La famille $\Phi_{\varrho\sigma}$ se compose donc des ensembles

(2), (4), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5) et ( ).

En formant la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho}$, on voit sans peine qu'elle ne contient pas l'ensemble (1, 2, 4). Pour le prouver, il suffit de prendre les différences dans lesquels le premier terme est un des ensembles (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5) et le second terme un ensemble $E$ quelconque de la famille $\Phi_{\varrho\sigma}$.

Si l'on avait $(1, 2, 3, 4) - E = (1, 2, 4)$, il en découlerait que $3 \epsilon E$; or, si $E \epsilon \Phi_{\varrho\sigma}$ et $3 \epsilon E$, alors $E$ contient soit l'élément 1, soit l'élément 2 et la différence en question ne peut pas être l'ensemble (1, 2, 4).

Pareillement, si l'on avait $(1, 2, 4, 5) - E = (1, 2, 4)$, l'ensemble $E$ devrait contenir l'élément 5, donc aussi 1 ou 4 et on voit encore que $(1, 2, 4, 5) - E \neq (1, 2, 4)$.

Enfin, si $(1, 2, 3, 4, 5) - E = (1, 2, 4)$, on aurait $3 \epsilon E$ ainsi que $5 \epsilon E$ et, vu les cas précédemment analysés, on aurait

$$(1, 2, 3, 4, 5) - E \neq (1, 2, 4).$$

Or, je dis que l'ensemble (1, 2, 4) appartient à la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}$. Pour le démontrer, il suffira de prouver que la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho}$ contient les ensembles (1), (2) et (4), c'est-à-dire que chacun de ces trois ensembles est une différence de deux ensembles de la famille $\Phi_{\varrho\sigma}$. Or, en effet,

$$(1) = (1, 2, 3) - (2, 3), \quad (2) = (2) - (\ ), \quad (4) = (4) - (\ ).$$

La formule (9) est ainsi établie pour la famille finie $\Phi$ envisagée d'ensembles finis.

---

# Endliche Überdeckungen topologischer Räume.

Von

P. Alexandroff und A. Kolmogoroff [1]) (Moskau).

**1.** Es sei $F$ ein topologischer Raum. Ein endliches System $\mathfrak{S}$ von abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen $A_1, A_2, \dots, A_s$ von $F$ heisst eine abgeschlossene bzw. offene *multiplikative Überdeckung* [2]) von $F$, wenn $F = \sum_i A_i$ und jede nichtleere Durchschnittsmenge $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}$ von Elementen von $\mathfrak{S}$ ein Element von $\mathfrak{S}$ ist. Eine Zellenzerlegung (insbesondere eine Simplizialzerlegung) eines endlichen Polyeders stellt ein einfaches Beispiel einer abgeschlossenen multiplikativen Überdeckung dar.

Die grösste Zahl $\lambda$ von der Art, dass es in $\mathfrak{S}$ eine abnehmende Folge von $\lambda$ voneinander verschiedenen nichtleeren Elementen

$$A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \dots \supset A_{i_\lambda}$$

gibt, heisst die *Länge* der multiplikativen Überdeckung $\mathfrak{S}$. Liegt *irgendeine* endliche Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $F$ (d. h. irgendein System von endlich vielen Punktmengen $A_i$ mit $\sum_i A_i = F$) vor, so erhält man eine multiplikative Überdeckung $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{U}$, wenn man das Mengensystem $\mathfrak{U}$ durch die Durchschnittsmengen von je endlich-vielen Elemente von $\mathfrak{U}$ ergänzt. Besteht dabei $\mathfrak{U}$ aus lauter abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, so gilt dasselbe auch von $\mathfrak{S}$. Ferner ist die *Länge von $\mathfrak{S}$ offenbar höchstens so gross wie die Ordnung von $\mathfrak{U}$*; sie kann aber auch kleiner sein: ist $F$ ein Quadrat, besteht $\mathfrak{U}$ aus den Quadraten einer Unterteilung von $F$ in kleinere Quadrate, und ist $\mathfrak{S}$ die dazugehörende

[1]) Die NrNr. 1 und 2 sind von Alexandroff, die NrNr. 3 und 4 von Kolmogoroff.

[2]) Terminologie überall — wie in Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935.

multiplikative Überdeckung, so ist die Ordnung von $\mathfrak{U}$ gleich vier, während die Länge von $\mathfrak{S}$ gleich drei ist. Die Länge jeder Simplizialzerlegung eines $n$-dimensionalen Polyeders ist gleich $n$; die Ordnung der durch die Grundsimplexe der Simplizialzerlegung gebildeten Überdeckung kann dabei beliebig gross sein.

Der Zweck der vorliegenden Note ist die Beziehungen zwischen Länge und Ordnung von Überdeckungen zu präzisieren und insbesondere den folgenden Satz zu beweisen, der selbst für den Fall eines $n$-dimensionalen Würfels $F$ neu zu sein scheint und eine Verschärfung des Lebesgue-Brouwerschen Pflastersatzes darstellt:

***Satz.*** *Bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ ist die Länge jeder abgeschlossenen und jeder offenen multiplikativen $\varepsilon$-Überdeckung eines $n$-dimensionalen Kompaktums $F$ mindestens gleich $n+1$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}$ die gegebene multiplikative Überdeckung von $F$; $F$ sei dabei als abgeschlossene beschränkte Menge in einen $R^m$ eingebettet. Wir bezeichnen mit $N$ den Nerv, mit $\lambda$ die Länge von $\mathfrak{S}$.

***Lemma.*** *Jedes freie*[3] *$r$-dimensionale Simplex von $N$ enthält — falls $r \geqslant \lambda$ ist — eine freie $(r-1)$-dimensionale Seite.*

Beweis des Lemmas. Es sei $x^r = (a_0 \ldots a_r)$ ein freies Simplex von $N$ und zwar eine freie Seite des Grundsimplexes

$$x^u = (a_0 \ldots a_r\, a_{r+1} \ldots a_u), \qquad u \geqslant r.$$

Da $r \geqslant \lambda$, also $r+1 > \lambda$ ist, existiert ein $p < r$ mit

$$A_0 \cdot \ldots \cdot A_p = A_0 \cdot \ldots \cdot A_p \cdot A_{p+1},$$

wobei $A_i$ das dem Eckpunkt $a_i$ von $N$ entsprechende Element von $\mathfrak{S}$ ist. Dann ist

$$x^{r-1} = (a_0 \ldots a_p\, a_{p+2} \ldots a_r)$$

die gesuchte Seite von $x^r$. Denn es sei

$$x^v = (a_0 \ldots a_p\, a_{p+2} \ldots a_r\, a'_r \ldots a'_v)$$

ein Grundsimplex von $N$ mit $x^{r-1}$ als Seite. Aus der Definition der Zahl $p$ folgt, dass auch

$$x = (a_0 \ldots a_p\, a_{p+1}\, a_{p+2} \ldots a_r\, a'_r \ldots a'_v)$$

ein Simplex von $N$ ist; da es $x^r$ als Seite enthält, muss $x = x^u$, d. h. es müssen die $a'_h$, $r \leqslant h \leqslant v$, unter den $a_i$, $0 \leqslant i \leqslant u$, enthalten sein. Folglich ist $x^v$ eine Seite von $x^u$, die — als Grundsimplex — mit $x^u$ identisch sein muss. Das Lemma ist hiermit bewiesen.

Ist $N$ als Euklidischer Komplex in einem $R^m$ realisiert, so folgt aus dem Lemma die Möglichkeit, mittels eines wiederholten Hineindrücken[4] der freien Simplexe das Polyeder $\overline{N}$ in ein höchstens $\lambda$-dimensionales Polyeder in sich zu deformieren, und zwar so, dass während des Deformationsprozesses jeder Punkt von $\overline{N}$ in dem ihn enthaltenden Grundsimplex von $N$ verbleibt. War $\mathfrak{S}$ von vorneherein eine $\varepsilon$-Überdeckung, und $N$ in der Nähe von $S$ realisiert[5], so folgt aus dem Bewiesenen, dass $F$ mittels einer $2\varepsilon$-Verschiebung in ein höchstens $\lambda$-dimensionales Polyeder übergeführt werden kann, womit unser Satz bewiesen ist.

**2.** Der obige Beweis gilt sowohl für abgeschlossene als auch für offene Überdeckungen. Im Falle offener Überdeckungen kann man auch folgendermassen verfahren.

Es sei wieder $\mathfrak{S}$ eine $\varepsilon$-Überdeckung, $N$ der in der Nähe von $\mathfrak{S}$ Euklidisch realisierte Nerv. Mit Hilfe des Abbildungsverfahrens von Herrn Kuratowski[6] bilden wir $F$ in das Polyeder $\overline{N}$ ab. Die Abbildung heisse $\varkappa$. Dann ist die Menge aller Punkte von $F$, die in das Innere eines Simplexes $x^r = (a_0 \ldots a_r)$ abgebildet werden, gleich

$$A_0 \ldots A_r - \textstyle\sum' A_i,$$

wobei $\sum'$ bedeutet, dass die Summation über alle von $0, \ldots, r$ verschiedene Indexe erstreckt ist.

Es sei nun $x^n = (a_0 \ldots a_n)$ ein $n$-dimensionales Simplex von $N$, $n \geqslant \lambda$. Aus

$$A_0 \cdot \ldots \cdot A_p = A \cdot \ldots \cdot A_p \cdot A_{p+1}$$

folgt, dass $A_0 \cdot \ldots \cdot A_p - A_{p+1}$, also erst recht $A_0 \cdot \ldots \cdot A_p - \sum' A_i$ leer ist,

---

[3]) Ein freies Simplex eines Komplexes $K$ ist ein solches, welches Seite von einem einzigen Grundsimplex ist; ein Grundsimplex ist ein Simplex, welches zu keinem anderem Simplex von $K$ als Seite gehört. Dabei wird jedes Simplex als Seite von sich selbst betrachtet.

[4]) Alexandroff, *Gestalt u. Lage* usw., Annals of math. 30, 1928—29, SS. 150—151 oder Alexandroff-Hopf a. a. O. SS. 382—383.

[5]) Alexandroff-Hopf SS. 160—161 und Kap. IX § 3 (SS. 363 u. f.).

[6]) Vgl. Kuratowski, Fund. Math. 20, 1932, S. 191 oder Alexandroff-Hopf a. a. O., SS. 366—368.

dass also das Innere von $(a_0 \dots a_p)$ frei von Punkten von $\varkappa(F)$ ist. Mit anderen Worten: jedes $x^n$ besitzt eine Seite, deren Innere keinen Punkt von $\varkappa(F)$ enthält. Da $\varkappa(F)$ abgeschlossen ist, enthält jedes $x^n$ ein nicht zu $\varkappa(F)$ gehörende Teilgebiet. Da dies bei jedem $\varepsilon$ gilt, muss $\dim F \leqslant \lambda - 1$ sein, w. z. b. w.

**3.** Der Fall abgeschlossener Überdeckungen lässt sich auch direkt durch folgende kurze Konstruktion erledigen. Unser Ziel wird offenbar durch den Beweis des folgenden Satzes erreicht:

*Ein Kompaktum $F$, welches eine abgeschlossene multiplikative $\varepsilon$-Überdeckung $\mathfrak{S}$ von der Länge $\lambda$ besitzt, besitzt auch eine abgeschlossene $\varepsilon$-Überdeckung von einer Ordnung $\leqslant \lambda$.*

Beweis. Es seien $A_1, \dots, A_s$ die Elemente der Überdeckung $\mathfrak{S}$. Unter dem *Rang* des Elementes $A_h$ von $\mathfrak{S}$ verstehen wir die Länge des aus allen in $A_h$ enthaltenen Elementen von $\mathfrak{S}$ gebildeten Teilsystems $\mathfrak{S}_h$ von $\mathfrak{S}$ [7]). Die Elemente von Range $r$ von $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit $A_{ri}$, $i=1, \dots, s_r$. Zwei verschiedene Elemente vom Range $r$ haben als Durchschnitt ein Element von einem Range $< r$.

Wir setzen jetzt

$$B_{ri} = U(A_{ri}, d_r),$$

worin die $d_r > 0$ für $r=1, \dots, \lambda$ schrittweise wie folgt definiert sind. Die Zahl $d_1$ sei so klein (sonst beliebig) gewählt, dass die $B_{1i}$ paarweise zueinander fremd sind. Sind die $d_{r'}$, $r'<r$, schon definiert, so wählen wir $d_r$ so klein, dass für beliebige $A_{ri}$, $A_{rj}$, $A_{ri}\cdot A_{rj}=A_{r'k}$ $B_{ri}, \dots, B_{rj} \subset B_{r'k}$ gilt. Schliesslich sei

$$C_{ri} = \overline{B_{ri} - \sum_{r'<r} B_{r'k}} = \overline{B}_{ri} - \sum_{r'<r} B_{r'k}.$$

Für $i \neq j$ ist $C_{ri}\cdot C_{rj}=0$, denn — falls $A_{ri}\cdot A_{rj}=A_{r'k}$ ist —

$$C_{ri}\cdot C_{rj} \subset \overline{B}_{ri}\cdot \overline{B}_{rj} - B_{r'k} \subset B_{r'k} - B_{r'k} = 0$$

gilt.

Falls also ein Punkt zu mehr als einer unter den Mengen $C$ gehört, so müssen die $r$ untereinander verschieden sein; die $r$ sind aber die Ränge der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{S}$, sie können deshalb nur $r$ verschiedene Werte annehmen, so dass ein Punkt von $F$ höchstens zu $\lambda$ verschiedenen Mengen $C$ gehören kann und die Ordnung der durch die $C$ gebildeten $\varepsilon$-Überdeckung von $F$ höchstens gleich $\lambda$ ist.

[7]) $A_h$ ist also ein Element von $\mathfrak{S}_h$.



**4.** Unser Satz lässt sich *mutatis mutandis* auch auf (nicht notwendig metrisierbare) normale Räume $R$ übertragen, von denen nicht einmal die Existenz einer abzählbaren Basis, geschweige denn die Kompaktheit vorausgesetzt wird. Es gilt nämlich folgendes:

*Es sei* $\mathfrak{U} = (G_1, \dots, G_u)$ *eine endliche offene Überdeckung und* $\mathfrak{S} = (A_1, \dots, A_s)$ *eine endliche abgeschlossene multiplikative Überdeckung des normalen Raumes $R$, wobei $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{U}$ eingeschrieben* (d. h. jedes $A_i$ in mindestens einem $G_h$ enthalten) *ist. Dann existiert eine ebenfalls in $\mathfrak{U}$ eingeschriebene abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{C} = (C_1, \dots, C_\gamma)$, deren Ordnung die Länge von $\mathfrak{S}$ nicht übertrifft.*

Der Beweis bleibt derselbe wie in Nr 3. Nur müssen anstatt $U(A_{ri}, d_r)$ offene Mengen $U_{ri} \supset A_{ri}$ betrachtet werden, die falls $A_{ri} \subset G_h$ ist — den Inklusionen $U_{ri} \subset G_h$ und im übrigen den in Nr. 3 für die $U(A_{ri}, d_r)$ verlangten Bedingungen genügen.

Bolschewo-Komarovka (bei Moskau), Weihnachten 1935.