Une propriété générale des familles d'ensembles.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Théorème I. *Φ étant une famille quelconque d'ensembles, il existe une famille unique Ψ d'ensembles disjoints, telle que*

1^0 *tout ensemble de la famille Φ est une somme d'ensembles de la famille Ψ,*

2^0 *si θ est une famille d'ensembles disjoints, telle que tout ensemble de la famille Φ est une somme d'ensembles de la famille θ, alors tout ensemble de la famille Ψ est une somme d'ensembles de la famille θ.*

Démonstration. a étant un élément donné quelconque appartenant à un ensemble de la famille Φ, désignons par $P(a)$ le produit de tous les ensembles E de la famille Φ qui contiennent a, et par $Q(a)$ la somme de tous les ensembles E de la famille Φ qui ne contiennent pas a. Posons $A(a) = P(a) - Q(a)$ [1]). On voit sans peine que si b est un élément quelconque appartenant à un ensemble de la famille Φ, on a soit $A(a) = A(b)$, soit $A(a)\,A(b) = 0$.

Soit Ψ la famille de tous les ensembles $A(a)$ correspondants aux éléments a des ensembles de la famille Φ. Les ensembles distincts de la famille Ψ sont disjoints et on a évidemment pour tout ensemble E de la famille Φ la formule

$$E = \sum_{a \epsilon E} A(a);$$

donc, tout ensemble de la famille Φ est une somme d'ensembles de la famille Ψ.

[1]) Cf. la troisième définition des *atomes* de M. Fréchet: *Fund. Math.* t. V, p. 212.

Soit maintenant Θ une famille d'ensembles disjoints, telle que tout ensemble de la famille Φ est une somme d'ensembles de la famille Θ. Soit a un élément d'un ensemble de la famille Φ et H l'ensemble de la famille Θ contenant a. Je dis que $H \subset A(a)$. En effet, il résulte sans peine de la propriété de la famille Θ que tout ensemble E de la famille Φ qui contient a contient H, et que tout ensemble E de Φ qui ne contient pas a est disjoint de H. Donc, $H \subset P(a)$ et $H \cdot Q(a) = 0$, d'où $H \subset P(a) - Q(a) = A(a)$. Or, il en résulte tout de suite que $A(a)$ est la somme de tous les ensembles de la famille Θ qui contiennent des éléments de $A(a)$ (puisque, si $b \epsilon A(a)$, on a $A(b) = A(a)$). Donc, tout ensemble de la famille Ψ est une somme d'ensembles de la famille Θ.

Supposons enfin que Ψ et Ψ_1 sont deux familles d'ensembles disjoints jouissants des propriétés 1^0 et 2^0. Soit E un ensemble (non vide) de la famille Ψ: c'est donc une somme d'ensembles de la famille Ψ_1 (d'après 2^0 pour $\Theta = \Psi_1$). Soit E_1 un des termes (non vides) de cette somme: on a donc $E_1 \subset E$. Or, d'après la propriété de Ψ_1, E_1 est une somme d'ensembles de la famille Ψ: soit H un des termes (non vides) de cette somme: on a donc $H \subset E_1 \subset E$, donc $H \subset E$. Les ensembles de la famille Ψ étant disjoints, il en résulte (d'après $H \neq 0$) que $H = E$, donc, d'après $H \subset E_1 \subset E$, que $E = E_1$. Tout ensemble de la famille Ψ appartient ainsi à la famille Ψ_1. Pareillement, on prouve que $\Psi_1 \subset \Psi$. On a donc $\Psi = \Psi_1$.

Le théorème I est ainsi démontré.

Φ étant une famille donnée d'ensembles, désignons par Φ_ϱ la famille formée des ensembles de la famille Φ et des différences de deux ensembles de la famille Φ, et par Φ_Σ la famille formée de tous les ensembles qui sont des sommes (quelconques) d'ensembles de la famille Φ.

Il résulte de la démonstration du théorème I que les ensembles de la famille Ψ sont de la forme

$$H = \prod_{E \epsilon \Xi} E - \sum_{E \epsilon \Phi - \Xi} E, \tag{1}$$

où Ξ est un sous-ensemble de la famille Φ.

Or, en désignant par E_1 un ensemble (donné quelconque) de la famille Ξ, on a évidemment, d'après (1):

$$H = E_1 - \Big(\sum_{E \epsilon \Xi} (E_1 - E) + \sum_{E \epsilon \Phi - \Xi} E\Big),$$

et, d'après $\Xi \subset \Phi$, on en conclut sans peine que $H \in \Phi_{\varrho\Sigma\varrho}$. On a donc

(2) $$\Psi \subset \Phi_{\varrho\Sigma\varrho}.$$

Les ensembles de la famille Ψ étant deux à deux disjoints, on a évidemment

(3) $$\Psi_{\Sigma\varrho} = \Psi_{\Sigma}.$$

Or, tout ensemble de la famille Φ étant une somme d'ensembles de la famille Ψ, on a

(4) $$\Phi \subset \Psi_{\Sigma},$$

d'où, d'après (3) on trouve successivement:

$$\Phi_{\varrho} \subset \Psi_{\Sigma\varrho} = \Psi_{\Sigma}, \qquad \Phi_{\varrho\Sigma} \subset \Psi_{\Sigma\Sigma} = \Psi_{\Sigma}, \qquad \Phi_{\varrho\Sigma\varrho} \subset \Psi_{\Sigma\varrho} = \Psi_{\Sigma}, \qquad \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma} \subset \Psi_{\Sigma}$$

et

(5) $$\Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma\varrho} \subset \Psi_{\Sigma}.$$

Or, d'après (2) on trouve

$$\Psi_{\Sigma} \subset \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma} \subset \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma\varrho},$$

et la formule (5) donne

(6) $$\Psi_{\Sigma} = \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma} = \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma\varrho}.$$

On a ainsi ce

Théorème II. *Quel que soit la famille Φ d'ensembles, on a la formule*

(7) $$\Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma\varrho} = \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma},$$

c'est-à-dire, la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma}$ est close par rapport aux opérations ϱ et Σ.

D'après l'inclusion évidente $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho} \subset \Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma}$, il résulte de (6) que $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho} \subset \Psi_{\Sigma}$, c'est-à-dire que tout ensemble de la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho}$ est une somme d'ensembles de la famille Ψ; d'après (2) il en résulte tout de suite que la famille Ψ est formée de tous les ensembles de la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho}$ qui ne contiennent aucun autre ensemble de cette famille: ce sont donc des *ensembles indécomposables* (*atomes*) de la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho}$ [1]).

[1]) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* t. XXIV, p. 191; cf. A. Tarski, *Fund. Math.* t. XVI, p. 236. La notion des *atomes* est due à M. Fréchet, *Fund. Math.* t. V, p. 210 (§ 2).

Par conséquent:

Les ensembles de la famille Ψ (satisfaisant aux conditions du théorème I) *coïncident avec les ensembles indécomposables* (atomes) *de la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho}$.*

Notre théorème II peut être regardé comme une généralisation d'un théorème que M. W. Sierpiński a démontré pour les familles Φ de sous-ensembles d'un ensemble dénombrable D [1]). En effet, dans ce cas Φ_{ϱ} est encore une famille de sous-ensembles de D et toute somme d'ensembles de Φ_{ϱ} est évidemment égale à une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de Φ_{ϱ}, c'est-à-dire $\Phi_{\varrho\Sigma} = \Phi_{\varrho\sigma}$ et, pareillement, $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma} = \Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}$. La formule (7) donne donc la formule de M. Sierpiński:

(8) $$\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma\varrho} = \Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}.$$

Soit maintenant, en particulier, Φ une famille finie, formée de n ensembles. Les ensembles non vides de la famille Ψ étant de la forme (1), où $\Xi \subset \Phi$, on voit sans peine que leur nombre m ne peut pas dépasser le nombre de sous-ensembles non vides de la famille Φ, donc que $m \leqslant 2^n - 1$. Or, on peut évidemment former $2^m - 1$ sommes différentes d'ensembles d'une famille contenant m ensembles disjoints non vides. Donc

Si Φ est une famille finie, formée de n ensembles, la famille $\Phi_{\varrho\Sigma\varrho\Sigma}$ contient $2^m - 1$ ensembles non vides, où $m < 2^n$.

Or, je dis qu'*il existe une famille finie d'ensembles finis pour laquelle on a*

(9) $$\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma} \neq \Phi_{\varrho\sigma\varrho}$$ [2]).

Je démontrerai que telle est la famille Φ formée de trois ensembles:

(10) $$E_1 = (1, 2, 3), \qquad E_2 = (1, 4, 5) \quad \text{et} \quad E_3 = (2, 4).$$

En effet, la famille Φ_{ϱ} est ici formée des ensembles (10) et des ensembles

$$(2, 3), \quad (1, 3), \quad (1, 5), \quad (4, 5), \quad (4), \quad (2) \quad \text{et} \quad (\ ),$$

où $(\ )$ désigne l'ensemble vide.

[1]) W. Sierpiński, Bull. Acad. Bulgare.

[2]) M. W. Sierpiński a démontré l. c. qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles dénombrables pour laquelle on a la formule (9).

La famille $\Phi_{\varrho\sigma}$ se compose donc des ensembles

(2), (4), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5) et ( ).

En formant la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho}$, on voit sans peine qu'elle ne contient pas l'ensemble (1, 2, 4). Pour le prouver, il suffit de prendre les différences dans lesquels le premier terme est un des ensembles (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5) et le second terme un ensemble E quelconque de la famille $\Phi_{\varrho\sigma}$.

Si l'on avait $(1, 2, 3, 4) - E = (1, 2, 4)$, il en découlerait que $3 \epsilon E$; or, si $E \epsilon \Phi_{\varrho\sigma}$ et $3 \epsilon E$, alors E contient soit l'élément 1, soit l'élément 2 et la différence en question ne peut pas être l'ensemble (1, 2, 4).

Pareillement, si l'on avait $(1, 2, 4, 5) - E = (1, 2, 4)$, l'ensemble E devrait contenir l'élément 5, donc aussi 1 ou 4 et on voit encore que $(1, 2, 4, 5) - E \neq (1, 2, 4)$.

Enfin, si $(1, 2, 3, 4, 5) - E = (1, 2, 4)$, on aurait $3 \epsilon E$ ainsi que $5 \epsilon E$ et, vu les cas précédemment analysés, on aurait

$$(1, 2, 3, 4, 5) - E \neq (1, 2, 4).$$

Or, je dis que l'ensemble (1, 2, 4) appartient à la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho\sigma}$. Pour le démontrer, il suffira de prouver que la famille $\Phi_{\varrho\sigma\varrho}$ contient les ensembles (1), (2) et (4), c'est-à-dire que chacun de ces trois ensembles est une différence de deux ensembles de la famille $\Phi_{\varrho\sigma}$. Or, en effet,

$$(1) = (1, 2, 3) - (2, 3), \quad (2) = (2) - (\ ), \quad (4) = (4) - (\ ).$$

La formule (9) est ainsi établie pour la famille finie Φ envisagée d'ensembles finis.

Endliche Überdeckungen topologischer Räume.

Von

P. Alexandroff und A. Kolmogoroff [1]) (Moskau).

1. Es sei F ein topologischer Raum. Ein endliches System $\mathfrak{S}$ von abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_s$ von F heisst eine abgeschlossene bzw. offene *multiplikative Überdeckung* [2]) von F, wenn $F = \sum_i A_i$ und jede nichtleere Durschnittsmenge $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}$ von Elementen von $\mathfrak{S}$ ein Element von $\mathfrak{S}$ ist. Eine Zellenzerlegung (insbesondere eine Simplizialzerlegung) eines endlichen Polyeders stellt ein einfaches Beispiel einer abgeschlossenen multiplikativen Überdeckung dar.

Die grösste Zahl λ von der Art, dass es in $\mathfrak{S}$ eine abnehmende Folge von λ voneinander verschiedenen nichtleeren Elementen

$$A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \ldots \supset A_{i_\lambda}$$

gibt, heisst die *Länge* der multiplikativen Überdeckung $\mathfrak{S}$. Liegt *irgendeine* endliche Überdeckung $\mathfrak{U}$ von F (d. h. irgendein System von endlich vielen Punktmengen A_i mit $\sum_i A_i = F$) vor, so erhält man eine multiplikative Überdeckung $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{U}$, wenn man das Mengensystem $\mathfrak{U}$ durch die Durchschnittsmengen von je endlich-vielen Elemente von $\mathfrak{U}$ ergänzt. Besteht dabei $\mathfrak{U}$ aus lauter abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, so gilt dasselbe auch von $\mathfrak{S}$. Ferner ist die *Länge von* $\mathfrak{S}$ *offenbar höchstens so gross wie die Ordnung von* $\mathfrak{U}$; sie kann aber auch kleiner sein: ist F ein Quadrat, besteht $\mathfrak{U}$ aus den Quadraten einer Unterteilung von F in kleinere Quadrate, und ist $\mathfrak{S}$ die dazugehörende

[1]) Die NrNr. 1 und 2 sind von Alexandroff, die NrNr. 3 und 4 von Kolmogoroff.

[2]) Terminologie überall — wie in Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935.