Bemerkungen zur Pontrjaginschen Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes.

Von

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Als eine naturgemässe Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes hat L. Pontrjagin[1]) folgenden Satz bewiesen:

Ist K irgend ein Teilkompaktum des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n, so ist die zur r-dimensionalen Zyklosis von K duale Gruppe mit der $(n-r-1)$-ten Bettischen Gruppe[2]) $B^{n-r-1}(R_n - K)$ des Komplementärraumes $R_n - K$ isomorph.

Es ergibt sich insbesondere aus diesem Satze, dass *die Bettischen Gruppen von $R_n - K$ topologische Invarianten des Kompaktums K sind.*

Es soll in dieser Arbeit gezeigt werden, dass man durch ein dem Pontrjaginschen ähnliches Verfahren jedem separablen lokal kompakten Raume E eine Gruppe $C^r(E)$ für $r=0, 1, 2, \ldots$ auf eine topologisch invariante Weise zuordnen kann, und zwar so, dass im Falle $E = R_n - K$ eine Isomorphie zwischen $C^r(E)$ und $B^{n-r-1}(K)$ besteht. Es wird sich insbesondere daraus ergeben, dass *die Bettischen Gruppen des Kompaktums K topologische Invarianten seines Komplementes $R_n - K$ sind.*

Es ist leicht einzusehen, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Raum E separabel und lokal kompakt sei, durch die Existenz in E einer unendlichen Folge von Kompakten $\{Q_k\}$ mit den Eigenschaften:

[1]) Math. Ann. 105 (1931), S. 198.

[2]) Unter einer Bettischen Gruppe wird im folgenden stets eine *freie* Bettische Gruppe mit dem *ganzzahligen* Koeffizientenbereich verstanden.

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k, \tag{1}$$

$$Q_k \subset \mathrm{Int}\,(Q_{k+1})\,^{3)} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

gegeben ist.

Durch die Inklusion (2) wird eine homomorphe Abbildung von $B^r(Q_k)$ in eine gewisse Untergruppe von $B^r(Q_{k+1})$ bestimmt. Man erhält somit eine direkte Homomorphismenfolge[4])

$$B^r(Q_1) \to B^r(Q_2) \to \ldots \to B^r(Q_k) \to \ldots \tag{3}$$

Die ganzzahligen Charakterengruppen $\mathfrak{C}(B^r(Q_k))$[5]) bilden dann eine inverse Homomorphismenfolge

$$\mathfrak{C}(B^r(Q_1)) \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q_2)) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q_k)) \leftarrow \ldots \tag{4}$$

Um zu beweisen, dass ihre Limesgruppe eine topologische Invariante des Raumes E ist, genügt es zu zeigen, dass sie von der Wahl der Folge $\{Q_k\}$ nicht abhängt.

Es sei also $\{Q'_k\}$ eine die Bedingungen (1) und (2) ebenfalls erfüllende Folge von kompakten Teilmengen von E. Es gibt dann offenbar zwei wachsende Indizesfolgen $\{i_k\}$ und $\{i'_k\}$ derart, dass

$$Q_{i_k} \subset \mathrm{Int}\,(Q'_{i'_k}) \subset Q'_{i'_k} \subset \mathrm{Int}\,(Q_{i_{k+1}}) \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

gilt. Dadurch wird eine homomorphe Abbildung von $B^r(Q_{i_k})$ in $B^r(Q'_{i'_k})$ und von $B^r(Q'_{i'_k})$ in $B^r(Q_{i_{k+1}})$ bestimmt. Man erhält also eine direkte Homomorphismenfolge

$$B^r(Q_{i_1}) \to B^r(Q'_{i'_1})) \to B^r(Q_{i_2}) \to \ldots \to B^r(Q_{i_k}) \to B^r(Q'_{i'_k}) \to \ldots$$

und somit eine inverse Homomorphismenfolge

$$\mathfrak{C}(B^r(Q_{i_1})) \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q'_{i'_1})) \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q_{i_2})) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q_{i_k})) \leftarrow \mathfrak{C}(B^r(Q'_{i'_k})) \leftarrow \ldots$$

[3]) Int (X) bedeutet das *Innere* von X, d. h. die Vereinigungsmenge aller offenen Teilmengen von X.

[4]) Über die Theorie der Homomorphismenfolgen, ist Näheres in der unter [1]) zitierten Arbeit von Pontrjagin (S. 194) und in der Arbeit H. Freudenthal, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), S. 414 nachzulesen.

[5]) Unter der ganzzahligen Charakterengruppe einer Gruppe wird die Gruppe ihrer homomorphen Abbildungen auf Untergruppen der additiven Gruppe der ganzen Zahlen verstanden.

Dies bedeutet aber eine Äquivalenz der inversen Homomorphismenfolgen $\{\mathfrak{C}(B^r(Q_k))\}$ und $\{\mathfrak{C}(B^r(Q'_k))\}$ und somit eine Isomorphie ihrer Limesgruppen. Die Limesgruppe von $\{\mathfrak{C}(B^r(Q_k))\}$ ist also tatsächlich eine topologische Invariante von E. Sie wird im folgenden mit $C^r(E)$ bezeichnet.

Ist insbesondere der Raum E kompakt, so kommt für hinreichend grosse k, wie leicht ersichtlich, $E = Q_k$. Da aber $C^r(E)$ die Limesgruppe von (4) ist, so erhalten wir $C^r(E) = \mathfrak{C}(B^r(E))$. Ist $B^r(E)$ eine Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden (wie es z. B. stets stattt hat, wenn E ein Polyeder ist), so ist die Gruppe $C^r(E)$ mit $B^r(E)$ isomorph.

Falls $E = R_n - K$ ist, lässt sich als Folge Q_n mit den Eigenschaften (1) und (2) eine Polyederfolge wählen. Es besteht dann die Inklusion $R_n - Q_{k+1} \subset R_n - Q_k$, wodurch eine homomorphe Abbildung von $B^{n-r-1}(R_n - Q_{k+1})$ in $B^{n-r-1}(R_n - Q_k)$ bestimmt wird. Man erhält somit eine inverse Homomorphismenfolge

$$(5)\quad B^{n-r-1}(R_n - Q_1) \leftarrow B^{n-r-1}(R_n - Q_2) \leftarrow \ldots \leftarrow B^{n-r-1}(R_n - Q_k) \leftarrow \ldots$$

Versteht man ferner für $x_k \in B^r(Q_k)$, $y_k \in B^{n-r-1}(R_n - Q_k)$ unter $x_k \cdot y_k$ die Verschlingungszahl der zugehörigen Zyklen, so erweisen sich nach Pontrjagin [6]) die Folgen (3) und (5) als orthogonal [7]). Da auch die Folgen (3) und (4) orthogonal sind, so sind die Limesgruppen der Folgen (4) und (5) isomorph. Es besteht also eine Isomorphie zwischen der Gruppe $C^r(R_n - K)$ und der Gruppe $B^{n-r-1}(K)$ als der Limesgruppe von (5).

Einer besonders einfachen Deutung ist dieses Ergebnis im Falle $r = 1$ fähig. Zur Folge (3) ist dann nämlich die inverse Homomorphismenfolge

$$\mathfrak{B}_1(Q_1) \leftarrow \mathfrak{B}_1(Q_2) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{B}_1(Q_k) \leftarrow \ldots {}^{8})$$

[6]) l. c., S. 199.

[7]) Diese Beziehung zwischen den Homomorphismenfolgen genügt allein *nicht*, um irgendeine Beziehung zwischen den Limesgruppen $B^{n-r-1}(K)$ und $B^r(R_n - K)$ feststellen zu können. Trotzdem hat L. Pontrjagin eine Abhängigkeit der Gruppe $B^r(R_n - K)$ vom Kompaktum K gefunden, und zwar dur Einführung der sog. *zur* $(n-r-1)$-*dimensionalen Zyklosis des Kompaktum* K *dualen Gruppe*. Unsere Gruppe $C^r(R_n - K)$ bildet ein Analogon dieser dualen Gruppe und erlaubt die Abhängigheit der Gruppe $B^{n-r-1}(K)$ von der Menge $R_n - K$ festzustellen.

[8]) $\mathfrak{B}_1(E)$ bezeichnet die Gruppe der Abbildungsklassen des Raumes E in die eindimensionale Sphäre S_1. Siehe z. B. K. Borsuk und S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), S. 207.

orthogonal, deren Limesgruppe die Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_n - K)$ ist [9]). Es ergibt sich also eine Isomorphie zwischen den Gruppen $\mathfrak{B}_1(R_n - K)$ und $C^1(R_n - K)$. So erhält man den Satz [10]), nach welchem die Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_n - K)$ mit der Gruppe $B^{n-2}(K)$ isomorph ist.

Bis jetzt haben wir nur die *ganzzahligen* Bettischen Gruppen betrachtet, wobei die Orthogonalität durch die *ganzen* Verschlingungszahlen bestimmt, d. h. Bettische Gruppen und Orthogonalität *mod. 0* verstanden, waren. Betrachtet man aber statt der ganzzahligen Orthogonalität die *Orthogonalität mod. 1* [11]), so gestaltet sich die Frage nach einer Erweiterung der Dualitätssätze auf beliebige Kompakta einfacher.

Die Beziehung der Orthogonalität bestimmt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den abelschen höchstens abzählbaren diskreten und den abelschen topologischen kompakten Gruppen. Bezeichnen wir mit G und X ein solches Paar von Gruppen, die zueinander mod. 1 orthogonal sind, so erhalten wir den von Pontrjagin [12]) bewiesenen Dualitätssatz in folgender Gestalt: *Die Gruppen* $B^r_G(R_n - K)$ *und* $B^{n-r-1}_X(K)$ *sind orthogonal mod. 1* (dabei bezeichnet B^r_G bzw. B^{n-r-1}_X die Bettische Gruppe mod. G bzw. mod. X).

Der Satz wird zunächst für den Fall bewiesen, wo K ein Polyeder ist. Der Übergang zum beliebigen Kompaktum ist durch folgenden Satz gegeben, dessen Beweis implizit bei Pontrjagin [13]) enthalten ist: Ist $\{X_k\}$ eine aus kompakten Gruppen bestehende inverse Homomorphismenfolge und $\{H_k\}$ eine zu $\{X_k\}$ mod. 1 orthogonale Homomorphismenfolge, so sind auch die Limesgruppen [14]) beider Folgen zueinander mod. 1 orthogonal.

[9]) Siehe hierzu K. Borsuk und S. Eilenberg, l. c., S. 219—220, [31]) und [34]).

[10]) ibid., S. 212.

[11]) Die Theorie der Orthogonalität mod. 1 hat L. Pontrjagin in den Ann. of Math. 35 (1934), S. 361—388 dargestellt. Die Anwendungen dieser Theorie auf topologische Dualitätssätze sind in seiner Arbeit in demselben Bande der genannten Zeitschrift (S. 904—914) zu finden.

[12]) Ann. of Math. 35 (1934), S. 912.

[13]) ibid., S. 913—914.

[14]) Nach einer Bemerkung von H. Freudenthal (l. c., S. 414), kann die Limesgruppe der inversen Homomorphismenfolge der topologischen Kompakten Gruppen selbst als eine topologische kompakte Gruppe aufgefasst werden.

Es ist zu bemerken, dass die Voraussetzung, nach der die kompakten Gruppen eine *inverse* Homomorphismenfolge bilden sollen, für die Gültigkeit des letzten Satzes wesentlich ist. Man ersieht daraus, warum in der Pontrjaginschen Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes der Koeffizientenbereich für das Kompaktum K als eine *kompakte* und für das Komplement $R_n - K$ als eine *diskrete* Gruppe vorauszusetzen ist.

Note on the projection of irregular linearly measurable plane sets of points.

By

J. Gillis (Cambridge).

1. Saks[1]) and Besicovitch[2]) have both constructed irregular linearly measurable[3]) plane sets of positive linear measure whose projections on all directions have Lebesgue measure zero. The existence of these has been the starting point for some investigations[4]) into the structure of irregular sets. One question which suggests itself is whether *parallel projections*, for which the stated property holds, is „privileged", i. e., whether or not it may be possible to prove an analogous result for projection from a finite point in the plane of the set. The justification of the concept „projection from a point" lies in the fact that, if the projection of a plane set from a point of the plane on a straight line not passing through the point has measure zero, then the same is true for any other line which does not contain the point. I shall not prove this statement since the proof is quite trivial, but it is important in that it enables us to say that *the projection from a point is zero or positive*[5]) *without reference to the line on to which the projection is made.*

---

[1]) S. Saks, Fundamenta Mathematicae, 9 (1927), pp. 16—24.

[2]) A. S. Besicovitch, *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points*; Math. Annalen, 98 (1928) pp. 422—464. See, in particular, pp. 431—434. A description of the set is given in § 3 below.

[3]) i. e. in the sense of Carathéodory, cf. Carathéodory, Gött. Nachrichten, (1914), pp. 404—426.

[4]) cf. *On linearly measurable plane sets of points of upper density* $\frac{1}{2}$, Fund. Math., 22 (1934), pp. 57—69.

[5]) i. e. has zero or positive Lebesgue measure.