Sur quelques propriétés métriques d'ensembles.

Par

S. Saks (Warszawa).

1. Je me propose d'établir dans cette note quelques théorèmes métriques concernant les ensembles plans. Les méthodes qui seront employées ne diffèrent pas essentiellement de celles dont on se sert d'habitude dans les démonstrations des bien connues relations de M. Denjoy entre les nombres dérivés des fonctions[1]). Il est cependant intéressant que, appliquées géometriquement, ces méthodes donnent non seulement les relations de M. Denjoy, mais aussi d'autres résultats analogues, dont les démonstrations antérieurement connues semblaient éxiger des méthodes plus compliquées.

Termes et notations. Etant donnés un ensemble plan E et un point $a \epsilon E$, une demi-droite t issue de a est une *demi-tangente médiane* de E en a, lorsqu'il existe une suite de points a_n distincts de a, convergeant vers a et tels que les demi-droites $\overrightarrow{aa_n}$ tendent vers t. L'ensemble des demi-tangentes médianes de E en a est (d'après M. Bouligand[2])) le *contingent* de E en a, en abrégé $\text{contg}_E a$. Une droite passant par a et portant deux demi-tangentes médianes opposées en a s'appellera *tangente médiane*. Si une des deux demi-plans ouverts, en lesquels une tangente médiane en a divise le plan, ne contient aucune demi-tangente médiane, ce demi-plan sera appelé *côté vide* de la tangente et la tangente considérée sera dite *extrême*. Si le contingent $\text{contg}_E a$ se réduit à deux demi-droites opposées, la tangente portant ces demi-droites est une *tangente unique* de E en a.

[1]) Cf. p. ex. F. Riesz, *Sur l'existence de la dérivée des fonctions*, Verh. Intern. Math. Kongress, Zürich 1932, I, 258—269; aussi S. Saks, *Théorie de l'intégrale* Varsovie (1933), cité dans la suite en abrégé *T. I.*, 168—173.

[2]) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, Paris (1932); cf. aussi J. Mirguet, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales*, Ann. Ec. Norm. Sup. (3), t. 51, 201—244, en particulier 205—209.

Nous admettons encore les notations suivantes: la demi-droite de direction θ issue d'un point a sera désignée par $\hat{a}(\theta)$. Si $F(x)$ est une fonction définie sur un ensemble E, *l'image* de $F(x)$ sur E, c. à d. l'ensemble des points du plan $[x, F(x)]$ où $x \epsilon E$, sera désigné par $\mathrm{T}(F; E)$. Par $F(E)$ nous désignerons l'ensemble des valeurs de $F(x)$ pour $x \epsilon E$. Enfin, lorsque A est un ensemble, $\lambda(A)$ est la longueur de A.

2. Lemme. *Si R est un ensemble plan et θ une direction fixe, l'ensemble P des points $a \epsilon R$ où $\text{contg}_R a$ ne contient pas la demi-droite $\hat{a}(\theta)$ est contenu dans la somme d'une infinité au plus dénombrable d'arcs simples rectifiables, et dans tout point de P, à un ensemble de longueur nulle près, une tangente extrême à R existe. la demi-droite $\hat{a}(\theta)$ étant située du côté vide de cette tangente.*

Lorsqu'en particulier $\theta = \pi/2$, l'ensemble P est contenu dans la somme d'une infinité au plus dénombrable de courbes de la forme $y = F(x)$ où $F(x)$ sont des fonctions absolument continues (même satisfaisant à la condition de Lipschitz).

Démonstration. On peut admettre évidemment $\theta = \pi/2$. Soit P_n, où $n=1, 2,\ldots$, l'ensemble des points (x, y) de P tels que les inégalités $|x'-x| \leqslant 1/n$ et $|y-y| \leqslant 1/n$ entraînent $y'-y \leqslant n\,|x'-x|$ pour tout point (x', y) de R. Puisque, par hypothèse, en aucun point a de P_n, la demi-droite $\hat{a}(\pi/2)$ n'appartient à $\text{contg}_R\, a$, on a $P = \sum_n P_n$. Désignons par $\{P_{n,m}\}_{m=1,2,\ldots}$ une décomposition quelconque de P_n en une suite d'ensembles de diamètre moindre que $1/n$. On a donc $|y_2 - y_1| \leqslant n \cdot |x_2 - x_1|$ pour tout couple (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de points appartenant à un même ensemble $P_{n,m}$.

Soit $Q_{n,m}$ la projection de $P_{n,m}$ sur l'axe des x. On voit aisément que tout point de $Q_{n,m}$ est la projection d'un seul point de $P_{n,m}$. Par conséquent, l'ensemble $P_{n,m}$ peut être considéré comme l'image d'une fonction $F_{n,m}(x)$ définie sur $Q_{n,m}$. On a donc $|F_{n,m}(x_2) - F_{n,m}(x_1)| \leqslant n \cdot |x_2 - x_1|$ pour tout couple de points x_1 et x_2 de $Q_{n,m}$, et en désignant par $I_{n,m}$ un intervalle quelconque contenant $Q_{n,m}$, on peut évidemment étendre la fonction $F_{n,m}(x)$ sur cet intervalle entier, de manière qu'elle y vérifie la condition de Lipschitz. Donc, puisque $P = \sum_{n,m} P_{n,m}$, l'ensemble P est situé sur une infinité dénombrable des courbes $y = F_{n,m}(x)$, les fonctions $F_{n,m}(x)$ étant absolument continues.

Il reste à prouver qu'une tangente extrême à R existe dans tout point de P, à un ensemble de longueur nulle près. Désignons, à ce but, par $Q^*_{n,m}$ l'ensemble des points de $Q_{n,m}$ qui sont des points de densité de $Q_{n,m}$ et dans lesquels la fonction $F_{n,m}(x)$ est dérivable. L'ensemble $Q_{n,m}-Q^*_{n,m}$ étant de mesure nulle et la fonction $F_{n,m}(x)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz, on a évidemment

$$(1) \qquad \lambda[\mathrm{T}(F_{n,m};\, Q_{n,m}-Q^*_{n,m})]=0.$$

Ceci étant, soit $p_0=(\xi_0, \eta_0)$ un point quelconque de l'ensemble $\mathrm{T}(F_{n,m};\, Q^*_{n,m})$ et (ξ, η) un point arbitraire de R tel que $|\xi-\xi_0|\leqslant 1/n$ et $|\eta-\eta_0|\leqslant 1/n$. Supposons, pour fixer l'idée, que $\xi\geqslant\xi_0$. Donc, étant donné un nombre $\varepsilon>0$ quelconque, si le point (ξ, η) est suffisamment proche du point (ξ_0, η_0), on peut attacher à ξ un point ξ' tel que

$$(2) \qquad \xi'\,\epsilon\, Q_{n,m}, \qquad \xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi' \qquad \textit{et} \qquad \xi'-\xi\leqslant\varepsilon\cdot(\xi-\xi_0).$$

Or, il s'ensuit des définitions des ensembles $P_{n,m}$ et des fonctions $F_{n,m}(x)$ que $\eta-F_{n,m}(\xi')\leqslant n\cdot(\xi'-\xi)$, donc, d'après (2)

$$\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}=\frac{\eta-F_{n,m}(\xi')+F_{n,m}(\xi')-\eta_0}{\xi-\xi_0}$$
$$\leqslant\left(n\cdot\frac{\xi'-\xi}{\xi'-\xi_0}+\frac{F_{n,m}(\xi')-F_{n,m}(\xi_0)}{\xi'-\xi_0}\right)\cdot\frac{\xi'-\xi_0}{\xi-\xi_0}$$
$$\leqslant\left(n\,\varepsilon+\frac{F_{n,m}(\xi')-F_{n,m}(\xi_0)}{\xi'-\xi_0}\right)\cdot(1+\varepsilon).$$

Par conséquent, en posant $k_0=F'_{n,m}(\xi_0)$, on a

$$\limsup\,(\eta-\eta_0)/(\xi-\xi_0)\leqslant k_0,$$

quand le point (ξ, η) tend vers (ξ_0, η_0) en parcourant ceux de R situés dans le demi-plan $\xi\geqslant\xi_0$. On obtient un résultat analogue, notamment $\liminf\,(\eta-\eta_0)/(\xi-\xi_0)\geqslant k_0$, pour le demi-plan $\xi\leqslant\xi_0$. Donc, la droite $y-\eta_0=k_0\cdot(x-\xi_0)$ est une tangente extrême de l'ensemble P en $p_0=(\xi_0, \eta_0)$ et, à la fois, le demi-plan $y-\eta_0\geqslant k_0\cdot(x-\xi_0)$ contenant la demi-droite $\hat{p}_0(\pi/2)$ est un côté vide de cette tangente. La démonstration est ainsi achevée, puisque p_0 est un point quelconque de $\mathrm{T}(F_{n,m}; Q^*_{n,m})$ et, d'après (1), l'ensemble $\sum\limits_{n,m}\mathrm{T}(F_{n,m};\, Q_{n,m}-Q^*_{n,m})$ est de longueur nulle.

3. Théorème 1. *Etant donné un ensemble plan R, l'ensemble P des points a de R où* $\mathrm{contg}_R\, a$ *n'est pas le plan entier est contenu dans la somme d'une infinité dénombrable d'arcs continus et rectifiables* [3]. *Dans tout point a de P, excepté au plus un sous-ensemble de longueur nulle,* $\mathrm{contg}_R\, a$ *est un demi-plan ou bien se réduit à une tangente unique.*

Démonstration. Désignons, pour tout couple d'entiers positifs n, m, par $P_{n,m}$ l'ensemble des points a de P tels que $\mathrm{contg}_R\, a$ ne contient pas la demi-droite $\hat{a}(n\pi/m)$. On a évidemment $P=\sum\limits_{n,m}P_{n,m}$, et en vertu du lemme précédent, chaque ensemble $P_{n,m}$, et parsuite l'ensemble P tout entier, est situé sur la somme d'une infinité dénombrable d'arcs simples et rectifiables. Ensuite, d'après le même lemme, l'ensemble R possède une tangente extrême dans tout point de P, sauf au plus dans un ensemble de longueur nulle.

Soit maintenant Q l'ensemble des points a de P où 1° une tangente extrême existe sans être tangente unique et 2° le contingent $\mathrm{contg}_R\, a$ n'est pas un demi-plan. Désignons, pour tout couple d'entiers positifs n, m, par $Q_{n,m}$ l'ensemble des points q de Q tels que la demi-droite $\hat{q}(n\pi/m)$ est située du côté non-vide de la tangente extrême de R en q, mais n'appartient pas à $\mathrm{contg}_R\, q$. On a évidemment $Q=\sum\limits_{n,m}Q_{n,m}$. Or, en vertu du lemme précédent, pour tout point $q\,\epsilon\, Q_{n,m}$, excepté au plus ceux d'un ensemble de longueur nulle, la demi-droite $\hat{q}(n\pi, m)$ est située du côté vide de la tangente extrême dans q. Il s'ensuit que $\lambda(Q_{n,m})=0$ pour tous n et m, donc aussi $\lambda(Q)=0$. Par conséquent, en négligeant un sous-ensemble de longueur nulle, dans tout point de P ou bien la tangente unique existe, ou bien le contingent dans ce point est un demi-plan.

Théorème 2. *Si R est un ensemble plan et P l'ensemble des points de R où une tangente extrême à R existe et est parallèle à une direction fixe D, la projection orthogonale de P sur une droite perpendiculaire à D est de mesure nulle* [4].

---

[3]) Cette partie du théorème peut être regardée comme une généralisation d'un résultat dû à M. A. S. Besicovitch (*On tangents to general sets of points*, Fundam. Math., t. 22, 49—53).

[4]) Un théorème analogue pour les courbes a été établi dans la note: S. Saks et A. Zygmund, *Sur les faisceaux des tangentes à une courbe*, Fundam. Mathem., t. 6, 117—121. Pour les courbes continues ce théorème est contenu dans le th. 2 du texte.

Démonstration. On peut admettre évidemment que la direction fixe D est celle de l'axe des x. Ceci étant, désignons par P_1 et P_2 respectivement les ensembles des points (ξ, η) de P où les demi-plans $y > \eta$ et $y < \eta$ sont respectivement des côtés vides des tangentes extrêmes. Considérons, pour fixer l'idée, l'ensemble P_1. En vertu du lemme du § 2, P_1 est la somme d'une suite d'ensembles $T_n = \mathrm{T}(F_n; Q_n)$ où Q_n sont des ensembles sur l'axe des abscisses et $F_n(x)$ sont des fonctions continues sur ces ensembles. On voit aisément que l'on ait $\underline{F}_n^-(x) \geqslant 0 \geqslant \overline{F}_n^+(x)$ dans chaque point x de Q_n qui est un point limite bilatéral de Q_n, c. à d. dans chaque point de Q_n, excepté, tout au plus, un ensemble dénombrable. Les ensembles $F_n(Q_n)$ sont donc de mesure nulle [5]) pour tout n. Or, la projection de P_1 sur l'axe des y étant identique à $\sum_n F_n(Q_n)$, cette projection est aussi de mesure nulle. Par raison de symétrie, on a le résultat analogue pour l'ensemble P_2, ce qui achève la démonstration.

4. Les applications des résultats précédents à la théorie des fonctions réelles s'appuyent sur les observations suivantes. $F(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble Q, la dérivabilité de $F(x)$ (c. à d. l'existence de la dérivée finie) en un point x_0 équivaut évidemment à la condition que l'ensemble $T = \mathrm{T}(F; Q)$ possède en $(x_0, F(x_0))$ une tangente unique non-parallèle à l'axe des y. On voit de même que lorsque deux dérivés opposés (c. à d. $\overline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^-(x)$ ou $\overline{F}^-(x)$ et $\underline{F}^+(x)$) sont finis et égaux dans un point x_0, l'ensemble T possède dans le point $[x_0, F(x_0)]$ une tangente extrême de coefficient angulaire égal à la valeur commune de ces dérivés. Réciproquement, si dans un point $(x_0, F(x_0))$ l'ensemble T possède une tangente extrême de coefficient angulaire $k \neq \infty$, alors 1⁰ $\overline{F}^+(x_0) = \underline{F}^-(x_0)$, lorsque le demi-plan $y - y_0 > k \cdot (x - x_0)$ est un côté vide et $\limsup_{x \to x_0} F(x) \leqslant F(x_0)$, 2⁰ $\underline{F}^+(x_0) = \overline{F}^-(x_0)$, lorsque le demi-plan $y - y_0 < k \cdot (x - x_0)$ est un côté vide et $\liminf_{x \to x_0} F(x) \geqslant F(x_0)$.

A titre d'exemple, nous déduirons des théorèmes du § 3 l'énoncé suivant, contenant dans une forme un peu plus précise les résultats fondamentaux de M. Denjoy sur les nombres dérivés.

[5]) C'est une conséquence d'une évaluation générale et presque évidente: *si dans tout point x d'un ensemble Q on a* $-M \leqslant \underline{F}^-(x) \leqslant \overline{F}^+(x) \leqslant M$, *alors* $\mathrm{mes}\, F(Q) \leqslant M \cdot \mathrm{mes}\, Q$ (cf. *T. I.*, p. 156, lemme). Une évaluation plus délicate et moins immédiate est contenue dans le th. B., voir plus loin, p. 239.

Théorème A. *Si dans tout point d'un ensemble E un des nombres dérivés extrêmes d'une fonction $F(x)$ est fini, ce dérivé est égal à son dérivé opposé dans tout point de E, excepté au plus les points d'un ensemble $E_1 \subset E$ de mesure nulle tel que* $\lambda[T(F; E_1)] = 0$.

Démonstration. On peut admettre évidemment que c'est un même dérivé, p. ex. $\overline{F}^+(x)$, qui est fini partout dans E. On a donc $\limsup_{x \to x_0+} F(x) \leqslant F(x_0)$ dans tout point $x_0 \in E$, et puisque l'inégalité $\limsup_{x \to x_0+} F(x) \neq \limsup_{x \to x_0-} F(x)$ ne peut avoir lieu que dans un ensemble tout au plus dénombrable, on peut admettre que $\limsup_{x \to x_0} F(x) \leqslant F(x_0)$ partout dans E. D'autre part, le contingent de $\mathrm{T}(F; E)$ dans aucun point $(x_0, F(x_0))$, où $x_0 \in E$, ne contient de demi-droites situées dans le demi-plan $x \geqslant x_0$ et ayant le coefficient angulaire plus grand que $\overline{F}^+(x_0)$. Donc en vertu du th. 1 (§ 3), l'ensemble $\mathrm{T}(f; E)$ possède une tangente extrême dans tout son point $(x_0, F(x_0))$, à un ensemble T_1 de longueur nulle près, le demi-plan $y - y_0 \geqslant \overline{F}^+(x_0) \cdot (x - x_0)$ étant un côté vide de cette tangente. Par suite, en désignant par E_1 la projection de T_1 sur l'axe des x et en tenant compte des remarques faites au début de ce §, on voit que dans tout point x de l'ensemble $E - E_1$ les dérivés $\overline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^-(x)$ sont égaux, leur valeur commune étant égale au coefficient angulaire de la tangente extrême de l'ensemble $\mathrm{T}(F; E)$ au point $(x, F(x))$. Or, $\lambda[\mathrm{T}(F; E - E_1)] = \lambda(T_1) = 0$ ce qui achève la démonstration.

On obtient aisément du théorème A le suivant [6])

Théorème B. *Si pour une fonction $F(x)$ on a $|\overline{F}^+(x)| \leqslant M$ dans tout point d'un ensemble E, alors* $|F(E)| \leqslant M \cdot \mathrm{mes}\, E$, $\lambda[\mathrm{T}(F; E)] \leqslant (M+1) \cdot \mathrm{mes}\, E$.

Enfin, comme une conséquence immédiate du th. 2 (§ 2) on peut noter le théorème suivant [7]):

[6]) Ce théorème a été démontré antérieurement sur une autre voie et dans une forme un peu moins complète que celle du texte; cf. S. Saks, *Sur un théorème de M. Lusin*, Fundam. Math., t. 6 (1924), 111—116; aussi *T. I.*, p. 174—177.

[7]) Cf. S. Saks et A. Zygmund, l. c.

Théorème C. *Pour toute fonction $F(x)$, l'ensemble A des points où $\lim_{h\to 0+} |F(x+h)-F(x)|/h=\infty$ est de mesure nulle.*

Car, en chacun de ses points, l'ensemble $\mathrm{T}(F;A)$ possède une tangente extrême parallèle à l'axe des y.

(Supplément à l'épreuve de tirage). M. F. Roger a bien voulu m'envoyer ses Notes de C. R. 201 (1935), p. 871 et 202 (1936), p. 377 où il annonce des théorèmes à peu près équivalents aux miens et leur extension sur les espaces n-dimensionnels. Or, les méthodes employées plus haut conduisent aussi à cette extension. En nous bornant p. ex. à l'espace à 3 dimensions, appelons *plan tangent médian de E en a* tout plan α passant par $a\in E$ et tel que chaque demi-droite située sur α et issue de a est une demi-tangente médiane de E en a. Les définitions du *côté vide* d'un plan tangent médian, du *plan tangent extrême* et du *plan tangent unique* sont alors évidentes et on a l'extension suivante du lemme du § 2:

R désignant un ensemble dans l'espace à 3 dimensions et P un ensemble des points $a\in R$ où $\mathrm{contg}_R\, a$ *ne contient pas la demi-droite $\hat{a}(\pi/2)$, 1° dans tout point de P, à un ensemble de longueur nulle près, un plan tangent extrême à R existe, la demi-droite $\hat{a}(\pi/2)$ étant située du côté vide de ce plan 2° l'ensemble P est contenu dans la somme d'une suite d'ensembles $\mathrm{T}(F_n;Q_n)$ où Q_n sont des ensembles fermés dans le plan xy et les fonctions $F_n(x,y)$ satisfont sur eux à la condition de Lipschitz.*

La marche de la démonstration est analogue à celle du lemme du § 2, en tenant compte du th. connu de M. Rademacher sur l'existence d'une différentielle totale. On en tire l'extension suivante du th. 1 du § 2:

L'ensemble P des points a de R où $\mathrm{contg}_R\, a$ *n'est pas l'espace entier est somme d'une suite d'ensembles fermés de surface finie. De plus, en tout point a de P, excepté au plus un sous-ensemble de surface nulle,* $\mathrm{contg}_R\, a$ *est soit un demi-espace, soit un plan tangent unique.*

On en déduit les extensions des th. A et B du § 4, qui embrassent les généralisations connues du th. de M. Rademacher. Enfin, par l'extension directe du th. 2, on montre que *P désignant l'ensemble des points de R où il existe un plan tangent extrême à R, parallèle à une droite D, la projection orthogonale de P sur le plan perpendiculaire à D est de surface nulle.*

Summen von $\aleph_1$ Mengen.

Von

F. Hausdorff (Bonn).

Ein metrischer separabler Raum X sei als Summe von $\aleph_1$ wachsenden Borelschen Mengen X^ξ ($\xi<\Omega$) dargestellt:

$$(1)\qquad X=\sum_\xi X^\xi,\qquad X^0\subset X^1\subset\ldots\subset X^\xi\subset\ldots$$

Es sei

$$(2)\qquad T^\xi=X-X^\xi$$

das Komplement von X^ξ, also

$$0=\prod_\xi T^\xi,\qquad T^0\supset T^1\supset\ldots\supset T^\xi\supset\ldots$$

Die Summe (1) heisse

k-konvergent (der Kategorie nach konvergent), wenn schliesslich (für $\xi\geqq\alpha$) T^ξ von 1. Kategorie in X ist,

m-konvergent (dem Masse nach konvergent), wenn für *jede* absolut additive, endliche, nichtnegative Massfunktion $|A|$, die mindestens für die Borelschen Mengen $\subset X$ (auch für X selbst) definiert ist, schliesslich $|T^\xi|=0$ ist.

Beide Eigenschaften sind trivial, wenn schliesslich $T^\xi=0$ ist. Wir nennen die Summe (1) *unabzählbar*, wenn stets $T^\xi\neq 0$, $X^\xi\neq X$ ist; sie lässt sich dann durch Übergang zu einer Teilfolge in eine Summe mit paarweise verschiedenen Summanden X^ξ verwandeln.

Wenn insbesondere

$$(3)\qquad T^\xi=\sum_n T_n^\xi,$$

wo der Index n eine abzählbare Menge N durchläuft, die T_n^ξ Borelsche Mengen und für jedes n die Mengen

$$(4)\qquad T_n^0,\ T_n^1,\ \ldots,\ T_n^\xi,\ldots$$