sowie $d_2 = „\Pi a'\,N\,\Pi a''\,N R a'' a'"$. Wie man leicht erkennt, drücken diese Aussagen aus, dass es zu jedem Ding ein anderes Ding gibt, das ihm folgt, bzw. das ihm vorangeht, m. a. W. bei der Anordnung aller Dinge, die durch die Relation R festgelegt wird, gibt es kein letztes, bzw. kein erstes Element.

Mit Hilfe einer oft angewandten Methode, die in der Zurückführung der Aussagen auf die Normalform und in der sukzessiven Elimination der Operatoren besteht[1]), kann man folgenden Satz begründen (wir formulieren ihn in den Termen des Algorithmus der Aussagen, die uns aus den §§ 1 und 2 bekannt sind):

Jede Aussage $x \in S$ erfüllt genau éine von den folgenden sechzehn Formeln: (1) $x \in L$, (2) $\bar{x} \in L$, (3) $x \equiv d_1$, (4) $x \equiv \overline{d}_1$, (5) $x \equiv d_2$, (6) $x \equiv \overline{d}_2$, (7) $x \equiv d_1 + d_2$, (8) $x \equiv d_1 + \overline{d}_2$, (9) $x \equiv \overline{d}_1 + d_2$, (10) $x \equiv \overline{d}_1 + \overline{d}_2$, (11) $x \equiv d_1 \cdot d_2$, (12) $x \equiv d_1 \cdot \overline{d}_2$, (13) $x \equiv \overline{d}_1 \cdot d_2$, (14) $x \equiv \overline{d}_1 \cdot \overline{d}_2$, (15) $x \equiv d_1 \cdot d_2 + \overline{d}_1 \cdot \overline{d}_2$, (16) $x \equiv d_1 \cdot \overline{d}_2 + \overline{d}_1 \cdot d_2$.

Dieser Satz enthält bereits die Lösung aller wichtigeren metamathematischen Probleme, die sich auf die Theorie der dichten Anordnung beziehen. In der Übersetzung in die Sprache des Systemenkalküls besagt er, dass die Klasse $\mathfrak{S}$ sechzehn verschiedene Systeme enthält; setzt man nämlich: $D_1 = Fl(\{d_1\})$ und $D_2 = Fl(\{d_2\})$, so sind das die Systeme: L, S, D_1, $\overline{D}_1$, D_2, $\overline{D}_2$, $D_1 \cdot D_2$, $D_1 \cdot \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 \cdot D_2$, $\overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2$, $D_1 \dotplus D_2$, $D_1 \dotplus \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 \dotplus D_2$, $\overline{D}_1 \dotplus \overline{D}_2$, $D_1 \cdot \overline{D}_2 + \overline{D}_1 \cdot D_2$ sowie $D_1 \cdot D_2 \dotplus \overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2$. Alle diese Systeme sind axiomatisierbar, der Gehaltsgrad und der Vollständigkeitsgrad eines jeden von ihnen ist offenbar endlich. Vier von den Systemen sind unzerlegbar: $D_1 \cdot D_2$, $D_1 \cdot \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 \cdot D_2$ und $\overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2$. Vier andere, die logischen Komplemente der vorhergenannten Systeme, sind vollständig: $\overline{D_1 \cdot D_2} = \overline{D}_1 \dotplus \overline{D}_2$, $\overline{D_1 \cdot \overline{D}_2} = \overline{D}_1 \dotplus D_2$, $\overline{\overline{D}_1 \cdot D_2} = D_1 \dotplus \overline{D}_2$ und $\overline{\overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2} = D_1 \dotplus D_2$; das charakteristische Paar der Theorie ist also (4, 0). Jedes System ist die Summe aller in ihm enthaltenen unzerlegbaren Systeme und zugleich das Produkt aller

---

[1]) Soweit mir bekannt ist, hat diese Methode zum ersten Mal Th. Skolem benützt in der Schrift: *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls...,* Videnskapsselskapets Skrifter, I Mat.-nat. Klasse, 1919, No. 3, S. 29 ff. Auf die Theorie der dichten Anordnung wurde diese Methode von C. H. Langford angewendet in dem Aufsatz: *Some theorems on deducibility,* Ann. of Math., Second Series, 28, 1927, S. 16—40. Die unten angegebenen Tatsachen, die diese Theorie betreffen, bilden die Ergänzung der Ergebnisse Langfords.

vollständigen Systeme, die es enthalten. Mit einem Wort: die Beziehungen zwischen den Systemen gestalten sich genau so, wie es in Satz 37 vorausgesehen wurde.

Die zweite Theorie, mit der wir uns beschäftigen werden, — die elementare Theorie der isolierten Anordnung — hat schon einen infinitistischen Charakter, und die Manigfaltigkeit ihrer Systeme ist unvergleichbar grösser. Bei einer flüchtigen Betrachtung unterscheidet sich diese Theorie nur unmerklich von der Theorie der dichten Anordnung: es treten in ihr dieselben Konstanten und Variablen auf, dieselben Ausdrücke nennen wir Aussagefunktionen und Aussagen, dieselben Operationen benützen wir bei der rekursiven Definitionen des Begriffes des logischen Satzes. Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir aus der Liste der logischen Axiome die Aussage c_4 fallen lassen und sie durch zwei Aussagen ersetzen:

$$c_5 = „\Pi a' \Pi a'' C R a' a'' N \Pi a''' C R a' a''' N \Pi a'''' C R a' a'''' N R a'''' a'''“$$

sowie

$$c_6 = „\Pi a' \Pi a'' C R a'' a' N \Pi a''' C R a''' a' N \Pi a'''' C R a'''' a' N R a''' a''''“;$$

diese zwei neuen Axiome drücken aus, dass jedes Ding, das — in der durch die Relation R festgelegten Anordnung — kein letztes, bzw. kein erstes Element ist, einen unmittelbaren Nachfolger, bzw. einen unmittelbaren Vorgänger hat[1]).

Um die Struktur der deduktiven Systeme im Bereich der Theorie der isolierten Anordnung zu untersuchen, zeichnen wir eine bestimmte Folge von Aussagen e_n aus; in der Übersetzung in die Umgangssprache drückt die Aussage e_n den Gedanken aus, dass es höchstens $n+1$ verschiedene Dinge gibt. Wir setzen:

$$e_1 = „\Pi a' \Pi a'' \Pi a''' C R a' a'' N R a'' a'''“,$$
$$e_2 = „\Pi a' \Pi a'' \Pi a''' \Pi a'''' C R a' a'' C R a'' a''' N R a''' a''''“$$

u. s. w.; man kann schon leicht erraten, wie die rekursive Definition der Folge e_n aussieht. Mit Hilfe dieser Folge sowie der Aussagen d_1 und d_2, von denen schon im Zusammenhang mit der Theorie der dichten Anordnung die Rede war, definieren wir eine neue Folge von Aussagen i_n, nämlich: $i_1 = d_1 \dotplus \overline{d_2}$, $i_2 = \overline{d_1} \dotplus d_2$, $i_3 = \overline{d_1} \dotplus \overline{d_2}$, $i_4 = \overline{e_1}$ und $i_n = e_{n-4} \dotplus \overline{e_{n-3}}$ für ein beliebiges natürliches $n \geqslant 5$. Der Inhalt der Aussagen i_1, i_2 und i_3 ist klar (die Aussage i_3 drückt z. B. aus,

[1]) Mit einer ähnlichen, aber spezielleren Theorie — nämlich mit der elementaren Theorie des Ordungstypus ω — beschäftigte sich Langford in dem Artikel: *Theorems on deducibility (second paper)*, Ann. of Math., Second Series, 28, 1927, S. 459—471.

dass in der durch die Relation R festgelegten Anordnung entweder ein erstes oder ein letztes Element vorkommt); die Aussagen i_4, i_5, i_6... stellen beziehungsweise fest, dass die Anzahl aller Dinge nicht genau gleich 2, 3, 4... ist.

Mit Hilfe der vorher erwähnten Methode (und zwar der sukzessiven Elimination der Operatoren)[1]) lässt sich folgender Satz beweisen, der eine entscheidende Bedeutung für die metamathematischen Untersuchungen über die Theorie der isolierten Anordnung hat:

Jede Aussage $x \in S$ erfüllt éine und nur éine der vier Bedingungen: (1) $x \,\dot{\in}\, L$; (2) $\bar{x} \in L$; (3) es gibt eine endliche wachsende Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2 \ldots, n_p$, so dass $x \equiv \prod\limits_{k=1}^{p} i_{n_k}$; (4) es gibt eine endliche wachsende Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2 \ldots, n_p$, so dass $x \equiv \sum\limits_{k=1}^{p} \overline{i_{n_k}}$. Dabei sind die Folgen $n_1, n_2 \ldots, n_p$, die in (3) und (4) auftreten, durch die Aussage x in eindeutiger Weise bestimmt.

Wir geben hier die wichtigsten Folgerungen dieses Satzes im Gebiete des Systemenkalküls an.

Setzen wir: $I_n = Fl(\{i_n\})$ für ein beliebiges natürliches n. Es zeigt sich, dass die Klasse aller Systeme I_n sich mit der Klasse $\mathfrak{U}$ deckt; da dabei zweien verschiedenen natürlichen Zahlen n und p immer zwei verschiedene Systeme I_n und I_p entsprechen, so gilt: $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} = \aleph_0$.

Die Klasse $\mathfrak{B}$ besteht aus allen Systemen $\overline{I_n}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl ist, sowie aus dem System $I_1 \dotplus I_2 \dotplus \ldots \dotplus I_n \dotplus \ldots$; dieses letzte System ist nichtaxiomatisierbar, während die übrigen axiomatisierbar sind. Daher gilt: $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}}} = \aleph_0$, $\overline{\overline{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}} = 1$, die betrachtete deduktive Theorie besitzt also das charakteristische Paar $(\aleph_0, 1)$.

Die Klasse $\mathfrak{A}$ enthält die Systeme L und S, sowie alle Systeme von der Form $I_{n_1} \dotplus I_{n_2} \dotplus \ldots \dotplus I_n$ und $\overline{I_{n_1}} \cdot \overline{I_{n_2}} \ldots \overline{I_{n_p}}$, wobei die natürlichen Zahlen $n_1, n_2 \ldots, n_p$ eine beliebige endliche wachsende Folge bilden; daraus folgt: $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \aleph_0$. Die Systeme der Form $I_{n_1} \dotplus I_{n_2} \dotplus \ldots \dotplus I_{n_p}$ haben eine endlichen Gehaltsgrad, der gleich ist 2^p, dagegen einen unendlichen Vollständigkeitsgrad, der gleich ist $2^{\aleph_0}$; wenn es sich um Systeme der Form $\overline{I_{n_1}} \cdot \overline{I_{n_2}} \cdot \ldots \cdot \overline{I_{n_p}}$ handelt, so verhält es sich umge-

[1]) Vgl. S. 293, Anm. [1]) (die Anwendung dieser Methode ist jedoch in dem jetzt betrachteten Fall nicht so einfach wie in dem vorhergehenden).

kehrt. Es ist zu bemerken, dass das System S und die Systeme der Form $\overline{I_{n_1}} \cdot \overline{I_{n_2}} \cdot \ldots \cdot \overline{I_{n_p}}$ die einzigen Systeme der Theorie der isolierten Anordnung sind, die sich nicht als Summen der in ihnen enthaltenen unzerlegbaren Systeme darstellen lassen.

Die Klasse $\mathfrak{S}-\mathfrak{A}$ besteht aus Systemen der Form

$$I_{n_1} \dot{+} I_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n_p} \dot{+} \ldots$$

wobei die Zahlen $n_1, n_2 \ldots, n_p \ldots$ eine beliebige unendliche wachsende Folge bilden; diese Systeme sind konvergent oder divergent je nach dem, ob die Anzahl der natürlichen Zahlen, die keine Glieder der Folge $n_1, n_2 \ldots, n_p \ldots$ sind, endlich ist oder nicht. Daraus $\overline{\overline{\mathfrak{T}}} = \overline{\overline{\mathfrak{T}-\mathfrak{A}}} = \aleph_0$, dagegen $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = \overline{\overline{\mathfrak{S}-\mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\mathfrak{S}-\mathfrak{T}}} = 2^{\aleph_0}$. Der Gehaltsgrad eines jeden Systems der Klasse $\mathfrak{S}-\mathfrak{A}$ ist gleich $2^{\aleph_0}$. Ist $X = I_{n_1} \dot{+} I_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n_p} \dot{+} \ldots$ ein konvergentes System, so gilt $\overline{X} = I_{m_1} \dot{+} I_{m_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{m_q}$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{I_{m_1}} \cdot \overline{I_{m_2}} \cdot \ldots \overline{I_{m_q}}$, wobei $m_1, m_2, \ldots, m_q$ alle (von einander verschiedenen) natürlichen Zahlen sind, die in der Folge $n_1, n_2 \ldots, n_p \ldots$ nicht auftreten; der Vollständigkeitsgrad eines solchen Systems X ist gleich 2^{q+1}. Ist aber $X = I_{n_1} \dot{+} I_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n_p} \dot{+} \ldots$ ein divergentes System, so ist $\overline{X} = I_{m_1} \dot{+} I_{m_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{m_q} \dot{+} \ldots$, wobei $m_1, m_2 \ldots, m_q \ldots$ eine unendliche wachsende Folge aller derjenigen natürlichen Zahlen ist, die in der Folge $n_1, n_2 \ldots, n_p \ldots$ nicht auftreten; ferner gilt: $\overline{\overline{X}} = I_{n_1} \dot{+} I_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n_p} \dot{+} \ldots$, das System X erfüllt also den Satz von der doppelten Negation. Der Vollständigkeitsgrad des divergenten Systems X ist unendlich, gleich $2^{\aleph_0}$.

Mit einem Wort, wir haben hier genau den Fall, der im Satze 39 vorgesehen und beschrieben wurde.

Wir kennen viele Beispiele anderer deduktiver Theorien, deren charakteristisches Paar $(\aleph_0, 1)$ ist und die — im Sinne der Schlussbemerkungen des § 4 — denselben strukturellen Typus besitzen, wie die elementare Theorie der isolierten Anordnung. Eine besonders einfache Theorie dieser Art ist die elementare Theorie der Identität. Ihr Bau ist den beiden vorhergehenden Theorien sehr ähnlich, der Unterschied besteht nur darin, dass man in das System der logischen Axiome, statt der Aussagen $c_1, c_2 \ldots, c_6$, nur zwei Aussagen aufnimmt:

$$„\Pi a' R a' a'“ \quad \text{und} \quad „\Pi a' \Pi a'' \Pi a''' C R a' a'' C R a' a''' R a'' a'''“$$

die zusammen R als eine reflexive, symmetrische und transitive Relation charakterisieren. Das Symbol „R“ können wir hier Identitätszeichen nennen, die Formel „$R a' a''$“ lesen wir „*a' ist identisch mit a''*“. Alle Ergebnisse betreffs der Theorie der isolierten Anordnung, lassen sich auch auf die Theorie der Identität ausdehnen, unter der Bedingung, dass man die Folge der Aussagen i_n entsprechend definiert. Es ist nicht schwer, die Definition dieser Folge zu formulieren: die Aussagen $i_1, i_2, i_3 \ldots$ sollen beziehungsweise den Gedanken ausdrücken, dass die Anzahl aller Gegenstände nicht genau gleich ist $1, 2, 3 \ldots$; wir können z. B. annehmen:

$$i_1 = „N \Pi a' \Pi a'' R a' a''“,$$
$$i_2 = „\Pi a' \Pi a'' C \Pi a''' C N R a' a''' R a'' a''' R a' a''“ \quad \text{u. s. w.}$$

Wir erwähnen noch eine Theorie von demselben strukturellen Typus, nämlich die atomistische Algebra der Logik[1]). Es unterscheidet sie wiederum nur ein Umstand von den vorher betrachteten Theorien: eine andere Liste der logischen Axiome. Das Symbol „R“ nennen wir — in Bezug auf diese Theorie — das Zeichen der Inklusion, die Formel „$R a' a''$“ lesen wir jetzt „*das Ding a' steht zu dem Ding a'' in Beziehung der Inklusion*“ oder „*das Ding a' ist in dem Ding a'' enthalten*“. Als logische Axiome der Theorie nehmen wir — ausser den Aussagefunktionen, die durch Einsetzung in die Axiome des Aussagenkalküls gewonnen werden können, — Aussagen an, die zur Begründung des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik ausreichen (die aber mit Hilfe des Zeichens der Inklusion als des einzigen Grundbegriffes formuliert sind[2])) und überdies einen Zusatz: $l = „\Pi a' C \Pi a'' C R a'' a' N \beta \Pi a'' R a' a''“$, wobei β eine Abkürzung der Aussagefunktion

$$„N C \Pi a''' C N \Pi a'' R a''' a'' C R a''' a'' R a'' a''' \Pi a''' R a'' a'''“$$

ist; „β“ drückt aus, dass Ding a'' ein Atom ist (ein unzerlegbares Ding), d. h. ein solches nichtleeres Ding, welches kein von sich ver-

---

[1]) Vgl. T_5, S. 191 ff. (hier jedoch haben wir im Auge eine solche atomistische Theorie der Algebra der Logik, in der unendliche Operationen nicht auftreten). Die strukturellen Eigenschaften der betrachteten Theorie lassen sich aus den Überlegungen Skolems ableiten, von denen in der Anm. [1]), S. 293 die Rede war. Die wichtigsten metamathematischen Sätze, die die atomistische Algebra der Logik betreffen, gab ich an in T_6, S. 318—327 (dort aber behandelte ich das Problem unter einem ganz anderen Gesichtspunkt als hier).

[2]) Vgl. E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Trans. of the Am. Math. Soc. 5, 1904, S. 297; T_6, S. 295—296.

schiedenes nichtleeres Ding enthält, und die Aussage l stellt fest, dass jedes nichtleere Ding wenigstens ein Atom enthält. Die Definition der Folge i_n für die atomistische Algebra der Logik ist der entsprechenden Definition für die elementare Identitätstheorie ähnlich: die Aussage i_n drückt aus, dass die Anzahl aller Atome nicht genau gleich n ist.

Schliesslich geben wir Beispiele deduktiver Theorien von höheren strukturellen Typen an. Wenn wir in dem Axiomensystem der atomistischen Algebra der Logik die Aussage l durch die logisch schwächere Aussage l_1 ersetzen, die nur soviel ausdrückt, dass unter den Dingen, die alle Atome enthalten, ein kleinstes Ding vorhanden ist ($l_1 =$ „$N\,\Pi a' C\, \Pi a'' C \beta R a'' a' N\, \Pi a''' C\, \Pi a'' C \beta R a'' a''' R a' a'''$", wobei „$\beta$" die frühere Bedeutung hat), so erhalten wir ein Beispiel einer Theorie mit dem charakteristischen Paar $(\aleph_0, 2)$. Wenn wir aus dem Axiomensystem der Theorie der dichten Anordnung die Aussage c_4 streichen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus dem Axiomensystem der Theorie der isolierten Anordnung die Aussagen c_5 und c_6) und auf diese Weise zur allgemeinen elementaren Theorie der Anordnung übergehen, so wird die Struktur der Theorie ungeheuer komplizierter: die Theorie der dichten Anordnung besitzt einen von den einfachsten strukturellen Typen, die allgemeine Theorie der Anordnung hat einen sehr zusammengesetzten Typus, ihr charakteristisches Paar ist das grösste, nämlich gleich $(\aleph_0, 2^{\aleph_0})$. Lassen wir noch aus dem Axiomensystem der allgemeinen Theorie der Anordnung die Aussagen c_1, c_2 und c_3 weg: wir gewinnen eine neue Theorie mit dem charakteristischen Paar $(\aleph_0, 2^{\aleph_0})$, nämlich die allgemeine elementare Theorie einer zweigliedrigen Relation. Diese Theorie umfasst gewissermassen alle vorher betrachteten Theorien, im Rahmen der Untersuchungen über diese Theorie finden alle in diesem Paragraphen skizzierten Betrachtungen ihren Platz. So z. B. kann man alle Ergebnisse, die beliebige deduktive Systeme der Theorie der dichten Anordnung betreffen, als Ergebnisse auffasen, die sich auf solche Systeme der allgemeinen Theorie der zweigliedrigen Relation beziehen, welche das System $A = Fl(\{c_1, c_2, c_3, c_4\})$ enthalten.

Anhang.

Trotz ihres elementaren Charakters ziehen die in § 5 angegebenen Ergebnisse eine Reihe von interessanten Folgerungen nach sich, die weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausgreifen. Ich will hier — übrigens in sehr flüchtiger und nicht allzu präziser Weise — einige dieser Folgerungen besprechen.

Es sei α ein beliebiger Ordnungstypus [1]). Betrachten wir eine beliebige Menge X und eine beliebige Relation R, die diese Menge nach dem Typus α ordnet. Nehmen wir an, dass die Variablen „a'", „a''", „a'''..." die in der elementaren Theorie der Anordnung auftreten, ausschliesslich die Elemente der Menge X bezeichnen, und lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Menge aller jener Aussagen der Theorie der Anordnung, die bei der angegebenen Interpretation der Variablen inhaltlich wahr sind. Es ist nicht schwer einzusehen, dass diese Menge weder von der Menge X, noch von der Beziehung R abhängt, sondern ausschliesslich vom Ordnungstypus α; deswegen bezeichnen wir sie mit dem Symbol „$W(\alpha)$". Man kann zeigen, dass — für einen beliebigen Ordnungstypus α — die Menge $W(\alpha)$ ein vollständiges deduktives System ist.

Die Formel: $W(\alpha) = W(\beta)$ drückt aus, dass alle Eigenschaften der Ordnungstypen α und β, die sich in der Sprache der elementaren Theorie der Anordnung formulieren lassen, identisch sind; deswegen nennen wir die Typen α und β, die diese Formel erfüllen, elementar ununterscheidbar oder elementar äquivalent.

Aus dem bekannten Skolem-Löwenheimschen Satze [2]) ergibt sich, dass jeder Ordnungstypus elementar äquivalent ist mit einem höchstens abzählbaren Ordnungstypus. Daraus folgt: jede Klasse von Ordnungstypen, von denen nicht zwei elementar äquivalent sind, kann höchstens die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ haben, denn dies ist die Mächtigkeit der Klasse aller abzählbaren Typen (man kann das auch einfacher beweisen, ohne den Skolem-Löwenheimschen Satz anzuwenden). Andrerseits ist es nicht schwer, eine Klasse von elementar unterscheidbaren (nicht äquivalenten) Ordnungstypen zu konstruieren, deren Mächtigkeit tatsächlich $2^{\aleph_0}$ ist (bei der Konstruktion nehmen wir den Beweis des erwähnten Satzes der Mengenlehre zum Vorbild, nach dem die Klasse der abzählbaren Ordnungstypen die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat [3])).

---

[1]) Die unten angegebenen Bemerkungen betreffen die Ordnungsrelationen; man kann sie aber auf beliebige Relationen erweitern. Statt von Ordnungstypen muss man dann von Relationszahlen im Sinne von A. N. Whitehead und B. Russell (*Principia Mathematica*, 2 Ed., Vol. II, Cambridge 1927, S. 30 ff.) sprechen.

[2]) Vgl. z. B. Th. Skolem, *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*, Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Mat.-nat. Klasse, 1929, No. 4, S. 23 ff.

[3]) Vgl. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, S. 49 f.

Wenn wir uns auf die dichten Ordnungstypen beschränken, so kommen wir zu dem Ergebnis, dass nur vier solche elementar nicht-äquivalente Ordnungstypen bestehen können: die Menge $W(\alpha)$ ist ja immer ein vollständiges System, und in der elementaren Theorie der dichten Anordnung treten nur vier vollständige Systeme auf. Als ein Beispiel von vier dichten, elementar nicht-äquivalenten Ordnungstypen können die Typen η, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$ dienen, wobei „η", wie gewöhnlich, den Typus der natürlichen Anordnung der Menge aller rationalen Zahlen bezeichnet. Verwendet man die Symbole, die bei der Betrachtung der Theorie der dichten Anordnung eingeführt wurden, so kann man zeigen, dass $W(\eta)=D_1\dot{+}D_2$, $W(1+\eta)=D_1\dot{+}\overline{D}_2$, $W(\eta+1)=\overline{D}_1\dot{+}D_2$ und $W(1+\eta+1)=\overline{D}_1\dot{+}\overline{D}_2$ ist. Jeder andere Typus der dichten Anordnung ist einem von den vier aufgezeigten Typen elementar äquivalent. So z. B. haben wir für den Typus λ der natürlichen Anordnung der Menge aller reellen Zahlen: $W(\lambda)=W(\eta)$. Nichtsdestoweniger unterscheiden sich die Typen η und λ in einer ganzen Reihe von Eigenschaften: η ist ein abzählbarer Typus, λ nicht; λ ist ein stetiger Typus, η nicht. Daraus folgt: solche Eigenschaften der Ordnungstypen wie die Abzählbarkeit und die Stetigkeit sind in dem Sinne nicht elementare Eigenschaften, dass sie sich in der Sprache der elementaren Theorie der Anordnung nicht ausdrücken lassen (wenn es um die Abzählbarkeit geht, so folgt dies ebenso aus dem zitierten Satze von Skolem-Löwenheim).

Auf ähnliche Weise kommen wir zu dem Ergebnis, dass es nur eine abzählbare Anzahl von isolierten Ordnungstypen geben kann (d. h. solcher, in denen keine eigentlichen Schnitte, sondern nur Sprünge und Lücken vorkommen), von denen nicht zwei elementar äquivalent sind. Betrachten wir, in der Tat, die Klasse, die aus allen endlichen Typen, sowie aus den Typen ω, ω^*, $\omega^*+\omega$ und $\omega+\omega^*$ besteht, wobei „ω", wie immer, den Ordnungstypus der Relation des Kleinerseins im Bereiche der natürlichen Zahlen bezeichnet. Wir überzeugen uns leicht, dass nicht zwei Typen dieser Klasse elementar äquivalent sind. Dabei kann man zeigen, dass

$$W(\omega^*)=\overline{I}_1,\quad W(\omega)=\overline{I}_2,\quad W(\omega^*+\omega)=\overline{I}_3,\quad W(n)=\overline{I_{n+2}}$$

für ein beliebiges natürliches $n\geqslant 2$ gilt und schliesslich dass

$$W(\omega+\omega^*)=I_1\dot{+}I_2\dot{+}\ldots\dot{+}I_n\dot{+}\ldots;$$

da auf diese Weise alle vollständigen Systeme der Theorie der isolierten Anordnung erschöpft sind (vgl. § 5), so muss jeder andere isolierte Ordnungstypus mit einem von den betrachteten Typen elementar äquivalent sein. So z. B. ${}_{\mathfrak{s}}W(\omega)=W(\omega+\omega^*+\omega)$; andrerseits ist ω der Typus einer wohlgeordneten Menge, $\omega+\omega^*+\omega$ aber nicht. Daraus folgt: die Wohlordnung ist keine elementare Eigenschaft der Ordnungstypen, sie lässt sich in der elementaren Theorie der Anordnung nicht ausdrücken.

Wie es scheint, eröffnet sich hier ein neues, weites Untersuchungsgebiet. Es ist vielleicht interessant, dass man diese Untersuchungen im Rahmen der Mathematik selbst (z. B. der Mengenlehre) durchführen kann und dass hier im Grunde der Begriffs- und Methodenapparat der Metamathematik nicht erforderlich ist: alle Begriffe, die in diesen Untersuchungen vorkommen (z. B. der Begriff der elementaren Eigenschaft eines Ordnungstypus oder der Begriff der elementar ununterscheidbaren Ordnungstypen) lassen sich in rein mathematischen Termen definieren [1]).

Bemerkung. In der vorliegenden Arbeit habe ich Ergebnisse zusammengestellt, die zu verschiedenen Zeiten gewonnen wurden.

Die Ergebnisse, die in den §§ 1—4 enthalten sind, stammen grösstenteils aus den Jahren 1930—32. Ich habe darüber am 6. X. 1933 in der Warschauer Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft in einem Vortrag u. d. T.: *Über die Grundlagen der Methodologie der deduktiven Wissenschaften* berichtet (vgl. Ann. de la Soc. Pol. de Math. 13, 1935, S. 127; vgl. auch hierzu die Abhandlung von S. Mazurkiewicz: *Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 41, 1934, S. 343—352, in der — in Anlehnung an den Systemenkalkül — eine neue Methode zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt wird).

Die Betrachtungen des § 5 habe ich bereits in den Jahren 1926—28 durchgeführt, ohne selbstverständlich den Apparat des Systemenkalküls zu verwenden, über den ich damals noch nicht verfügte (vgl. T_6, S. 324, Anm. [53]), sowie den dort zitierten Aufsatz von M. Presburger). In derselben Zeit bin ich mir auch der im Anhang angegebenen Tatsachen bewusst worden; erst aber mit Hilfe der Methoden, die in T_3 und T_6 entwickelt wurden und die aus den Jahren 1929—30 stammen, vermochte ich diese Tatsachen in eine korrekte und präzise Form zu fassen. Die im Anhang besprochenen Tatsachen samt anderen Ergebnissen von verwandtem Charakter wurden von mir am 9. XII 1932 in einem in der Warschauer Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag u. d. T.: *Über die elementaren Eigenschaften der Relationen* mitgeteilt (vgl. Ann. de la Soc. Pol. de Math. 12, 1934, S. 124).

[1]) Zu diesem Zwecke genügt es die Methode anzuwenden, die ich in T_3 entwickelt habe.