Un théorème de dualité.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

La démonstration du théorème de dualité de M. J. W. Alexander repose sur le lemme suivant: *étant donné dans l'espace euclidien à n dimensions R_n un polyèdre W et un cycle k-dimensionnel C de W, non homologue à 0 dans W, il existe un cycle (n—k—1)-dimensionnel C' de $R_n - W$ dont le coefficient d'enlacement avec C est* $\neq 0$. Le but de cette Note est de démontrer un énoncé analogue pour les espaces compacts arbitraires, en remplaçant la méthode combinatoire par celle des transformations continues en sphère euclidienne S_k à k dimensions.

I. *Théorème 1.* *Soit X un sous-ensemble fermé d'un espace compact Y et* $\dim(Y-X) \leqslant n$. *Il existe alors, pour toute transformation* $f \in S_k^X$ $(k<n)$, *un sous-ensemble fermé P de* $Y-X$ *tel que* $\dim P \leqslant n-k-1$ *et que f admet une extension* $f' \in S_k^{Y-P}$.

Si, en outre, $Y-X$ *est un polytope infini, P peut être supposé un polyèdre.*

Démonstration. Soit $f_1 \in Q_{k+1}^Y$ [1]) une fonction telle que $f_1(x)=f(x)$ pour $x \in X$. On déduit facilement d'un théorème de M. W. Hurewicz [2]) l'existence d'une autre transformation $f_2 \in Q_{k+1}^Y$ telle que l'on ait $f_2(x)=f_1(x)=f(x)$ pour $x \in X$ et $\dim[f_2^{-1}(y)] \leqslant n-(k+1)$ pour tout $y \in Q_{k+1}-S_k$. Posons $P=f_1^{-1}(0)$. On a donc $\dim P \leqslant n-k-1$ et pour obtenir l'extension $f' \in S_k^{Y-P}$ de $f \in S_k^X$, on n'a qu'à poser

$$f'(x)=\frac{f_2(x)}{|f_2(x)|} \quad \text{pour} \quad x \in Y-P.$$

[1]) Q_{k+1} désigne le sous-ensemble fermé et borné de R_{k+1} ayant pour frontière la surface sphérique S_k de centre 0 et de rayon 1.

[2]) Sitzungsber. Preuss. Akad. 1933, p. 754—768, Anhang.

Dans le cas où $Y-X$ est un polytope infini, on peut admettre que la transformation f_2 est simpliciale sur $Y-X$. L'ensemble P est alors un polyèdre.

Théorème 2. *Soit X un sous-ensemble fermé d'un espace compact Y,* $\dim(Y-X) \leqslant n$ *et l'espace* S_k^X $(k<n)$ *non connexe. Il existe alors un sous-ensemble fermé P de* $Y-X$ *tel que* $\dim P \leqslant n-k-1$ *et que X n'est pas contractile dans* $Y-P$.

Si, en outre, $Y-P$ *est un polytope infini, P peut être supposé un polyèdre.*

Démonstration. Soit $f \in S_k^X$ une transformation essentielle. Déterminons P et f' selon le th. 1. Si X était contractile dans $Y-P$, la transformation f' serait inessentielle sur X. Il en serait donc de même de f (qui coïncide avec f' sur X), contrairement à l'hypothèse.

II. Remarques. 1⁰ Dans le cas où $k \geqslant n$, on peut [3]) poser $P=0$ dans le th. 1 et par conséquent aussi dans le th. 2.

2⁰ Dans le cas où Y est un polyèdre, $Y-X$ est toujours un polytope infini, de sorte que dans le th. 1 et 2 l'ensemble P peut être supposé un polyèdre.

3⁰ Il serait intéressant de savoir si les ensembles X et P se laissent contracter simultanément dans Y d'une manière que leurs positions à chaque instant soient disjointes.

La réponse positive conduirait à une démonstration élémentaire de la propriété caractéristique de sous-ensembles k-dimensionnels X de l'espace euclidien R_n (l'ainsi dit „Rechtfertigungssatz für die Brouwersche Dimension"), qui a été établie par M. P. Alexandroff [4]) à l'aide de la théorie d'homologie. Le problème d'une telle démonstration a été posé par M. S. Mazurkiewicz.

III. Application. Le th. 2 implique une démonstration particulièrement courte du théorème suivant de M. K. Borsuk [5]):

Pour tout ensemble fermé $X \subset S_n \neq X$ *qui ne coupe pas* S_n, *l'espace* S_{n-1}^X *est connexe.*

[3]) W. Hurewicz. Fund. Math. 24 (1935), p. 146.

[4]) Math. Ann. 106 (1932), p. 211.

[5]) Math. Ann. 106 (1932), p. 239—248, où ce théorème est énoncé sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante, la suffisance étant démontrée antérieurement par le même auteur dans les Monatshefte für Math. u. Phys. 38 (1931), p. 381—386: cf. aussi Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Springer, Berlin 1935, p. 405—408.

Supposons, en effet, que S_{n-1}^{X} ne soit pas connexe. Il existe alors un polyèdre 0-dimensionnel (c. à d. ensemble fini) $P \subset S_n - X$, tel que X n'est pas contractile dans $S_n - P$. L'ensemble $S_n - X$ étant connexe et ouvert, il existe donc une ligne simple polygonale L telle que $P \subset L \subset S_n - X$. A plus forte raison X n'est pas contractile dans $S_n - L$. Or, c'est impossible, puisque $S_n - L$ est évidemment homéomorphe à R_n.

Grundzüge des Systemenkalküls.

Zweiter Teil*).

Von

Alfred Tarski (Warschau).

§ 4. Die unzerlegbaren und die vollständigen Systeme.

Auf Grund des Systemenkalküls kann man gewisse Sätze tieferer Natur begründen, die die Mächtigkeit und die Struktur verschiedener Arten von deduktiven Systemen betreffen; in den Formulierungen und Beweisen der eben genannten Sätze kommen zwei Begriffe vor, die wir bis jetzt nicht benutzt haben, nämlich der Begriff eines unzerlegbaren (irreduziblen) und der eines vollständigen (gesättigten) Systems. Wir bezeichnen die Klasse der unzerlegbaren Systeme mit dem Symbol „$\mathfrak{U}$", die der vollständigen mit dem Symbol „$\mathfrak{V}$"[1]). Die Definitionen dieser beiden Begriffe sind völlig analog:

Definition 12. $X \in \mathfrak{U}$ *dann und nur dann, wenn* $X \neq L$ *und wenn für ein beliebiges System* $Y \in \mathfrak{S}$, *für das* $Y \subset X$ *ist, gilt:* $Y = L$ *oder* $Y = X$ *(m. a. W. wenn* $\mathfrak{S}^X = \{L, X\}$*).*

Definition 13. $X \in \mathfrak{V}$ *dann und nur dann, wenn* $X \in \mathfrak{S}$, $X \neq S$ *und wenn für ein beliebiges System* $Y \in \mathfrak{S}$, *für das* $X \subset Y$ *ist, gilt:* $Y = S$ *oder* $Y = X$ *(m. a. W. wenn* $\mathfrak{S}_X = \{S, X\}$*).*

---

*) S. »*Fundamenta Mathematicae*«, Bd. XXV, S. 503—526.

[1]) Mit dem Begriff der Vollständigkeit habe ich mich schon in meinen früheren Arbeiten befasst (vgl. T_1, S. 26, Def. 4; T_2, S. 390 ff., insbesondere Def. I. 7); hier aber wird der Begriff in einem etwas veränderten Sinne gebraucht, da (1) er ausschliesslich auf deduktive Systeme und nicht auf beliebige Aussagenmengen angewendet wird und da (2) nur jene deduktiven Systeme als vollständig bezeichnet werden, die — in der alten Terminologie — zugleich vollständig und widerspruchsfrei sind. Der Begriff des unzerlegbaren Systems ist hier zum ersten Mal eingeführt worden (das Symbol „$\mathfrak{U}$" habe ich früher, z. B. in T_1 und T_2, in einem anderen Sinne verwendet).