Un théorème sur les fonctions de classe 1.

Par

B. Vulich (Leningrad).

On connait le théorème classique de M. Baire: „*pour que la fonction $f(x)$, définie sur l'ensemble parfait P, soit une fonction de Baire de classe 1, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, sur chaque ensemble parfait $H \subset P$, l'ensemble de points x dans lesquels l'oscillation de la fonction $f(x)$ (relativement à cet ensemble H) surpasse ε soit non-dense*".

J'ai obtenu un théorème plus fort dans le sens de la suffisance que celui de M. Baire, en utilisant le procédé transfini employé ordinairement pour la démonstration de ce dernier.

Définition. Nous appellerons oscillation supérieure de la fonction $f(x)$ au point $x_0 \in H$ (relativement à cet ensemble H) la valeur de l'expression

$$\mathrm{Max}\,(f, x_0, H) - f(x_0),$$

où

$$\mathrm{Max}\,(f, x_0, H) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f(x).$$

Il est bien entendu que la fonction $f(x)$ est définie sur un ensemble $H' \supset H$.

Je montrerai qu'on peut remplacer dans le texte du théorème de M. Baire le mot oscillation par oscillation supérieure; ainsi on arrive au théorème suivant:

Théorème. *Pour que la fonction finie $f(x)$, définie sur l'ensemble parfait P, soit une fonction de Baire de classe 1, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, sur chaque ensemble parfait $H \subset P$, l'ensemble de points x dans lesquels l'oscillation supérieure de la fonction $f(x)$ (relativement à cet ensemble H) surpasse ε soit non-dense.*

Je démontrerai préalablement un lemme auxiliaire qui généralise un peu un lemme de M. Lebesgue[1]).

Soit $f(x)$ une fonction finie, définie sur l'ensemble parfait P.

Lemme. *Supposons que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles fermés $E_1, \dots, E_n, \dots$ tels que*

1. *une fonction de classe 1, $f_n(x)$, soit définie sur chaque ensemble E_n,*
2. $$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } x \in E_n,$$
3. $$P = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Dans ces conditions $f(x)$ est une fonction de classe 1.

Démonstration. Nous montrerons que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction de classe 1, $F(x)$, définie sur l'ensemble P, telle que

$$|F(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

pour tout $x \in P$. Il en résultera immédiatement que $f(x)$ est une fonction de classe 1.

Prenons un $\varepsilon > 0$ arbitraire, mais fixe, et posons

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{sur } E_1 \\ f_2(x) & \text{sur } E_2 - \overline{E}_1 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ f_n(x) & \text{sur } E_n - \overline{E}_{n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

où

$$\overline{E}_k = E_1 + \dots + E_k \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

et $f_n(x)$ sont les fonctions correspondantes à la valeur choisie de ε suivant les conditions du lemme.

Remarquons qu'on peut considérer les fonctions $f_n(x)$ comme définies sur l'ensemble P tout entier, sans changer leur classe. En effet, supposons que l'ensemble P est situé dans l'intervalle fermé J. Nous pouvons prolonger f_n sur l'intervalle J, par exemple en l'interpolant linéairement dans les intervalles contigus à E_n. Il est aisé de vérifier que la fonction f_n étendue de cette manière à l'intervalle J est une fonction de classe 1 non seulement sur l'ensemble P, mais aussi sur l'intervalle J tout entier. Un raisonne-

[1]) H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, S. 353, Satz II.

ment semblable peut être fait dans le cas où l'ensemble P n'est pas borné.

Pour que $F(x)$ soit une fonction de classe 1, il faut et il suffit que pour tout a les ensembles $\mathcal{E}(F>a)$ et $\mathcal{E}(F<a)$ soient des F_σ[1]. Cette condition est remplie dans le cas présent, ce qui suit des égalités évidentes:

$$\mathcal{E}(F>a)=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n-\overline{E}_{n-1})\cdot\mathcal{E}(f_n>a)$$

(2)

$$\mathcal{E}(F<a)=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n-\overline{E}_{n-1})\cdot\mathcal{E}(f_n<a),$$

où

$$\overline{E}_k=E_1+\ldots+E_k \qquad (k=1,2,\ldots)$$

et $\overline{E}_0$ est l'ensemble vide.

En effet, f_n étant des fonctions de classe 1, tous les ensembles $\mathcal{E}(f_n>a)$ et $\mathcal{E}(f_n<a)$ sont des F_σ; de même les ensembles $E_n-\overline{E}_{n-1}$ sont des F_σ comme des différences d'ensembles fermés; les premiers termes des égalités (2) sont donc des ensembles F_σ. Par conséquent, quel que soit $\varepsilon>0$, on peut construire une fonction de classe 1, $F(x)$, pour laquelle l'égalité (1) soit vérifiée, c. q. f. d.

Démonstration du théorème. En vertu du théorème de M. Baire, cité ci-dessus, la nécessité de notre condition n'éxige pas de démonstration. Nous en démontrerons donc la suffisance.

Chaque ensemble fermé étant un ensemble parfait ou contenant des points isolés, et chaque fonction $f(x)$ étant continue au point isolé, il est évident que si la condition du théorème est remplie sur chaque ensemble parfait, elle est aussi remplie sur chaque ensemble fermé.

Nous montrerons que, quel que soit $\varepsilon>0$, la condition du lemme est remplie pour la fonction $f(x)$; il s'en suivra que $f(x)$ est une fonction de classe 1.

Pour conserver l'uniformité, désignons par F_1 l'ensemble P. En vertu de la condition du théorème, l'ensemble des points, dans lesquels l'oscillation supérieure de la fonction $f(x)$ surpasse ε, est non-dense sur F_1. Par conséquent, sa fermeture[2] F_2 ne coïncide pas avec F_1.

[1] H. Hahn, l. c., S. 350, Satz III. F_σ est la somme d'un ensemble dénombrable d'ensembles fermés.

[2] La fermeture d'un ensemble est la somme de cet ensemble et de son dérivé.

Posons

$$M_1=F_2-F_1.$$

M_1 est donc un F_σ et, par conséquent,

$$M_1=\sum_{k=1}^{\infty}M_1^{(k)}$$

où $M_1^{(k)}$ sont des ensembles fermés.

Définissons sur chaque ensemble $M_1^{(k)}$ une fonction semicontinue supérieurement (qui est à fortiori une fonction de classe 1) $\varphi_1^{(k)}(x)$, en posant

$$\varphi_1^{(k)}(x)=\mathrm{Max}\,(f,x,M_1^{(k)}).$$

L'inégalité

$$|\varphi_1^{(k)}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

est vérifiée pour tout $x\in M_1^{(k)}$, car l'oscillation supérieure de la fonction $f(x)$ à ces points (relativement à l'ensemble P) ne surpasse pas ε.

Nous appliquerons ensuite l'induction transfinie. Supposons que les ensembles fermés F_β soient déjà définis pour tout $\beta<\alpha$ $(\alpha<\Omega)$ et que

1. $F_{\beta'}\subset F_\beta$ si $\beta'>\beta$,
2. $M_\beta=F_\beta-F_{\beta+1}$ n'est vide pour aucun $\beta+1<\alpha$,
3. Si β est un nombre de 2[de] espèce, $F_\beta=\prod_{\beta'<\beta}F_{\beta'}$.

On peut présenter chaque ensemble M_β $(\beta+1<\alpha)$ sous la forme:

$$M_\beta=\sum_{k=1}^{\infty}M_\beta^{(k)},$$

où $M_\beta^{(k)}$ sont des ensembles fermés; supposons qu'une fonction semicontinue supérieurement $\varphi_\beta^{(k)}(x)$ telle que

$$|\varphi_\beta^{(k)}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x\in M_\beta^{(k)}$$

soit définie sur chaque ensemble $M_\beta^{(k)}$.

Alors, si α est un nombre de 1[re] espèce, désignons par F_α la fermeture de l'ensemble des points $x\in F_{\alpha-1}$ dans lesquels

$$\mathrm{Max}\,(f,x,F_{\alpha-1})-f(x)>\varepsilon.$$

Posons

$$M_{\alpha-1} = F_{\alpha-1} - F_\alpha$$

et remarquons que l'ensemble $M_{\alpha-1}$ n'est pas vide. On peut présenter l'ensemble $M_{\alpha-1}$ sous la forme

$$M_{\alpha-1} = \sum_{k=1}^{\infty} M_{\alpha-1}^{(k)},$$

où $M_{\alpha-1}^{(k)}$ sont des ensembles fermés.

Définissons sur chaque ensemble $M_{\alpha-1}^{(k)}$ une fonction semicontinue supérieurement $\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x)$, en posant

$$\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x) = \mathrm{Max}\,(f, x, M_{\alpha-1}^{(k)}).$$

On a évidemment

$$|\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{sur} \quad M_{\alpha-1}^{(k)}.$$

Dans le cas où α est un nombre de 2[de] espèce, posons

$$F_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} F_\beta.$$

D'après le théorème bien connu de M. Baire sur les suites bien ordonnées et non croissantes d'ensembles fermés, il existe un nombre transfini $\mu < \Omega$ tel que F_μ est un ensemble vide. Donc, on peut décomposer P par le procédé indiqué en un ensemble dénombrable d'ensembles fermés $\{M_\alpha^{(k)}\}$ sur chacun desquels est définie une fonction semicontinue supérieurement $\varphi_\alpha^{(k)}(x)$ et

$$|\varphi_\alpha^{(k)}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in M_\alpha^{(k)},$$

c. q. f. d.

Leningrad, Avril 1935.

Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie.

Von

K. Borsuk und S. Eilenberg (Warszawa).

Ist M ein metrischer Raum, so bezeichnet S_1^M die (abelsche) Gruppe, die als Elemente stetige Abbildungen von M in die, in der komplexen z-Ebene liegende Kreislinie $S_1 = \underset{z}{\mathrm{E}}[|z| = 1]$ hat, wobei die Zusammensetzung von Elementen die gewöhnliche Multiplikation ist. Zwei Abbildungen $f_1, f_2 \in S_1^M$ werden dabei *äquivalent* in einer gewissen Teilmenge N von M genannt (Bezeichnung: $f_1 \sim f_2$ in N), wenn es eine stetige reelle Funktion φ gibt, für welche $f_1(x) : f_2(x) = e^{i\varphi(x)}$ für jedes $x \in N$ gilt. Die mit 1 (d. h. mit der Funktion $f(x) \equiv 1$, welche das neutrale Element von S_1^M ist) im ganzen Raum M äquivalenten Funktionen [1]) bilden eine Untergruppe $P(M)$ von S_1^M. Die Faktorgruppe von S_1^M nach $P(M)$ wird mit $\mathfrak{B}_1(M)$ bezeichnet.

Es ist bekannt [2]), dass das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl eines Kompaktums M eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$ bildet. Für nicht kompakte Räume verhält sich die Sache anders. Wir werden nämlich in vorliegender Arbeit zeigen, dass schon im dreidimensionalen euklidischen Raum R_3 offene Mengen G existieren, für welche die eindimensionale Bettische Zahl positiv ist, obwohl die Gruppe $\mathfrak{B}_1(G)$

---

[1]) Es ist leicht zu beweisen, dass für Kompakta die mit 1 äquivalenten Abbildungen mit den sog. *unwesentlichen* Abbildungen gleichbedeutend sind. S. hierzu S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), S. 162; auch Fund. Math. 26 (1936), S. 68.

[2]) Siehe hierzu K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 224—231. Genauere Ergebnisse, u. a. die vollständige Bestimmung der ersten Bettischen Zahl von M durch die Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$, befinden sich in der Arbeit von N. Bruschlinsky, Math. Ann. 109 (1934), S. 525—537.