Über die Zerlegung kompakter Räume in zweipunktige Mengen.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R ein metrischer, kompakter Raum, 2^R der Raum der abgeschlossenen Teilmengen von R, ϱ, ϱ_1 beziehungsweise die Entfernungen in R und 2^R.

Ich habe folgendes bewiesen[1]): es existiert in 2^R eine abgeschlossene nulldimensionale Menge $\mathfrak{A}$, derart dass: 1) jedes $U \epsilon \mathfrak{A}$ ist abzählbar, 2) $\sum_{U \epsilon \mathfrak{A}} U = R$. Jetzt werde ich beweisen den schärferen

Satz. *Es existiert eine abgeschlossene nulldimensionale Menge $\mathfrak{H} \subset 2^R$, derart dass:* 1) *jedes $U \epsilon \mathfrak{H}$ besteht aus genau zwei Punkten,* 2) $\sum_{U \epsilon \mathfrak{H}} U = R$.

Beweis. Wir wollen mit $M(x, y)$ die aus den Punkten x, y bestehende Menge bezeichnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man voraussetzen, dass R nicht abzählbar ist. Dann gibt es eine Zerlegung $R = R_1 + R_2$, $R_1 = \overline{R}_1$, $R = \overline{R}_2$ derart, dass $R - R_1$ und $R - R_2$ nicht abzählbar sind. Bekanntlich sind R_1 und R_2 stetige Bilder kompakter nulldimensionaler Mengen. Also existieren zwei Mengen H_1, H_2 und eine für $x \epsilon H_1 + H_2 = H$ definierte stetige Funktion f, mit den Eigenschaften:

$$(1) \quad \dim H = 0; \quad H_i \subset R - R_i; \quad H_i = \overline{H}_i; \quad f(H_i) = R_i; \quad i = 1, 2.$$

[1]) *Fund. Math.* t. XXIII, p. 11 (1935).

Sei $\mathfrak{H}$ die Menge aller $M(x, f(x))$ mit $x \epsilon H$. Wegen (1) ist $H_i R_i = 0$ für $i = 1, 2$, also:

$$(2) \quad x \neq f(x), \quad \text{wenn} \quad x \epsilon H.$$

Die Mengen $M(x, f(x))$ sind somit genau zweipunktig. Weiter ist:

$$(3) \quad \sum_{U \epsilon \mathfrak{H}} U = \sum_{x \epsilon H} M(x, f(x)) = H + f(H) = R.$$

Sei $\mathfrak{H}_i$ die Menge aller $M(x, f(x))$ mit $x \epsilon H_i$, $i = 1, 2$. Die Zuordnung zwischen x und $M(x, f(x))$ ist wegen (1) und der Stetigkeit von f eine Homöomorphie zwischen H_i und $\mathfrak{H}_i$. Also ist $\mathfrak{H}_i$ $i = 1, 2$, und somit auch $\mathfrak{H}$ abgeschlossen und nulldimensional. Damit ist alles bewiesen.

8. X. 1935.