through (x,y) into four equal squares; in one of these at least the average density is greater than 2ε. It follows that at each point of E_2, either

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\mu_e[HG(x, y, 3\eta)\, R(x, y; h, h)]}{h^2} > 2\varepsilon \tag{85}$$

or

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\mu_e[HG(x, y, 3\eta)\, R(x, y; h, -h)]}{h^2} > 2\varepsilon. \tag{86}$$

Hence one at least of (85) and (86) must be true in a set E_3 of positive outer measure; and we may suppose it is (85), for in the other case we could consider $\Phi(x, y) = -F(x, -y)$.

Let (x_1, y_1) be a point of E_3. There is a sequence l_n, $|l_n| < \frac{1}{2}\delta$, $l_n \to 0$, such that

$$\frac{\mu_e[HG(x_1, y_1, 3\eta)\, R(x_1, y_1; l_n, l_n)]}{l_n^2} > 2\varepsilon. \tag{87}$$

Hence for each n there is a point $(x_1 + h_n, y_1 + k_n)$, say, lying in $HG(x_1, y_1, 3\eta)\, R(x_1, y_1; l_n, l_n)$ and such that

$$|h_n| > \varepsilon |l_n|, \qquad |k_n| > \varepsilon |l_n|. \tag{88}$$

It follows that

$$h_n k_n > 0, \qquad \varepsilon |h_n| < |k_n| < \varepsilon^{-1} |h_n| \tag{89}$$

and from (80),

$$|F[R(x_1, y_1; h_n, k_n)] - \underline{D}(x_1, y_1)\, h_n k_n| > 3\eta\, h_n k_n$$

Comparing this with (82) and (83) we have

$$F[R(x_1, y_1; h_n, k_n)] > (A + 3)\,\eta\, h_n k_n.$$

We note finally that $(x_1 + h_n, y_1 + k_n)$ belongs to H. From this point the argument is exactly parallel to those used in proving Theorems 1 and 3; the detail is left to the reader.

Note. The theorem obtained by replacing „any square" by „any rectangle" in the enunciation of Theorem 4 is certainly false; this may be seen by considering the case of a positive function of rectangles (for example $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$) which has at a set of positive measure $\overline{D}(x, y) = +\infty$; $\underline{D}(x, y)$ finite.

Sur les théorèmes de séparation dans la Théorie des ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Soit A une famille de sous-ensembles d'un espace composé d'éléments arbitraires. On dit que cette famille satisfait au *premier théorème de séparation*, lorsqu'à chaque couple d'ensembles disjoints A_1 et A_2 appartenant à A correspond un ensemble B qui, ainsi que son complémentaire, appartient à A et qui satisfait aux formules $A_1 \subset B$ et $BA_2 = 0$. Le *deuxième théorème de séparation* est satisfait, lorsqu'à chaque couple d'ensembles A_1 et A_2 appartenant à A correspond un couple d'ensembles disjoints C_1 et C_2 dont les complémentaires appartiennent à A et qui remplissent les formules $A_1 - A_2 \subset C_1$ et $A_2 - A_1 \subset C_2$.

Des exemples surtout importants de familles satisfaisant aux deux théorèmes de séparation présentent: la famille des ensembles boreliens de classe multiplicative $\beta > 0$ [1]), celle des ensembles analytiques [2]), celle des ensembles projectifs de classe $CPCA$ [3]).

---

[1]) c. à d. G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}$ etc. Les théorèmes de séparation pour ces familles d'ensembles ont été démontrés par MM. Lusin et Sierpiński. Voir W. Sierpiński, Fund. Math. 6 (1924), p. 2 et Bulet. Soc. St. de Cluj 6 (1932), p. 461, et N. Lusin, Fund. Math. 16 (1930), pp. 57 et 60.

Il importe de remarquer que la famille des ensembles fermés *satisfait au deuxième théorème de séparation* et cependant — si l'espace est connexe — elle *ne satisfait pas au premier:* à chaque couple E_1, E_2 d'ensembles fermés correspond un couple H_1, H_2 d'ensembles ouverts disjoints tel que $E_1 - E_2 \subset H_1$ et $E_2 - E_1 \subset H_2$ (cf. par exemple ma *Topologie I*. p. 99, 2 et 6), tandis que l'espace ne contient aucun vrai sous-ensemble non vide qui soit simultanément fermé et ouvert.

[2]) Les théorèmes de séparation pour les ensembles analytiques ont été démontrés par M. Lusin sous le nom du „premier et deuxième principes". Ils jouent un rôle fondamental dans la théorie de ces ensembles.

[3]) Les théorèmes de séparation pour les ensembles $CPCA$ ont été démontrés par M. Novikoff, Fund. Math. 25 (1935), p. 459.

Appelons *théorème de réduction*, relatif à une famille $\boldsymbol{B}$ d'ensembles, la proposition suivante: étant donnés deux ensembles U_1 et U_2 appartenant à $\boldsymbol{B}$, il existe deux ensembles disjoints V_1 et V_2 appartenant aussi à B et tels que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$ et $V_1+V_2=$ $=U_1+U_2$.

On montre facilement que, $\boldsymbol{B}$ étant une famille d'ensembles satisfaisant au théorème de réduction, la famille de leurs complémentaires satisfait aux deux théorèmes de séparation [1]). De plus, les familles: des ensembles boreliens d'une classe additive $\beta>0$, celle des ensembles CA et celle des ensembles PCA, satisfont au théorème de réduction. Elles satisfont, comme nous allons démontrer [2]), au *théorème de réduction généralisé*, c. à d. à l'énoncé suivant: *étant donnée une suite infinie d'ensembles U^1, U^2,... appartenant à la famille $\boldsymbol{B}$, il existe dans cette famille une suite d'ensembles disjoints V^1, V^2,... tels que*

$$V^n \subset U^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} V^n = \sum_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Les différentes généralisations des théorèmes de séparation trouvées récemment dans le domaine des ensembles boreliens et projectifs se déduisent toutes du théorème de réduction généralisé.

1. Théorème de réduction dans la Théorie générale des ensembles.

Soit $\aleph_\gamma$ un nombre cardinal donné. Soit Φ une famille d'ensembles telle que:

1^0 si $X \in \Phi$ et $Y \in \Phi$, on a $X-Y \in \Phi$,

2^0 si $\{X_\xi\}$ est une suite (transfinie) de puissance $<\aleph_\gamma$ d'ensembles appartenant à Φ, la somme $\sum_\xi X_\xi$ appartient à Φ.

Dans ces conditions, si $U^\alpha=\sum_{\xi<\omega_\gamma} U_\xi^\alpha$, où $\alpha<\omega_\gamma$ et où $U_\xi^\alpha \in \Phi$, il existe une double suite d'ensembles $V_\xi^\alpha \in \Phi$ tels qu'en posant

(1) $$V^\alpha=\sum_{\xi<\omega_\gamma} V_\xi^\alpha,$$

[1]) Comme l'a remarqué M. Sierpiński, l'implication inverse n'a pas lieu: on n'a qu'à considérer comme $\boldsymbol{B}$ la famille de tous les sous-ensembles ouverts de la ligne droite qui ne contiennent pas un point fixe (par ex. le point 0).

[2]) sans avoir recours d'ailleurs aux théorèmes de séparation, de sorte que la lecture de cette note ne demande pas la connaissance des notes précitées.

on a

(2) $$V^\alpha \subset U^\alpha, \qquad \sum_{\alpha<\omega_\gamma} V^\alpha=\sum_{\alpha<\omega_\gamma} U^\alpha$$

et les ensembles V^α sont disjoints.

En effet, en vertu de l'égalité $\aleph_\gamma^2=\aleph_\gamma$, il existe une fonction $\zeta=\varphi(\alpha, \xi)$ qui transforme l'ensemble de tous les couples (α, ξ) avec $\alpha<\omega_\gamma$ et $\xi<\omega_\gamma$ en l'ensemble des nombres $\zeta<\omega_\gamma$ d'une façon biunivoque. Autrement dit, en posant $A_\zeta=U_\xi^\alpha$, on range la double suite $\{U_\xi^\alpha\}$ en une suite simple.

Posons $B_\zeta=A_\zeta-\sum_{\eta<\zeta} A_\eta$. Les ensembles B_ζ sont évidemment disjoints et il vient

(3) $$\sum_{\zeta<\omega_\gamma} B_\zeta=\sum_{\zeta<\omega_\gamma} A_\zeta=\sum_{\alpha<\omega_\gamma} U^\alpha.$$

Soit $V_\xi^\alpha=B_{\varphi(\alpha, \xi)}$, d'où $V^\alpha=\sum_{\xi<\omega_\gamma} B_{\varphi(\alpha, \xi)}$. Les ensembles V^α sont disjoints, puisque la fonction φ est biunivoque, et les formules (2) sont remplies en vertu de (3). C. Q. F. D.

Dans la démonstration du théorème de réduction pour les ensembles projectifs (de première et deuxième classe), nous allons supposer que

(4) pour $\alpha \neq \beta$ on a $U_\xi^\alpha \cdot U_\xi^\beta=0$, quel que soit ξ.

Posons $S_\xi^\alpha=U_1^\alpha+\ldots+U_\xi^\alpha$.

La proposition (4) *implique que les ensembles V^α définis par la formule*

(5) $$V^\alpha=\prod_{\beta \neq \alpha} \sum_{\xi<\omega_\gamma}(S_\xi^\alpha-S_\xi^\beta)$$

sont disjoints et satisfont aux conditions (2).

En effet, pour $\alpha \neq \beta$, on a $V^\alpha \cdot V^\beta \subset \sum_{\xi<\omega_\gamma}(S_\xi^\alpha-S_\xi^\beta) \cdot \sum_{\xi<\omega_\gamma}(S_\xi^\beta-S_\xi^\alpha)=0.$

Car l'inégalité $\eta \leqslant \xi$ entraîne $(S_\xi^\alpha-S_\xi^\beta)(S_\eta^\beta-S_\eta^\alpha)=0$, puisque $S_\eta^\beta \subset S_\xi^\beta$.

En outre

$$V^\alpha \subset \sum_{\xi<\omega_\gamma} S_\xi^\alpha=U^\alpha.$$

Enfin pour démontrer l'égalité (2), considérons, pour un x donné et appartenant à $\sum_{\alpha} U^{\alpha}$, tous les termes U^{α}_{ξ} qui contiennent x. Soit $U^{\alpha_0}_{\xi_0}$ celui parmi eux dont l'indice ξ est le plus petit. On a donc, pour $\eta<\xi_0$, x *non*-$\epsilon U^{\beta}_{\eta}$ quel que soit β. De plus, si $\beta \neq \alpha_0$, on a selon (4), x *non*-$\epsilon U^{\beta}_{\xi_0}$, d'où x *non*-$\epsilon S^{\beta}_{\xi_0}$, de sorte que $x \epsilon (S^{\alpha_0}_{\xi_0} - S^{\beta}_{\xi_0})$ et par conséquent $x \epsilon V^{\alpha_0}$.

2. Application aux ensembles boreliens.

La famille des ensembles boreliens de classe additive $\beta>0$ (dans un espace métrique) satisfait au théorème de réduction généralisé.

De plus, *si l'espace est séparable de dimension* 0, *le théorème est aussi valable pour* $\beta=0$ (c. à d. pour les ensembles ouverts).

Pour s'en convaincre on n'a qu'à poser dans le théorème du N⁰ 1: $\gamma=0$ et $\Phi=$ la famille des ensembles ambigus de classe β (l'ensemble V^{α} étant défini par la formule (1)).

3. Application aux ensembles *CA*.

La famille des ensembles CA satisfait au théorème de réduction généralisé.

Démonstration. Rappelons d'abord que, d'une façon générale, à chaque ensemble analytique A (situé dans un espace complet séparable) correspond une famille d'ensembles fermés W_r (le »crible«), où l'indice r parcourt les nombres rationnels de l'intervalle 01, telle que x appartient à A dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque l'ensemble M_x des indices r satisfaisant à la condition $x \epsilon W_r$ n'est pas bien ordonné (selon la grandeur des nombres rationnels)[1]. Désignons par U_{ξ} l'ensemble des x tels que le type d'ordre de l'ensemble M_x est ξ: $\overline{M}_x=\xi$. Donc, U désignant le complémentaire de A, on a $U=\sum_{\xi<\Omega} U_{\xi}$; c'est la décomposition de U en »constituantes«.

De plus, comme l'a remarqué M. Novikoff[2]), δ étant un nombre $<\Omega$ donné en avance, on peut s'arranger de façon que les

[1]) Cf. par exemple ma *Topologie I*, p. 255.
[2]) Fund. Math. 25, p. 462.

indices des ensembles U_{ξ} non vides soient de la forme $\xi=\xi^*+\delta$. Il suffit à ce but de définir dans l'intervalle (1,2) un ensemble Δ de nombres rationnels dont le type d'ordre soit δ et d'admettre que, pour $r \epsilon \Delta$, l'ensemble W_r coïncide avec l'espace tout entier.

Passons à présent à la démonstration du théorème. $U^1, U^2, \dots$ étant une suite infinie d'ensembles CA, posons $U^n=\sum_{\xi<\Omega} U^n_{\xi}$, où U^n_{ξ} désignent les constituantes de U^n. En vertu de la remarque faite tout-à-l'heure, admettons que les indices des constituantes non vides soient de la forme $\xi+\omega^n$. Par conséquent,

(6) pour $n \neq m$ on a, soit $U^n_{\xi}=0$, soit $U^m_{\xi}=0$, quel que soit ξ.

La formule (4) du N⁰ 1 étant ainsi vérifiée, il s'agit de démontrer que l'ensemble V^{α} défini par l'égalité (5) est de classe CA. Or, l'indice β n'admettant que les valeurs finies, tout se réduit à démontrer que l'ensemble $D_{\alpha\beta}=\sum_{\xi<\Omega}(S^{\alpha}_{\xi}-S^{\beta}_{\xi})$ est de classe CA.

$D_{\alpha\beta}$ est l'ensemble des x pour lesquels il existe un $\xi<\Omega$ tel que $\overline{M}^{\alpha}_x \leqslant \xi$ et que $\overline{M}^{\beta}_x$ *non* $\leqslant \xi$. C'est par conséquent l'ensemble des x tels que 1⁰ l'ensemble M^{α}_x est bien ordonné et que 2⁰ l'ensemble M^{β}_x n'est pas semblable à un sous-ensemble de M^{α}_x (considéré comme ensemble ordonné). Or l'ensemble des x satisfaisant à la condition 1⁰ étant identique à U^{α} et celui des x qui satisfont à la condition 2⁰ étant un CA, selon un théorème de M. Lusin[1]), l'ensemble $D_{\alpha\beta}$, comme produit de ces deux ensembles, est aussi un CA.

4. Application aux ensembles *PCA*.

La famille des ensembles PCA satisfait au théorème de réduction généralisé.

Démonstration.[2]) Nous commençons la démonstration par quelques remarques qui se rattachent à la démonstration précédente. Soit A un ensemble analytique dans un espace complet sé-

[1]) Pour une simple démonstration de ce théorème très remarquable, voir par ex. *Topologie I*, p. 258.
[2]) Nous suivons ici l'idée générale de la démonstration de M. Novikoff (l. cit.), en la simplifiant légèrement.

parable Y et soient W_r, M_y et U_ξ les ensembles considérés dans le N° précédent. Z étant un espace complet séparable donné, les ensembles $W_r \times Z$ [1]) constituent évidemment un crible pour l'ensemble $A \times Z$ et cette multiplication n'altère pas le type d'ordre de l'ensemble M_y, c. à d. que $\overline{M}_{yz} = \overline{M}_y$. Par conséquent, les ensembles $\underset{yz}{\mathrm{E}}(y \in U_\xi) = U_\xi \times Z$ sont des constituantes du complémentaire de l'ensemble analytique $\underset{yz}{\mathrm{E}}(y \in A) = A \times Z$.

Cela étant, soit $P^1, P^2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles PCA. Il existe, par conséquent, une suite $B^1, B^2, \ldots$ d'ensembles CA tels que P^n soit une projection de B^n, c. à d. que $P^n = \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in B^n)$. Soit $B^n = \sum_{\xi < \Omega} U_\xi^n$ le développement de B^n en constituantes. Nous pouvons supposer que la condition (6) est réalisée.

Il vient $P^n = \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in \sum_\xi U_\xi^n) = \sum_\xi \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in U_\xi^n)$.

Posons $I_\xi^n = \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in U_\xi^n)$. Il vient $I_\xi^n \cdot I_\xi^m = 0$ pour $m \neq n$, car autrement il existerait un y tel que $xy \in U_\xi^n$, on aurait donc $U_\xi^n \neq 0$ et, de même $U_\xi^m \neq 0$, — contrairement à (6).

Les ensembles I_ξ^n (les »constituantes de l'ensemble P^n«) satisfont donc à la condition (4).

En vertu de (5) tout revient à démontrer que l'ensemble $J_{\alpha\beta} = \sum_{\xi < \Omega}[(I_1^\alpha + \ldots + I_\xi^\alpha) - (I_1^\beta + \ldots + I_\xi^\beta)]$ est un PCA.

Or, $I_1^\alpha + \ldots + I_\xi^\alpha = \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}[xy \in (U_1^\alpha + \ldots + U_\xi^\alpha)] = \sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in S_\xi^\alpha)$, d'où:

$$J_{\alpha\beta} = \sum_\xi \{\sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in S_\xi^\alpha) - \sum_z \underset{x}{\mathrm{E}}(xz \in S_\xi^\beta)\} =$$
$$= \sum_\xi \sum_y \prod_z \{\underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in S_\xi^\alpha) - \underset{x}{\mathrm{E}}(xz \in S_\xi^\beta)\} =$$
$$= \sum_y \prod_z \sum_\xi \{\underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in S_\xi^\alpha) - \underset{x}{\mathrm{E}}(xz \in S_\xi^\beta)\},$$

car on peut remplacer toujours $\sum_\xi \sum_y$ par $\sum_y \sum_\xi$ et puis on remplace

[1]) $Y \times Z$ désigne le *produit cartésien* de Y et Z, c. à d. l'ensemble des couples (y, z) où $y \in Y$ et $z \in Z$.

$\sum_\xi \prod_z$ par $\prod_z \sum_\xi$ en vertu de la formule générale suivante

$$\sum_\xi \prod_z L_\xi \cdot K_{\xi,z} = \prod_z \sum_\xi L_\xi \cdot K_{\xi,z}$$

qui est valable lorsque pour chaque z on a $K_{1,z} \supset K_{2,z} \supset \ldots$ [1]).

Posons, pour abréger

$$\dot{U}_\xi = \underset{xyz}{\mathrm{E}}\, xy \in U_\xi^\alpha \qquad \ddot{U}_\xi = \underset{xyz}{\mathrm{E}}\, xz \in U_\xi^\alpha$$
$$\dot{S}_\xi = \dot{U}_1 + \ldots + \dot{U}_\xi \qquad \ddot{S}_\xi = \ddot{U}_1 + \ldots + \ddot{U}_\xi.$$

D'après la remarque faite au début, les ensembles $\dot{U}_\xi$ (ainsi que $\ddot{U}_\xi$) présentent un système de constituantes du complémentaire d'un ensemble analytique. Donc, comme nous l'avons démontré dans le N° 2, l'ensemble $\sum_{\xi < \Omega}(\dot{S}_\xi - \ddot{S}_\xi)$ est un ensemble CA.

D'autre part, $\underset{x}{\mathrm{E}}\, xy \in S_\xi^\alpha = \underset{x}{\mathrm{E}}\, xyz \in \dot{S}_\xi$, d'où

$$J_{\alpha\beta} = \sum_y \prod_z \sum_\xi \underset{x}{\mathrm{E}}[xyz \in (\dot{S}_\xi - \ddot{S}_\xi)] =$$
$$= \sum_y \prod_z \underset{x}{\mathrm{E}}\{xyz \in \sum_\xi (\dot{S}_\xi - \ddot{S}_\xi)\}.$$

Il en résulte [2]) que l'ensemble $J_{\alpha\beta}$ est de classe $PCPCCA$, c. à d. de classe PCA [3]).

[1]) Il s'agit de prouver que, si p appartient au membre droit, il appartient au membre gauche. Or, il existe par hypothèse pour chaque z un nombre ξ_z tel que $p \in L_{\xi_z} \cdot K_{\xi_z, z}$; soit α le plus petit parmi ces ξ_z (pour p fixe). Donc $p \in L_\alpha$ et, comme $\alpha \leqslant \xi_z$ quel que soit z, il vient $p \in K_{\xi_z, z} \subset K_{\alpha, z}$. D'où la conclusion demandée.

Dans le cas considéré on pose $L_\xi = \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in S_\xi^\alpha)$ et $K_{\xi,z} = \underset{x}{\mathrm{E}}(xz \text{ non-}\in S_\xi^\beta)$.

[2]) D'une façon générale, si un ensemble T contenu dans le produit $X \times Y$ est de classe projective L, l'ensemble $\sum_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in T)$ est de classe PL et l'ensemble $\prod_y \underset{x}{\mathrm{E}}(xy \in T)$ est de classe $CPCL$. Voir par ex. ma *Topologie I*, § 34, VIII.

On a ici $T = \sum_\xi (\dot{S}_\xi - \ddot{S}_\xi) \subset X \times Y \times Z$.

[3]) Une démonstration du fait que $J_{\alpha\beta}$ est un PCA, basée sur une idée différente (celle de „suite projective d'ensembles"), paraîtra prochainement.

5. Théorèmes de séparation.

Admettons, à présent, que la famille $\boldsymbol{B}$ satisfait au théorème de réduction généralisé et qu'en outre elle est *additive* au sens dénombrable (c. à d. qu'elle contient la somme de toute série composée de ses éléments). Soit $\boldsymbol{A}$ la famille des complémentaires des ensembles appartenant à $\boldsymbol{B}$; des familles $\boldsymbol{A}$ forment, en particulier: 1° les ensembles boreliens de classe $\beta>0$ multiplicative, 2° les ensembles analytiques, 3° les ensembles *CPCA*.

Le théorème de réduction généralisé implique les énoncés suivants.

1. Premier théorème de séparation (généralisé) [1].

Etant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ *appartenant à* $\boldsymbol{A}$ *et tels que* $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, *il existe une suite d'ensembles* B_n *qui, de même que leurs complémentaires, appartiennent à* $\boldsymbol{A}$ *et qui satisfont aux conditions*

$$A_n \subset B_n \quad et \quad \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Appliquons le théorème de réduction généralisé à la famille $\boldsymbol{B}$ en posant $U^n = X - A_n$ et $B_n = X - V^n$ (X désignant l'espace). Par hypothèse $X = \sum_n U^n = \sum_n V^n$. Les ensembles V^n étant disjoints, il vient $X - V^n = \sum_{i \neq n} V^i$, d'où on conclut que $X - V^n$ appartient à $\boldsymbol{B}$, donc que V_n appartient à $\boldsymbol{A}$. En outre, $\prod_n B_n = X - \sum_n V^n = 0$.

2. Deuxième théorème de séparation (généralisé) [2].

Etant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ *appartenant à* $\boldsymbol{A}$, *il existe une suite d'ensembles* $C_1, C_2, \dots$ *dont les complémentaires appartiennent à* $\boldsymbol{A}$ *et qui satisfont aux conditions*

$$A_n - \prod_{m=1}^{\infty} A_m \subset C_n \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} C_n = 0.$$

[1]) Pour les ensembles boreliens d'une classe multiplicative, démontré par M. Sierpiński, Fund. Math. 23, p. 295; pour les ensembles analytiques par M. Novikoff, C. R. Acad. Sc. URSS, t. II (1934), p. 145; pour les ensembles *CPCA* par le même auteur dans Fund. Math. 25, p. 465.

[2]) Pour le cas des ensembles *CPCA* voir Novikoff, l. c. p. 466.

Posons, en effet, $U^n = X - A_n$ et $C_n = \sum_{i \neq n} V^i$. Il vient

$$A_n - \prod_m A_m = \sum_m U^m - U^n = \sum_m V^m - U^n = (C_n + V^n) - U^n =$$
$$= (C_n - U^n) + (V^n - U^n) = C_n - U^n \subset C_n.$$

En outre, comme $C_n \cdot V^n = 0$, on a $\prod_n C_n \cdot \sum_n V^n = 0$. Rapprochée de l'inclusion $C_n \subset \sum_m V^m$, qui implique $\prod_n C_n \subset \sum_n V^n$, cette égalité donne $\prod_n C_n = 0$.

Ajoutons, à présent, aux hypothèses faites sur $\boldsymbol{A}$ celle qu'elle soit *additive* au sens dénombrable. Telles sont en particulier les familles des ensembles analytiques et des ensembles *CPCA*.

On a le théorème de séparation suivant

3. [1]) *Etant donnée une suite d'ensembles* $A_1^*, A_2^*, \dots$ *appartenant à* $\boldsymbol{A}$ *et tels que* $\operatorname{Lim\,sup} A_n^* = 0$, *il existe une suite d'ensembles* D_n *qui, de même que leurs complémentaires, appartiennent à* $\boldsymbol{A}$ *et qui satisfont aux conditions*

$$A_n^* \subset D_n \quad et \quad \operatorname{Lim\,sup} D_n = 0.$$

C'est une conséquence facile de l'énoncé *1*.

Posons, en effet, $A_n = A_n^* + A_{n+1}^* + \dots$ On a par hypothèse $\prod_n A_n = 0$ et le premier théorème de séparation est applicable. Posons

$$D_1 = B_1 \text{ et, en général, } D_n = D_{n-1} \cdot B_n.$$

Il vient $A_n^* \subset A_n \subset B_n$ et $A_n \subset A_{n-1}$; en admettant (par induction) que $A_{n-1} \subset D_{n-1}$, on en tire que $A_n^* \subset B_n \cdot D_{n-1} = D_n$.

En outre, comme $D_n \subset D_{n-1}$, on a

$$\operatorname{Lim\,sup} D_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} D_{n+i} = \prod_{n=1}^{\infty} D_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

[1]) Pour les ensembles analytiques démontré par M. Liapounoff, C. R. Acad. Sc. URSS, t. II (1934), p. 276.