Sur les images biunivoques et continues dans un sens[1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Par analogie avec les types de continuité [2]) nous définirons les *types* γ comme il suit.

E et H étant deux ensembles de points (d'un espace métrique), nous dirons qu'ils ont le même type γ et nous écrirons $\gamma E = \gamma H$, si E est une image biunivoque et continue dans un sens de H, et si H est une image biunivoque et continue dans un sens de E. Dans le cas, où E est une image biunivoque et continue dans un sens de H, mais H n'est pas une image continue et biunivoque de E, nous écrirons $\gamma E < \gamma H$ (ou bien $\gamma H > \gamma E$) et nous dirons que le type γ de l'ensemble E est plus petit que le type γ de l'ensemble H (ou bien que le type γ de H est plus grand que le type γ de E).

Désignons par $\Gamma(E)$ la famille de tous les ensembles H (de l'espace métrique considéré) qui sont des images continues et biunivoques de l'ensemble E. Comme on voit sans peine, la formule $\gamma E \leqslant \gamma H$ équivaut à la formule $\Gamma(E) \subset \Gamma(H)$, donc l'égalité $\gamma E = \gamma H$ équivaut à l'égalité $\Gamma(E) = \Gamma(H)$.

Deux ensembles homéomorphes ont évidemment le même type γ, et deux ensembles du même type γ ont le même type c. Les types γ occupent donc une place intermédiaire entre les types d'homéomorphie et les types de continuité.

Comme on sait, toute image biunivoque et continue dans un sens d'un ensemble fermé compact et aussi continue dans l'autre sens et parsuite établit une homéomorphie. Il en résulte tout de suite que si, pour un ensemble fermé compact Φ et un ensemble E on a $\gamma E \leqslant \gamma \Phi$, on a nécessairement $\gamma E = \gamma \Phi$: il n'existe donc aucun type γ qui serait $< \gamma \Phi$.

[1]) Présenté à la I Conférence Intern. de Topologie à Moscou le 9 septembre 1935.

[2]) *Fundamenta Mathematicae* t. XIV, p. 345.

Il en résulte que parmi les types γ des ensembles linéaires dénombrables il n'existe aucun qui serait plus petit que tout autre. Admettons, en effet, qu'un tel type γ existe et soit E ensemble de ce type γ. Le type γE serait donc plus petit que le type γ d'un ensemble linéaire fermé et borné dénombrable quelconque non homéomorphe à E, ce qui est impossible.

Pareillement on démontre que parmi les types γ des ensembles linéaires de puissance du continu il n'existe aucun qui soit plus petit que tout autre.

Or, parmi les types γ des ensembles linéaires dénombrables il existe un qui est plus grand que tout autre: c'est, comme on voit sans peine, celui de l'ensemble E_0 de tous les nombres naturels. Les ensembles du type γE_0 coïncident évidemment avec les ensembles dénombrables isolés. Donc, les ensembles dont le type γ est $< \gamma E_0$ coïncident avec les ensembles dénombrables qui contiennent au moins un point d'accumulation.

Parmi les types γ qui sont $< \gamma E_0$ il existe un qui est plus grand que tous les autres: c'est le type γ de tout ensemble dénombrable non fermé contenant un seul point d'accumulation, p. e. de l'ensemble E_1 formé du nombre 0, de tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$ et de tous les nombres de la forme $2 + 1/n$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$

En effet, soit E un ensemble (linéaire) quelconque, tel que $\gamma E < \gamma E_0$: l'ensemble E est donc dénombrable et contient au moins un point d'accumulation, soit p_0. Soit

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les points de E.

Or, soit H un ensemble dénombrable non fermé, contenant un seul point d'accumulation q_0. Soit

$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les points de H.

L'ensemble H étant non fermé, il existe un point d'accumulation a de H qui n'appartient pas à H. Il existe donc aussi une suite infinie q_{k_n} ($k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$) de points de H qui converge vers a. Soient $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$ les nombres naturels consécutifs qui n'appartiennent pas à la suite $k_1, k_2, k_3, \ldots$ La suite $l_1, l_2, l_3, \ldots$ est infinie, puisque q_0 est un point d'accumulation de H qui appartient à H, donc $q_0 \neq a = \lim_{n=\infty} q_{k_n}$.

D'autre part, p_0 étant un point d'accumulation de l'ensemble E, il existe une suite infinie d'indices $r_1<r_2<r_3<\dots$, telle que $\lim_{n=\infty} p_{r_n}=p_0$ et que les nombres naturels consécutifs qui n'appartiennent pas à la suite $r_1, r_2, r_3, \dots$ forment encore une suite infinie $s_1<s_2<s_3<\dots$

Définissons maintenant dans l'ensemble H la fonction f comme il suit.

Posons $f(q_0)=p_0$, $f(q_{l_n})=p_{r_n}$, pour $n=1, 2, 3, \dots$, et $f(q_{k_n})=p_{s_n}$, pour $n=1, 2, 3, \dots$

On voit sans peine que la fonction f transforme d'une façon biunivoque et continue dans un sens l'ensemble H en l'ensemble E. On a donc $\gamma E\leqslant\gamma H$ et, en particulier, $\gamma E\leqslant\gamma E_1$, c. q. f. d.

Désignons maintenant par H_1 l'ensemble formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+n}}$, où m et n sont des nombres naturels. L'ensemble H_1 et évidemment dénombrable non fermé et contient un seul point d'accumulation. D'après la propriété des tels ensembles que nous venons de démontrer, on a $\gamma E_1\leqslant\gamma H_1$ ainsi que $\gamma H_1\leqslant\gamma E_1$, donc $\gamma H_1=\gamma E_1$. Les ensembles E_1 et H_1 ont donc le même type γ: or, comme on voit sans peine, ils ne sont pas homéomorphes (Cela résulte de la remarque que l'ensemble E_1 est localement fermé et l'ensemble H_1 n'est pas localement fermé au point 0).

Deux ensembles du même type γ ne sont pas donc nécessairement homéomorphes[1]).

Soit F un ensemble linéaire fermé et borné, contenant un seul point d'accumulation, p. e. l'ensemble formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où $n=1, 2, 3, \dots$ On a évidemment $\gamma F<\gamma E_1$.

Soit maintenant E un ensemble linéaire quelconque, tel que $\gamma E<\gamma E_1$ et $\gamma E\neq\gamma F$. De $\gamma E<\gamma E_1$ résulte que l'ensemble E contient au moins un point d'accumulation et que s'il en contient un seul, E est fermé (puisque autrement on aurait, comme nous savons, $\gamma E=\gamma E_1$, contrairement à l'hypothèse). Donc, si $\gamma E<\gamma E_1$ et $\gamma E\neq\gamma F$, E contient au moins deux points d'accumulation. Une transformation biunivoque et continue dans un sens transformant tout point

[1]) C'est M. **Kuratowski** qui, en résolvant un problème que j'ai posé dans le vol. I des *Fund. Math.*, p. 223 (Problème 1) a donné le premier exemple de tels ensembles (*Fund. Math.*, t. II, p. 158—160).

d'accumulation de l'ensemble en un point d'accumulation de son image, il en résulte qu'il ne peut être $\gamma F<\gamma E$; or, F étant fermé et borné, il ne peut être aussi, comme nous savons, $\gamma E<\gamma F$. Donc les types γ des ensembles E et F ne sont pas comparables. Le type γF n'est pas donc comparable avec aucun autre type γ qui est $<\gamma E_1$. Il en résulte tout de suite qu'il n'existe pas le plus grand type γ parmi les types γ qui sont $<\gamma E_1$.

Or, parmi les types γ qui sont $<\gamma E_1$ et $\neq\gamma F$ il existe un qui est plus grand que tout autre. C'est, comme on voit sans peine, le type γ d'un ensemble non fermé contenant deux points d'accumulation.

Comme nous avons vu plus haut, parmi les types γ des ensembles linéaires dénombrables il n'existe aucun qui soit plus petit que tout autre. Il existe cependant des types γ d'ensembles linéaires dénombrables pour lesquels il n'existe aucun type γ plus petit. Tel est le type γ de l'ensemble R de tous les nombres rationnels; tel est aussi tout type γ d'un ensemble fermé et borné.

En effet, soit E un ensemble (linéaire) quelconque, tel que $\gamma E<\gamma R$. L'ensemble E est donc une image continue et biunivoque de l'ensemble R qui est dénombrable et dense en soi: l'ensemble E est donc lui-même dénombrable et dense en soi, donc homéomorphe à l'ensemble R, d'où $\gamma E=\gamma R$, contrairement à l'hypothèse.

D'autre part, soit H un ensemble linéaire fermé et borné et soit E un ensemble (linéaire) tel que $\gamma E<\gamma H$. L'ensemble E est donc une image continue et biunivoque de l'ensemble fermé et borné H, donc E est homéomorphe à H, d'où $\gamma E=\gamma H$, contrairement à l'hypothèse.

Il est à remarquer qu'*il existe une suite transfinie du type Ω de types γ croissants d'ensembles linéaires dénombrables.*

En effet, désignons, pour les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$, par E_α l'ensemble formé d'un ensemble linéaire fermé qui, ordonné d'après la grandeur des abscisses de ses éléments est du type $\omega^\alpha+1$, soit $\{p_\xi\}_{\xi\leq\omega^\alpha}$, et de l'ensemble H de tous les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $(p_{\omega^\alpha}, p_{\omega^\alpha}+1)$. Je dis que $\gamma E_\beta<\gamma E_\alpha$ pour $\beta<\alpha<\Omega$.

En effet, soit $\beta<\alpha<\Omega$. On démontre sans peine qu'il existe une suite du type $\omega^\beta+1$ extraite de la suite $S=\{p_\xi\}_{\xi\leq\omega^\alpha}$, soit $T=\{q_\xi\}_{\xi\leq\omega^\beta}$, où $q_{\omega^\beta}=p_{\omega^\alpha}$, dont les éléments forment un ensemble fermé et telle que l'ensemble $(S-T)+(p_{\omega^\alpha})$ est encore fermé. Comme l'ensemble $S-T$ est clairsemé, il existe un sous-ensemble de l'ensemble H, soit H_1 qui est homéomorphe à $S-T$, et l'ensemble $H-H_1$ est encore dense en soi, donc homéomorphe à H, et on peut établir cette homéomorphie de sorte que si p tend dans H vers p_{ω^α}, l'image de p tend dans $H-H_1$ aussi vers p_{ω^α}.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans l'ensemble $E_\alpha=S+H$ telle que $f(x)=x$ pour $x\,\epsilon\, T$ et qui transforme d'une façon homéomorphe l'ensemble $S-T$ en l'ensemble H_1 et l'ensemble H en l'ensemble $H-H_1$ de la façon envisagée plus haut. On voit sans peine que la fonction $f(x)$ est continue dans E_α et à valeurs distinctes et que $f(E_\alpha)=T+H$. On a donc $\gamma(T+H)\leqslant\gamma(E_\alpha)$. Or, comme on voit sans peine, $\gamma(T+H)\neq\gamma(E_\alpha)$, puisque les images continues de $T+H$ ne donnent aucun point qui soit limite d'une suite transfinie (bien ordonnée d'après la grandeur des abscisses de leurs points) d'un type $>\omega^\beta$. On a donc $\gamma(E_\beta)=\gamma(T+H)<\gamma(E_\alpha)$, c. q. f. d.

D'autre part, *il existe une suite transfinie du type Ω de types γ décroissants*. Telle est, comme on voit sans peine, la suite $\{H_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ où H_α est l'ensemble formé de tous les nombres naturels et d'un ensemble linéaire fermé qui, ordonné d'après la grandeur des abscisses de ses éléments est du type $\omega^\alpha+1$.

Désignons encore par K l'ensemble formé de tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$ et de tous les nombres naturels. On voit sans peine que

$$\gamma E_\alpha<\gamma K<\gamma H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

Il en résulte qu'il existe une famille des types γ différents d'ensembles linéaires dénombrables qui, ordonnée d'après leurs grandeurs est du type $\Omega+1+\Omega^*$.

Or, il existe aussi une famille de puissance $\aleph_1$ de types γ non comparables deux à deux des ensembles linéaires dénombrables.

Il existe aussi des types γ non comparables des ensembles linéaires dénombrables non clairsemés. Ce sont p. e. les types γM et γN, où M est l'ensemble formé de tous les nombres rationnels de l'intervalle fermé $(0,1)$ et des nombres $-\frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n}$, où $n=1,2,3,\ldots$, et N est l'ensemble formé de tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$, du nombre 2 et des nombres $2+\frac{1}{n}$, où $n=1,2,3,\ldots$

En ce qui concerne les types γ d'ensembles clairsemés (d'un espace euclidien), on peut démontrer que *tout ensemble clairsemé a le même type γ qu'un ensemble fermé* (borné ou non) et d'en déduire que *la famille de tous les types γ d'ensembles clairsemés est de puissance $\aleph_1$*.

Il est probable que la famille de tous les types γ d'ensembles dénombrables (linéaires) a la puissance $\aleph_1$.

Passons maintenant aux ensembles non dénombrables. Les plus simples d'entre eux sont les ensembles mesurables B.

Il existe un type γ d'un ensemble (non dénombrable) *mesurable B qui est plus grand que tout autre type γ d'un ensemble* (non dénombrable) *mesurable B*. Comme il résulte sans peine du théorème d'unicité de M. Lusin[1]), tel est le type γ de l'ensemble formé de tous les nombres naturels et de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$.

Il existe $2^{\aleph_0}$ types γ d'ensembles mesurables B, puisque, comme on démontre sans peine, il existe déjà $2^{\aleph_0}$ types γ d'ensembles (linéaires) fermés non dénombrables[2]).

E étant un ensemble linéaire donné quelconque, il existe, comme on voit sans peine, au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles linéaires H différents, tels que $\gamma H\leqslant\gamma E$ (puisque dans ce cas H est une image continue de E, et, pour tout ensemble linéaire E, il existe $2^{\aleph_0}$ images continues de E). On en déduit sans peine que toute classe d'ensembles (linéaires) du même type γ contient $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts. La famille de tous les ensembles linéaires étant de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, il en résulte qu'*il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ types γ différents d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$*.

E étant un ensemble linéaire donné de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires H différents, tels que $\gamma E\leqslant\gamma H$. En effet, soit E_1 un sous-ensemble donné quelconque de E et soit $E_2=E-E_1$.

Soit H_1 un ensemble homéomorphe à E_1 situé dans l'intervalle $(0,1)$ et soit H_2 un ensemble homéomorphe à E_2 situé dans l'intervalle $(2,3)$. L'ensemble $E=E_1+E_1$ est évidemment une image continue et biunivoque de l'ensemble $H=H_1+H_2$. On a donc $\gamma E\leqslant\gamma H$, et aux sous-ensembles E_1 distincts de E (dont la famille est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$) correspondent évidemment des ensembles H différents.

Or, comme nous avons vu plus haut, il existe au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles E, tels que $\gamma E\leqslant\gamma H$. Il en résulte tout de suite qu'il existe, pour tout ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires H différents, tels que $\gamma E<\gamma H$, et on en déduit qu'*il existe, pour tout type γ d'un ensemble linéaire de puissance du continu, $2^{2^{\aleph_0}}$ types γ différents plus grands que le type considéré.*

[1]) Voir p. ex. *Fund. Math.* t. III, p. 29—30.
[2]) Cf. *Fund. Math.* t. I, p. 27.