Über die Zusammensetzung Bairescher Funktionen.

Von

Hans Fried (Wien).

Ich beschränke mich auf reelle Funktionen, die in $(-\infty<x<+\infty)$ definiert sind.

Unter C verstehe ich die Menge aller stetigen Funktionen. Ich setze $B_0=C$ und erhalte die Bairesche Klassifikation, indem ich unter B_α $(0<\alpha<\Omega)$ die Menge aller Funktionen verstehe, die sich in der Form $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$ darstellen lassen, wobei $f_n \epsilon B_{\alpha_n}$ $(\alpha_n<\alpha)$. Es ist also für $\alpha'<\alpha$ $B_{\alpha'}\subset B_\alpha$.

Ich setze $\Phi_0=C$ und verstehe unter Φ_α $(0<\alpha<\Omega)$ die Menge aller Funktionen $f(x)$, die sich in der Form $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} f_1 f_2 \dots f_n(x)$ darstellen lassen, wobei $f_n(x) \epsilon \Phi_{\alpha_n}$ $(\alpha_n<\alpha)$. Für $\alpha'<\alpha$ ist $\Phi_{\alpha'}\subset\Phi_\alpha$. Für $\alpha'>0$ folgt dies aus der Definition; ist $f(x)\epsilon\Phi_0$, so ist $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} f_1 f_2 \dots f_n(x)$, wobei $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f_3(x)=\dots=f_n(x)=x$, so daß $f(x)\epsilon\Phi_1$ und daher $f(x)\epsilon\Phi_\alpha$.

Mit Φ werde die Menge aller Funktionen bezeichnet, die irgend eine Klasse Φ_α $(0\leqslant\alpha<\Omega)$ angehören.

Herr Sierpiński[1]) hat bewiesen, daß die Beziehung $\Phi_1=B_1$ gilt, daß die Funktionen Φ mit den Baireschen Funktionen identisch sind, und stellt die Frage, ob die Beziehung $\Phi_2=B_\omega$ richtig ist. In vorliegender Arbeit wird diese Frage in bejahendem Sinne beantwortet und überdies angegeben, welche Bairesche Funktionen zu einer Klasse Φ_α gehören.

[1]) Fund. Math. 24 (1935), S. 1.

I. Hilfssatz: Ist β eine isolierte Zahl $(1\leqslant\beta<\Omega)$, so gibt es zu jeder Funktion $f(x)\epsilon B_{\omega^\beta}$ eine Folge von Funktionen $\{f_n(x)\}$ $(f_n(x)\epsilon B_{\omega^{\beta-1}}$, $\omega^0=1)$, so daß

$$f(x)=\lim_{n=\infty} f_1 f_2 \dots f_n(x).$$

Beweis: Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x), \tag{1}$$

wobei $\varphi_n(x)\epsilon B_{\omega^{\beta-1}\cdot n}$ $(n=1, 2, 3,\dots)$.

Nach Herrn Lindenbaum[2]) läßt sich jede Funktion von $\omega^{\beta-1}\cdot n$-ter Bairescher Klasse aus n Funktionen $\omega^{\beta-1}$-ter Klasse zusammensetzen. Es ist nun nach dem Satz vom Herrn Lindenbaum

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= g_1(x)\\ \varphi_2(x) &= h_2\, g_2(x)\\ \varphi_3(x) &= h_3\, u_3^1\, g_3(x)\\ \varphi_4(x) &= h_4\, u_4^1\, u_4^2\, g_4(x)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x) &= h_n\, u_n^1\, u_n^2 \dots u_n^{n-3}\, u_n^{n-2}\, g_n(x)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei die vorkommenden Funktionen $g_n(x)$, $u_n^r(x)$ und $h_n(x)$ in $(-\infty<x<+\infty)$ definiert und von $\omega^{\beta-1}$-ter Klasse sind.

Unter $t_{(\nu-1,\nu)}(x)$ werde eine homöomorphe Abbildung des Intervalls $(\nu-1, \nu)$ auf das Gebiet der reellen Zahlen $(-\infty, +\infty)$ und unter $t^{-1}_{(\nu-1,\nu)}$ die Umkehrung dieser Abbildung verstanden.

Wegen (2) ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= g_1(x)\\ \varphi_2(x) &= h_2\, t_{(1,2)}\, t^{-1}_{(1,2)}\, g_2(x)\\ \varphi_3(x) &= h_3\, t_{(2,3)}\, t^{-1}_{(2,3)}\, u_3^1\, t_{(2,3)}\, t^{-1}_{(2,3)}\, g_3(x)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x) &= h_n\, t_{(n-1,n)}\, t^{-1}_{(n-1,n)}\, u_n^1\, t_{(n-1,n)}\, t^{1}_{(n-1,n)} \dots g_n(x). \end{aligned} \tag{3}$$

[2]) Fund. Math. 23 (1934), S. 31.

Nun werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&t^{-1}_{(n-1,\,n)}\, g_n(x) = G_n(x) && (n = 2, 3, 4, \ldots)\\
&t^{-1}_{(n-1,\,n)}\, u^r_n\, t_{(n-1,\,n)}(x) = U^r_n(x) && \begin{pmatrix} n=3, 4, 5, \ldots \\ r=1, 2, 3, \ldots, n-2 \end{pmatrix}\\
&h_n\, t_{(n-1,\,n)}(x) = H_n(x). && (n=2, 3, \ldots).
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $G_n(x)$, $U^r_n(x)$, $H_n(x)$ sind Funktionen von $\omega^{\beta-1}$-ter Klasse [3]).

(5) Der Definitionsbereich von $G_n(x)$ ist $(-\infty, \infty)$ und es ist $n-1 < G_n(x) < n$;
der Definitionsbereich von $U^r_n(x)$ ist $(n-1, n)$ und es ist $n-1 < U^r_n(x) < n$;
der Definitionsbereich von $H_n(x)$ ist $(n-1, n)$.

Die Formeln (3) gehen mit der Bezeichnungsweise (4) über in

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = g_1(x)\\
&\varphi_2(x) = H_2\, G_2(x)\\
&\varphi_3(x) = H_3\, U^1_3\, G_3(x)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\varphi_n(x) = H_n\, U^1_n\, U^2_n \ldots U^{n-3}_n\, U^{n-2}_n\, G_n(x)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

Nun definiere ich die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$, wie folgt:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&f_1(x) = g_1(x) && \text{für } x \leqslant 1\\
&f_1(x) = 0 && \text{für } x = 2, 3, 4, \ldots\\
&f_1(x) = H_i(x) && \text{für } i-1 < x < i \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot && \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&f_n(x) = G_n(x) && \text{für } x \leqslant n\\
&f_n(x) = 0 && \text{für } x = n+1, n+2, n+3, \ldots\\
&f_n(x) = U^{n-1}_{n+i}(x) && \text{für } n+i-1 < x < n+i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $f_n(x)$ sind von $\omega^{\beta-1}$-ter Klasse.

Ist n irgend eine natürliche Zahl $\geqslant 2$, so gelten, wie ich zeigen werde, folgende Beziehungen:

$$
(8)\qquad f_1 f_2 \ldots f_n(x) = \varphi_n(x) \qquad \text{für} \quad x \leqslant n
$$

und

$$
(9)\qquad f_1 f_2 \ldots f_n(x) = H_{n+r+1}\, U^1_{n+r+1}\, U^2_{n+r+1} \ldots U^{n-1}_{n+r+1}(x) \quad \text{für} \quad n+r < x < n+r+1 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).
$$

[3]) C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, § 27. III.

Diese Beziehungen sind für $n=2$ richtig. Denn für $x \leqslant 2$ ist nach (7) $f_2(x) = G_2(x)$ und da nach (5) $1 < G_2(x) < 2$ ist, so ist wegen (7) und (6) $f_1 f_2(x) = H_2\, G_2(x) = \varphi_2(x)$, und dies ist die Beziehung (8).

Für $2+r < x < 2+r+1$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ ist nach (7) $f_2(x) = U^1_{3+r}(x)$ und da nach (5) $2+r < U^1_{3+r}(x) < 3+r$ ist, so ist wegen (7)

$$
f_1 f_2(x) = H_{3+r}\, U^1_{3+r}(x),
$$

und dies ist die Beziehung (9) für $n=2$.

Nun zeige ich, daß die Beziehungen (8) und (9) für $n+1$ richtig sind, wenn sie für n gelten.

Für $x \leqslant n+1$ ist nach (7) $f_{n+1}(x) = G_{n+1}(x)$; da nach (5) $n < G(x) < n+1$ und nach Annahme die Beziehung (9) für n gilt, ist

$$
f_1 f_2 \ldots f_n f_{n+1}(x) = f_1 f_2 \ldots f_n\, G_{n+1}(x) = H_{n+1}\, U^1_{n+1} \ldots U^{n-1}_{n+1}\, G_{n+1}(x)
$$

und wegen (6)

$$
f_1 f_2 \ldots f_n f_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x);
$$

dies ist die Beziehung (8) für $n+1$.

Für $n+1+r < x < n+1+r+1$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ ist nach (7) $f_{n+1}(x) = U^n_{n+r+2}(x)$; da nach (5) $n+r+1 < U^n_{n+r+2}(x) < n+r+2$ und nach Annahme die Beziehung (9) für n gilt, ist

$$
f_1 f_2 \ldots f_n f_{n+1}(x) = f_1 f_2 \ldots f_n\, U^n_{n+r+2}(x) = H_{n+r+2}\, U^1_{n+r+2} \ldots U^n_{n+r+2}(x);
$$

dies ist die Beziehung (9) für $n+1$.

Die Beziehungen (8) und (9) sind somit für jedes n richtig.

Es gilt für jedes x

$$
f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x).
$$

Denn ist x irgend eine reelle Zahl, so gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geqslant 2$ und $n_0 \geqslant x$; für jedes $n \geqslant n_0$ ist wegen (8)

$$
f_1 f_2 \ldots f_n(x) = \varphi_n(x)
$$

und daher wegen (1)

$$
f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x).
$$

II. Hilfssatz: Ist β eine Grenzzahl $(\omega \leqslant \beta < \Omega)$ und $\lim\limits_{n=\infty} \beta_n = \beta$ $(\beta_n < \beta)$, so gibt es zu jeder Funktion $f(x) \in B_{\omega^\beta}$ eine Folge von Funktionen $\{f_n(x)\} \in B_{\omega^{\beta_n}}$, so daß

$$
f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x).
$$

Dieser Satz wurde von Herrn Sierpiński[4]) ausgesprochen und wird durch eine fast wortgetreue Wiederholung des Beweises, den er zur Herleitung des Theorems II der oben zitierten Arbeit gebraucht hat, als richtig erkannt.

Hauptsatz: *Es gelten folgende Beziehungen:*

(10a) $\Phi_0 = B_0$

(10b) $\Phi_n = B_{\omega^{n-1}}$ (n eine natürliche Zahl, $\omega^0 = 1$)

(10c) $\Phi_\beta = B_{\omega^\beta}$ $(\omega \leqslant \beta < \Omega)$.

Daß (10a) gilt, ist evident; daß (10b) für $n=1$ richtig ist, hat Herr Sierpiński bewiesen. Ich werde durch vollständige Induktion zeigen, daß (10b) für jedes n gilt.

Sei $n \geqslant 2$. Ich werde beweisen, daß, wenn (10b) für $n' < n$ gilt, (10b) auch für n richtig ist.

Wenn $f(x) \in \Phi_n$, gibt es eine Darstellung $f(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_1 f_2 \dots f_\nu(x)$, wobei $f_\nu(x) \in \Phi_{n-1}$. Da nach Annahme $\Phi_{n-1} = B_{\omega^{n-2}}$, ist $f_\nu(x) \in B_{\omega^{n-2}}$, somit $f_1 f_2 \dots f_\nu(x) \in B_{\omega^{n-2}\cdot\nu}$ und daher $f(x) \in B_{\omega^{n-1}}$, so daß

(11) $$\Phi_n \in B_{\omega^{n-1}}.$$

Ist $f(x) \in B_{\omega^{n-1}}$, so gibt es nach Hilfssatz I eine Darstellung $f(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_1 f_2 \dots f_\nu(x)$, wobei $f_\nu(x) \in B_{\omega^{n-2}}$; da nach Annahme $B_{\omega^{n-2}} = \Phi_{n-1}$ ist $f_\nu(x) \in \Phi_{n-1}$, somit $f(x) \in \Phi_n$, so daß

(12) $$B_{\omega^{n-1}} \subset \Phi_n.$$

Aus (11) und (12) folgt

$$\Phi_n = B_{\omega^{n-1}}.$$

Es gilt also (10b) für jedes n.

Nun beweise ich (10c) für $\beta = w$.

Ist $f(x) \in \Phi_\omega$, so gibt es eine Darstellung $f(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_1 f_2 \dots f_\nu(x)$ wobei $f_\nu(x) \in \Phi_{n_\nu}$ (n_ν eine natürliche Zahl); da, wie eben bewiesen, $\Phi_{n_\nu} = B_{\omega^{n_\nu - 1}}$ ist $f_1 f_2 \dots f_\nu(x) \in B_{\omega^{n_\nu-1}+\omega^{n_{\nu-1}-1}+\dots+\omega^{n_1-1}}$ und daher $f(x) \in B_{\omega^\omega}$, so daß

(13) $$\Phi_\omega \subset B_{\omega^\omega}.$$

[4]) Fund. Math. 24 (1935), S. 6 (vorletzter Absatz).

Ist $f(x) \in B_{\omega^\omega}$, so gibt es nach Hilfssatz II eine Darstellung $f(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_1 f_2 \dots f_\nu(x)$, wobei $f_\nu(x) \in B_{\omega^\nu}$; da $B_{\omega^\nu} = \Phi_{\nu+1}$, ist $f_\nu(x) \in \Phi_{\nu+1}$, somit $f(x) \in \Phi_\omega$, so daß

(14) $$B_{\omega^\omega} \subset \Phi_\omega.$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\Phi_\omega = B_{\omega^\omega}.$$

Somit ist (10c) für $\beta = \omega$ richtig.

Für $\beta > \omega$ wird (10c) in analoger Weise mit Hilfe der transfiniten Induktion bewiesen.

Wien, November 1935.