Über die Definition der Primenden.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Carathéodory hat im Jahre 1912 den Begriff der *Primenden* eines ebenen, beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebietes eingeführt; die Primenden sind nach seiner Darstellung axiomatisch definierte Gebilde, die „in gewisser Hinsicht einen Ersatz für die Punkte des Randes bilden“ [1]).

Ich werde zeigen, dass man die Primenden *durch geeignete Metrisation des vorliegenden Gebietes und Anwendung des bekannten Cantor-Meray-Hausdorff'schen Verfahrens* erhalten kann. Dass dies möglich ist, folgt unmittelbar aus den Hauptsatz von Carathéodory über das Verhalten der Primenden bei konformer Abbildung [2]): man braucht ja nur das Gebiet auf den Einheitskreis konform abzubilden und die Metrik des Einheitskreises auf dasselbe zu verpflanzen. Das Problem besteht also darin, die geeignete Metrik des Gebietes rein mengentheoretisch zu definieren.

§ 1. Die „Primendenmetrik“.

Wir bezeichnen die Ebene mit R_2, die euklidische Metrik mit (ϱ). Sei G ein ebenes, beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei (ϱ') irgend eine in G definierte und mit (ϱ) *äquivalente* Metrik [3]).

[1]) Carathéodory: Math. Ann. 73 (1913) S. 323—370.

[2]) Carathéodory: l. c. S. 344—351.

[3]) Zwei Metriken (ϱ) und (ϱ') eines Raumes R sind äquivalent, wenn für $x_0 \in R$, $x_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$ aus $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_0, x_n) = 0$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho'(x_0, x_n) = 0$ folgt und umgekehrt.

Durch Anwendung des Cantor-Meray-Hausdorff'schen Verfahrens [4]) *auf das Gebiet G, aufgefasst als metrischer Raum mit der Metrik (ϱ'), entsteht ein vollständiger Raum $\Gamma(G, \varrho')$.* Wir setzen: $\Delta(G, \varrho') = \Gamma(G, \varrho') - G$. Die Beschaffenheit von $\Gamma(G, \varrho')$ und $\Delta(G, \varrho')$, welches einen „Ersatz de Randes“ bildet, ist natürlich von (ϱ') abhängig. Z. B. wenn $(\varrho') = (\varrho)$, d. h. wenn (ϱ') die euklidische Metrik ist, so hat man: $\Gamma(G, \varrho') = \overline{G}$ und $\Delta(G, \varrho')$ ist der gewöhnliche Rand; ist (ϱ') die relative Metrik von G [5]), so gibt $\Delta(G, \varrho')$ die erreichbaren Punkte des Randes. Wir wollen eine mit (ϱ) äquivalente *„Primendenmetrik“* (ϱ_π) konstruiren, so dass sich $\Delta(G, \varrho_\pi)$, mit der Menge der Primenden von G identifizieren lässt. Ist $z \in R_2$, $\lambda > 0$, so bezeichnen wir mit $K(z, \lambda)$ das Innere des Kreises mit Mittelpunkt z und Radius λ.

Sei $a \in G$ ein fester Punkt, $0 < 3\beta < \varrho(a, \overline{G} - G)$; wir setzen:

$$(1)\qquad G_0 = G - K(a, 3\beta); \qquad G_1 = G - K(a, 2\beta); \qquad G_2 = G - K(a, \beta).$$

Definition. *Sei $z_j \in G_1$, $j = 1, 2$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}(z_1, z_2)$ die Klasse aller Punktmengen H mit folgenden Eigenschaften:*

(A_1) $H \subset G_2$

(A_2) *H ist zusammenhängend und abgeschlossen in G (also ein Kontinuum rel. G).*

(A_3) *z_1 und z_2 liegen in derselben Komponente von $G - H$.*

(A_4) *a und z_1 liegen in verschiedenen Komponenten von $G - H$.*

Definition der Primendenmetrik. *Für $z_i \in G_1$, $i = 1, 2$ setzen wir:*

$$(2)\qquad \varrho_\pi(z_1, z_2) = \operatorname{Inf} \delta(H), \qquad H \in \mathfrak{H}(z_1, z_2).$$

Hilfssatz 1. *Zu jedem $z_1 \in G_1$ existiert ein $\eta_1 > 0$ derart, dass aus*

$$(3)\qquad z_2 \in G_1, \qquad \varrho(z_1, z_2) < \eta_1$$

folgt

$$(4)\qquad \varrho(z_1, z_2) = \varrho_\pi(z_1, z_2).$$

[4]) Vgl. z. B. Kuratowski: *Topologie I*, (1933) S. 200—202.

[5]) Die relative Metrik von G ist definiert durch $\varrho'(z_1, z_2) = \operatorname{Inf} \delta(C)$, wo C alle Kontinua durchläuft, die in G enthalten sind und z_1, z_2 enthalten.

Sei $C \subset G$ ein Kontinuum, welches z_1 und a enthält; wir bestimmen die positive Zahl η_1 so, dass sie die Ungleichung erfüllt:

$$(5) \qquad 2\beta > \eta_1 < \varrho(C, \overline{G} - G).$$

Wir bezeichnen mit $\overline{z_1 z_2}$ die geradlinige Strecke mit Endpunkten z_1, z_2 Ist $\lambda > 0$, so sei H_λ die Menge der Punkte z für die $\varrho(z, \overline{z_1 z_2}) = \lambda$. Wenn (3) erfüllt ist und $\lambda < \eta_1 - \varrho(z_1, z_2)$ so ist $H_\lambda \in \mathfrak{H}(z_1, z_2)$, also:

$$(6) \qquad \varrho_\pi(z_1, z_2) \leqq \delta(H_\lambda) = \varrho(z_1, z_2) + 2\lambda$$

und, da λ beliebig klein:

$$(7) \qquad \varrho_\pi(z_1, z_2) \leqq \varrho(z_1, z_2).$$

Aus (3) folgt also (7). Somit folgt aus (3) $\varrho_\pi(z_1, z_2) < \eta_1$. Ist $\mu > 0$, so existiert demnach ein $H' \in \mathfrak{H}(z_1, z_2)$ mit der Eigenschaft:

$$(8) \qquad \eta_1 > \delta(H') < \varrho_\pi(z_1, z_2) + \mu.$$

H' zerschneidet G zwischen a und z_1, also $H'C \neq 0$; wegen (8) ist aber $\delta(H') < \varrho(C, \overline{G} - G)$ und daher $\overline{H}'(\overline{G} - G) = 0$. Also $H' = \overline{H}'$ und H' zerschneidet R_2 zwischen a und z_1. Seien U_1, U_2 diejenigen Komponenten von $R_2 - H'$, welche a, beziehungsweise z_1 enthalten. Dann ist $K(a, \beta) \subset U_1$, also $\delta(U_1) \geqq 2\beta > \eta_1 > \varrho(z_1, z_2)$ und $z_2 \subset U_2$, also auch $\delta(U_2) > \varrho(z_1, z_2)$. Mindestens eines der Gebiete U_1, U_2 ist beschränkt, denn H' ist beschränkt. H' bestimmt also in der Ebene ein beschränktes Gebiet vom Durchmesser $> \varrho(z_1, z_2)$. Folglich:

$$(9) \qquad \varrho(z_1, z_2) < \delta(H') < \varrho_\pi(z_1, z_2) + \mu$$

und, da μ beliebig positiv ist: $\varrho(z_1, z_2) \leqq \varrho_\pi(z_1, z_2)$, was zusammen mit (7) die Gleichheit (4) ergibt. Der Hilfssatz ist also bewiesen.

(2) *definiert eine Metrik in* G_1. Offenbar ist $\varrho_\pi(z_1, z_2)$ symmetrisch in Bezug auf z_1, z_2 und verschwindet nach dem Hilfssatz dann und nur dann, wenn $z_1 = z_2$. Man braucht also nur die Dreiecksungleichung zu beweisen. Sei $z_i \in G_1$, $i = 1, 2, 3$; $\eta > 0$. Wir können $H_1 \in \mathfrak{H}(z_1, z_2)$ und $H_2 \in \mathfrak{H}(z_2, z_3)$ so bestimmen, dass:

$$(10) \qquad \varrho_\pi(z_1, z_2) + \frac{\eta}{2} > \delta(H_1), \qquad \varrho_\pi(z_2, z_3) + \frac{\eta}{2} > \delta(H_2).$$

Sei V_1 die Komponente von $G - H_1$, die z_1 und z_2 enthält, V_2 die Komponente von $G - H_2$, die z_2 und z_3 enthält. Dann ist $V = V_1 + V_2$ ein zusammenhängendes Teilgebiet von G, welches z_1 und z_2 enthält. Man hat: $a \in (G - \overline{V}_1)(G - \overline{V}_2) = G - \overline{V}$. Sei W die Komponente von $G - \overline{V}$, welche a enthält, und $H_3 = G(\overline{W} - W)$. H_3 ist abgeschlossen in G und zusammenhängend, denn ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet genügt, als Raum betrachtet, bekanntlich dem Phragmén-Brouwerschen Theorem. Es ist weiter:

$$(11) \qquad H_3 \subset G(\overline{V} - V) \subset G(\overline{V}_1 - V_1) + G(\overline{V}_2 - V_2) \subset H_1 + H_2 \subset G_2.$$

Offenbar zerschneidet H_3 das Gebiet G zwischen z_1 und a, nicht aber zwischen z_1 und z_3. Somit ist $H_3 \in \mathfrak{H}(z_1, z_3)$.

Wenn $H_1 H_2 \neq 0$, so ist $\delta(H_1 + H_2) \leqq \delta(H_1) + \delta(H_2)$ und daher

$$(12) \qquad \delta(H_3) \leqq \delta(H_1) + \delta(H_2).$$

Wenn aber $H_1 H_2 = 0$, so ist (12) erst recht erfüllt, denn H_3 ist zusammenhängend, muss also in diesem Fall entweder in H_1 oder in H_2 enthalten sein. Aus (10), (12) folgt:

$$(13) \qquad \varrho_\pi(z_1, z_3) \leqq \delta(H_3) < \varrho_\pi(z_1, z_2) + \varrho_\pi(z_2, z_3) + \eta$$

und, da η beliebig positiv:

$$(14) \qquad \varrho_\pi(z_1, z_3) \leqq \varrho_\pi(z_1, z_2) + \varrho_\pi(z_2, z_3),$$

d. h. die Dreiecksungleichung.

Die Metrik (ϱ_π) *ist mit der euklidischen äquivalent in* G_1. Dies folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz.

Die Metrik (ϱ_π) ist einstweilen nur für G_1 definiert. Nach einem von Hausdorff[6]) angegebenen Verfahren kann man sie auf G erweitern, so dass sie in G mit (ϱ) äquivalent bleibt. Übrigens ist für jede mit (ϱ) in G äquivalente Metrik (ϱ'): $\Delta(G, \varrho') = \Delta(G_1, \varrho') = \Delta(G_0, \varrho')$, so dass man sich auf die Betrachtung von $\Delta(G_1, \varrho_\pi)$ oder $\Delta(G_0, \varrho_\pi)$ beschränken kann.

Bemerkung. Man darf, ohne Veränderung der Primendenmetrik, die Bedingung (A_2) durch die engere: H *ist Querschnitt oder Rückkehrschnitt von* G, oder durch die weitere: H *ist abgeschlossen in* G ersetzen.

[6]) Fund. Math. XVI S. 353—360.

§ 2. Die relative Primendenmetrik.

Definition. *Der Durchmesser einer Menge $Z \subset G$ in der Primendenmetrik ist definitionsgemäss:*

(15) $$\delta_\pi(Z) = \operatorname{Sup} \varrho_\pi(z_1, z_2) \qquad z_1 \in Z,\ z_2 \in Z.$$

Definition. *Die Relative Primendenmetrik wird definiert durch:*

(16) $$\varrho^*_\pi(z_1, z_2) = \operatorname{Inf} \delta_\pi(C),$$

wo C alle Kontinua durchläuft, welche in G liegen und z_1, z_2 enthalten.

Satz 1. *Wenn $z_i \in G_0$, $i = 1, 2$ und $\varrho_\pi(z_1, z_2) < \beta$, so ist $\varrho_\pi(z_1, z_2) = \varrho^*_\pi(z_1, z_2)$.*

Sei $\eta > 0$. Gemäss der Voraussetzung existiert ein $H \in \mathfrak{H}(z_1, z_2)$ derart, dass:

(17) $$\delta(H) < \beta; \qquad \delta(H) < \varrho_\pi(z_1, z_2) + \eta.$$

Ich behaupte, dass $H\,\overline{K(a, 2\beta)} = 0$. In der Tat, im entgegengesetztem Fall hätte man wegen (17): $H \subset K(a, 3\beta) - K(a, \beta)$, also $H = \overline{H} \subset G$; somit musste H die Ebene zerschneiden. Die Komponente von $R_2 - H$, die z_1 enthält, enthält $R_2 - K(a, 3\beta)$ ist also unbeschränkt. Die Komponente, die a enthält, ist somit beschränkt, sie enthält aber $K(a, \beta)$, hat also einen Durchmesser $\geqq 2\beta$. Es wäre also $\delta(H) \geqq 2\beta$ im Widerspruch mit (17). Also:

(18) $$H\,\overline{K(a, 2\beta)} = 0.$$

Nach (18) enthält die Komponente von $G - H$, die a enthält, auch $K(a, 2\beta)$. Bezeichnet man also mit U die Komponente von $G - H$, die z_1 enthält, so ist $U \subset G_1$. Wenn also z_1', z_2' in U liegen, so ist $H \in \mathfrak{H}(z_1', z_2')$ und $\varrho_\pi(z_1', z_2') \leqq \delta(H) < \varrho_\pi(z_1, z_2) + \eta$. Also:

(19) $$\delta_\pi(U) \leqq \varrho_\pi(z_1, z_2) + \eta$$

und, da η beliebig positiv:

(20) $$\delta_\pi(U) \leqq \varrho_\pi(z_1, z_2).$$

Sei C ein Kontinuum in U, welches z_1 mit z_2 verbindet. Dann ist:

(21) $$\varrho^*_\pi(z_1\, z_2) \leqq \delta_\pi(C) \leqq \delta_\pi(U) \leqq \varrho_\pi(z_1, z_2).$$

Da selbstverständlich $\varrho^*_\pi(z_1, z_2) \geqq \varrho_\pi(z_1, z_2)$, so ist der Satz bewiesen.

Aus Satz 1 folgt:

(22) $$\Delta(G, \varrho_\pi) = \Delta(G, \varrho^*_\pi).$$

Satz 1 scheint den topologisch-metrischen Grund dafür zu enthalten, dass $\Delta(G, \varrho_\pi)$, welche mit der Primendenmenge von G identifizierbar ist, mit der Kreislinie homöomorph ist.

§ 3. Die Primenden und die Primendenmetrik.

Die Menge der Primenden von G bezeichnen wir mit $\Pi(G)$. Die Menge $G + \Pi(G)$ bildet einen topologischen Raum[7]. Wir werden zeigen, dass sich $\Pi(G)$ und $\Delta(G, \varrho_\pi)$ identifizieren lassen. Genauer:

Satz 2. *Es existiert ein Homöomorphismus zwischen $\Gamma(G, \varrho_\pi)$ und $G + \Pi(G)$, welcher sich in G auf die Identität reduziert.*

Hilfssatz 2. *Wenn $z_j \in G$ und die Folge $\{z_j\}$ gegen ein Primende konvergiert, so ist $\{z_j\}$ eine Fundamentalfolge in der Metrik ϱ_π.*

Das Primende, gegen das $\{z_j\}$ konvergiert, ist darstellbar durch eine Gebietskette $\{U_k\}$, deren Begrenzungen rel. G eine Kette von Querschnitten $\{Q_k\}$ bilden mit der Eigenschaft $\lim\limits_{k\to\infty} \delta(Q_k) = 0$[8].

Man kann voraussetzen, dass a in keinem U_k enthalten ist und dass $U_k \subset G_1$, also $Q_k \subset G_2$, $k = 1, 2, \ldots$ Sei $\eta > 0$. Wir bestimmen k_1 so, dass $\delta(Q_{k_1}) < \eta$. Wegen der Voraussetzung existiert ein j_1 derart, dass $z_j \in U_{k_1}$ für $j \geqq j_1$. Dann ist aber $z_j \in U_{k_1}, z_i \in U_{k_1}$ für $j \geqq j_1$, $i \geqq j_1$, also $Q_{k_1} \in \mathfrak{H}(z_i, z_j)$, also:

(23) $$\varrho_\pi(z_i, z_j) \leqq \delta(Q_{K_1}) < \eta \qquad \text{für} \quad i, j > j_1$$

und der Hilfssatz ist bewiesen.

Corollar. *Alle Folgen von Punkten aus G, die gegen ein Primende E konvergieren, konvergieren im Sinne der Metrik (ϱ_π) gegen ein Element von $\Delta(G, \varrho_\pi)$.*

Wir bezeichnen dieses Element mit $w(E)$.

Hilfssatz 3. *Wenn $z_j \in G$ und die Folge $\{z_j\}$ in der (ϱ_π) Metrik gegen ein $w_1 \in \Delta(G, \varrho_\pi)$ konvergiert, so konvergiert $\{z_j\}$ gegen ein Primende E_1 und es ist*

(24) $$w(E_1) = w_1.$$

---

[7]) Carathéodory: l. c. S. 351, Urysohn: Fund. Math. S. 235.
[8]) Carathéodory: l. c. S. 343, Satz VIII.

Man kann zunächst, nach einem Satz von Carathéodory[9]) aus $\{z_j\}$ eine Teilfolge $\{z_{n_j}\}$ aussondern, die gegen ein Primende E_1 konvergiert. Dann ist, nach Hilfssatz 2, $w_1 = w(E_1)$. Ich behaupte, die ganze Folge $\{z_j\}$ konvergiere gegen E. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man aus $\{z_j\}$ eine zweite Folge $\{z_{m_j}\}$ aussondern, welche gegen ein Primende $E_2 \neq E_1$ konvergiert. E_1 und E_2 können dargestellt werden durch zwei Gebietsketten $\{U_k^{(1)}\}$, $\{U_k^{(2)}\}$, deren Begrenzungen rel. G zwei Querschnittsketten $\{Q_k^{(1)}\}$, $\{Q_k^{(2)}\}$ sind mit den Eigenschaften:

$$\lim_{k\to\infty} \delta(Q_k^{(1)}) = \lim_{k\to\infty} \delta(Q_k^{(2)}) = 0. \tag{25}$$

Man darf ausserdem voraussetzen, dass a in keinem der $\overline{U_k^{(1)}}$, $\overline{U_k^{(2)}}$ liegt. Sei $\eta > 0$. Wir bestimmen ein k_1 derart, dass:

$$\delta(Q_{k_1}^{(1)}) < \frac{1}{3}\eta > \delta(Q_{k_1}^{(2)}) \tag{26}$$

und

$$U_{k_1}^{(1)} U_{k_1}^{(2)} = 0. \tag{27}$$

Dies ist möglich wegen (25) und $E_1 \neq E_2$. Jetzt bestimmen wir die natürliche Zahl q so, dass für $j \geqq q$, $i \geqq q$:

$$\varrho_\pi(z_i, z_j) < \frac{\eta}{3}, \tag{28}$$

$$z_{n_j} \epsilon\, U_{k_1}^{(1)}, \tag{29}$$

$$z_{m_j} \epsilon\, U_{k_1}^{(2)}. \tag{30}$$

Insbesondere ist $\varrho_\pi(z_{n_q}, z_{m_q}) < \frac{\eta}{3}$. Nach der Schlussbemerkung von § 1 kann man einen Quer- oder Rückkehrschnitt H so bestimmen, dass $H \epsilon\, \mathfrak{H}(z_{n_q}, z_{m_q})$ und:

$$\delta(H) < \frac{\eta}{3}. \tag{31}$$

Sei V die Komponente von $G-H$, die z_{n_q}, z_{m_q} enthält. Dann ist $W = U_{k_1}^{(1)} + U_{k_1}^{(2)} + V$ ein zusammenhängendes Teilgebiet von G.

[9]) Carathéodory: l. c. Satz VII, S. 341—342.

Es ist $a \epsilon G - \overline{W}$. Sei Y die Komponente von $G - \overline{W}$, die a enthält und $N = G(\overline{Y} - Y)$. N ist ein Kontinuum, welches a von allen Punkten $z \epsilon W$ trennt, und, wie leicht zu sehen, ein irreduzibler Schnitt von G zwischen a und jedem $z \epsilon W$ (dies folgt daraus, dass $N = G(\overline{Y} - Y)\ (\overline{W} - W)$ ist). Da ausserdem $N \subset Q_{k_1}^{(1)} + Q_{k_1}^{(2)} + H$, also N in einer Summe von endlich vielen einfachen Bögen enthalten ist, so ist N ein Quer- oder Rüchkehrschnitt. Aus (26), (31) folgt wie in § 1, dass $\delta(N) < \eta$. Wegen (29), (30) ist $z_{n_j} \epsilon W$, $z_{m_j} \epsilon W$ für $j \geqq q$; N trennt also a von allen Punkten der Folge $z_{n_1}, z_{m_1}, z_{n_2}, z_{m_2}, \ldots$ bis auf eine endliche Anzahl unter ihnen. Also: zu der Folge $z_{n_1}, z_{m_1}, z_{n_2}, z_{m_2}, \ldots$ kann man Quer- oder Rückkehrschnitte von beliebig kleinem Durchmesser bestimmen, welche a von allen Punkten der Folge bis auf endlich viele trennen. Nach einem Hilfssatz von Carathéodory[10]) ist die Folge gegen ein Primende konvergent, woraus $E_1 = E_2$ im Widerspruch mit der Voraussetzung folgt. Somit konvergiert $\{z_i\}$ gegen E_1 und der Hilfssatz ist bewiesen.

Aus dem Hilfssatz folgt, dass $w(E)$ eineindeutig $\Pi(G)$ auf $\Delta(G, \varrho_\pi)$ abbildet. Setzt man $w(z) = z$ für $z \epsilon G$, so bildet die Funktion w die Menge $G + \Pi(G)$ auf $\Gamma(G, \varrho_\pi)$ eineindeutig ab und reduziert sich für Punkte vom G auf die Identität. Nach einem Satz von Lavrentieff über die Erweiterung stetiger Funktionen[11]) ist w umkehrbar stetig, also liefert den gesuchten Homöomorphismus. Satz 2 ist also bewiesen.

Ich habe in dieser Abhandlung lediglich die Primenden von Carathéodory behandelt, ohne auf die von H. Kaufman entwickelte allgemeine Theorie der Primenden ebener und raümlicher Gebiete einzugehen. Ich vermute aber, dass analoge Erwägungen auch für die Kaufman'sche Theorie, eventuell für eine Primendentheorie auf Riemann'schen Flächen von Nutzen sein können.

[10]) Carathéodory: l. c. Hilfssatz 2, S. 338—340.
[11]) Fund. Math. VI S. 149—151.

Zakopane, 8/III 1936.