Über erreichbare Punkte.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. s-erreichbare Punkte.

Sei E eine kompakte Untermenge des R_n. Wir bezeichnen mit E_s die Menge der s-erreichbaren[1]) Punkte von E, und werden die Borelsche Klasse von E_s nach oben abschätzen[2]).

Satz 1. Die Menge E_s der s-erreichbaren Punkte der kompakten Menge $E \subset R_n$ ist ein $G_{\delta\sigma\delta}$.

Sei:

(1) $$z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots$$

die Folge aller algebraischer s-Zykel, welche in $R_n - E$ liegen und Eckpunkte mit rationalen Koordinaten besitzen.

Sei $D(i, j, k, l)$, $i, j, k, l = 1, 2 \ldots$ die Menge aller $x \in E$ welche folgende Eigenschaft besitzen: entweder ist z_l in $\overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)}$[3]) nicht enthalten, oder es existiert ein $s+1$-komplex Z_l und ein s-Zyklus z'_l mit den Eingenschaften:

(2) $$Z_l \subset U\left(x, \frac{1}{l}\right) - E$$

[1]) Im Sinne der Definition von Alexandroff (Ann. of Math. 36 p. 15, 1935). Wir betrachten Komplexe mit dem Körper der rationalen Zahlen als Koeffizientenbereich.

[2]) Dies ist ein Spezialfall des von Alexandroff (l. c. p. 34) gestellten Problem VII.

[3]) $U(x, \lambda) =$ Innengebiet der Kugel in R_n mit Mittelpunkt x und Radius λ.

(3) $$z'_l \subset U\left(x, \frac{1}{j+k+l}\right) - E$$

(4) $$\dot{Z}_l = z_l - z'_l$$

(wir bezeichnen mit $\dot{Z}$ den Rand des Komplexes Z)[4]).

Die Menge $D(i, j, k, l)$ ist leer oder offen (rel. E). Sei $x \in D(i, j, k, l)$. Wenn z_l in $\overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)}$ nicht enthalten ist, so ist $z_l - \overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)} \neq 0$. Sei $b \in z_l - \overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)}$, dann ist $\varrho(b, x) > \frac{1}{k+l}$. Wenn also $x_1 \in E$ und $\varrho(x_1, x) < \varrho(b, x) - \frac{1}{k+l}$, so ist $\varrho(b, x_1) > \frac{1}{k+l}$, also z_l ist in $\overline{U\left(x_1, \frac{1}{k+l}\right)}$ nicht enthalten, also $x_1 \in D(i, j, k, l)$.

Wenn dagegen $z_l \subset \overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)}$, so bezeichnen wir mit η die kleinere der beiden positiven Zahlen:

(5) $$\varrho\left[Z_l, \left(R_n - U\left(x, \frac{1}{l}\right)\right) + E\right]; \qquad \varrho\left[z'_l, \left(R_n - U\left(x, \frac{1}{j+k+l}\right)\right) + E\right].$$

Ist $\varrho(x_1, x) < \eta$, $x_1 \in E$, so hat man (4) und:

(6) $$Z_l \subset U\left(x_1, \frac{1}{l}\right) - E$$

(7) $$z'_l \subset U\left(\frac{1}{j+k+l}\right) - E$$

also $x_1 \in D(i, j, k, l)$. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Zum Beweis von Satz I genügt es offenbar die Formel:

(8) $$E_s = \prod_l \sum_k \prod_j \prod_i D(i, j, k, l); \qquad i, j, k, l = 1, 2, \ldots$$

zu beweisen.

Sei $x \in E_s$, l eine natürliche Zahl. Nach einem Satz von Alexandroff[5]) existiert eine Zahl $\sigma_l > 0$ derart, dass jeder s-Zykel $Z \subset U(x, \sigma_l)$ für jedes positive $\sigma < \sigma_l$ mit einem in $U(x, \sigma) - E$

[4]) Mit anderen Worten: wenn $z_l \subset \overline{U\left(x, \frac{1}{k+l}\right)}$, so ist z_l in $U\left(x, \frac{1}{l}\right) - E$ mit einem in $U\left(x, \frac{1}{j+k+l}\right) - E$ liegenden Zyklus homolog.

[5]) L. c. p. 15 Lemma.

liegenden Zyklus in $\dot{U}\left(x, \frac{1}{l}\right) - E$ homolog. Sei k_1 die erste natürliche Zahl für die $\frac{1}{k_1+l} < \sigma_l$. Dann ist für jedes natürliche j, jedes $z_i \subset \overline{U\left(x, \frac{1}{k_1+l}\right)}$ mit einem in $U\left(x, \frac{1}{k_1+l+j}\right) - E$ liegenden Zyklus in $U\left(x, \frac{1}{l}\right) - E$ homolog. Also:

(9) $$x \in \prod_j \prod_k D(i, j, k_1, l)$$

d. h. a fortiori:

(10) $$x \in \sum_k \prod_j \prod_l D(i, j, k, l)$$

Da (10) für jedes l gilt so ist:

(11) $$E_s \subset \prod_l \sum_k \prod_j \prod_l D(i, j, k, l).$$

Sei jetzt $x \in \prod_l \sum_k \prod_j \prod_l D(i, j, k, l)$ und $\eta > 0$. Wir bestimmen zunächst l_1 so dass $\frac{1}{l_1} < \eta$. Wegen: $x \in \sum_k \prod_j \prod_l D(i, j, k, l_1)$ existiert ein k_1 derart dass: $x \in \prod_j \prod_i D(i, j, k_1, l_1)$. Wir setzen $\sigma_\eta = \frac{1}{k_1+l_1}$. Sei z ein beliebiger s-Zyklus in $U(x, \sigma_\eta) - E$ und $\sigma < \sigma_\eta$ eine positive Zahl. Offenbar kann man i_1 so bestimmen dass z_{i_1} mit z in $U(x, \sigma_\eta) - E$ homolog ist. Sei j_1 eine natürliche Zahl derart dass: $\frac{1}{j_1+k_1+l_1} < \sigma$. Wegen $z_{i_1} \subset \overline{U(x, \sigma_\eta)} = U\left(x, \frac{1}{k_1+l_1}\right)$ und $x \in D(i_1, j_1, k_1, l_1)$ existiert ein $z'' \subset U\left(x, \frac{1}{j_1+k_1+l_1}\right) - E \subset U(x, \sigma) - E$ derart dass:

(12) $$z_{i_1} \sim z'' \quad \text{in} \quad U\left(x, \frac{1}{l_1}\right) - E \subset U(x, \eta) - E$$

da aber:

(13) $$z \sim z_{i_1} \quad \text{in} \quad U\left(x, \frac{1}{k_1+l_1}\right) - E \subset U(x, \eta) - E$$

so ist $z \sim z''$ in $U(x, \eta) - E$. Nach dem zitierten Satz von Alexandroff ist also $x \in E_s$. Also sind Formel (8) und somit Satz I bewiesen.

2. Erreichbare Punkte.

Sei wieder $E \subset R_n$ eine kompakte Menge. Ein Punkt $x \in E$ heisst (schlechthin) *erreichbar* wenn ein (scilicet mehrpunktiges) Kontinuum C existiert mit $C\,E = x$; man darf annehmen, dass C ein einfacher Bogen ist mit x als Endpunkt. Sei E_a die Menge erreichbaren Punkte von E.

Nun ist folgendes bekannt[6]). E_a ist analytisch, dagegen in R_3 braucht E_a ist keine Borelsche Menge zu sein. Darüber hinaus ich beweise ich folgendes:

***Satz 2.** Die Menge E_a der erreichbaren Punkte einer kompakten, ebenen Menge E ist eine Borelsche Menge.*

Wir erweitern die Ebene durch Adjunktion des unendlich fernen Punktes und ersetzen die Euklidische Metrik durch die Metrik:

(14) $$\varrho(x_1, x_2) = \frac{2\,|x_2 - x_1|}{\sqrt{(|x_1|^2+1)\,(|x_2|^2+1)}}$$

mit anderen Worten wir verwandeln R_2 in eine S_2 durch stereographische Projektion. Jetzt definieren wir in $S_2 - E$ eine neue Metrik $\varrho^*(x_1, x_2)$ in folgender weise: wenn x_1, x_2 zu derselben Komponente von $S_2 - E$ gehören, so ist $\varrho^*(x_1, x_2)$ die *relative* Entfernung von x_1 und x_2 in dieser Komponente d. h. $\varrho^*(x_1, x_2) = \operatorname{Inf} \delta(L)$, wo L alle Kontinua durchläuft, welche x_1 und x_2 enthalten und in $S_2 - E$ enthalten sind[7]); wenn dagegen x_1, x_2 in verschiedenen Komponenten von $S_2 - E$ liegen, so ist $\varrho^*(x_1, x_2) = 2$. Den Raum $S_2 - E$ mit der Metrik ϱ^* bezeichnen wir durch $(S_2 - E)^*$. Jetzt erweitern wir $(S_2 - E)^*$ zu einem vollständigen Raum Γ mittelst des Cantor-Meray-Hausdorff'schen Verfahrens[8]). $(S_2 - E)^*$ ist offen in Γ, also $\Gamma_1 = \Gamma - (S_2 - E)^*$ abgeschlossen in Γ, somit eine absolute Γ_δ-Menge.

Sei $\tau \in \Gamma_1$. Es existiert eine Folge $\{x_k\}$, mit: $x_k \in (S_2 - E)^*$; $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho^*(x_k, \tau) = 0$. Dann ist $\{x_k\}$ in der ϱ-Metrik a fortiori konvergent gegen einen Punkt $v(\tau) \in E$. Mam beweist ohne Mühe, dass: 1) $v(\tau)$ eine stetige Funktion ist, 2) dass $v(\tau) \in E_a$, 3) $\sum\limits_{\tau \in \Gamma_1} v(\tau) = E_a$. *Also ist* E_a

---

[6]) Urysohn: Proc. Akad. Amsterdam 28 p. 984—993. Nikodym: Fund. Math. VIII p. 250—258.

[7]) Vrgl. Fund. Math. I p. 167—169.

[8]) vrgl. z. B. Kuratowski: *Topologie I*, p. 200 ss. (1933).

die Wertmenge einer stetigen, komplexen auf Γ_1 definierten Funktion. Da Γ_1 ein absolutes G_δ ist, so ist E_a eine analytische Menge; wir erhalten somit das bekannte Resultat von Urysohn.

Ein Punkt $v_1 \epsilon E_a$ heisst mindestens n-fach, wenn seine Urbildmenge: $v^{-1}(v_1)$ mindestens n Elemente der Menge Γ_1 enthält. Sei $E_a^{(3)}$ die Menge der mindestens dreifachen Punkte von E_a.

Hilfssatz: *$E_a^{(3)}$ ist höchstens abzählbar.*

Sei $\{W_l\}$ eine Folge von Kreisbereichen (in der ϱ-Metrik), welche ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem von S_2 bildet. Sei Q_l die Menge aller Punkte von E, welche aus mindestens drei verschiedenen Komponenten von $W_l - E$ erreichbar sind. Nach einem Satz von Whyburn[9]) existieren zu je drei bestimmten Komponenten von $W_l - E$ höchstens zwei aus diesen drei Komponenten erreichbare Punkte von E. Also ist Q_l und $Q = \sum_{l=1}^{\infty} Q_l$ höchstens abzählbar. Es genügt also zu zeigen dass $E_a^{(3)} \subset Q$. Sei $v_0 \epsilon E_a^{(3)}$. Es existiert ein $\eta_1 > 0$ und drei Punkte $\tau_j \epsilon \Gamma_1$ derart dass:

$$v(\tau_j) = v_0; \qquad \varrho^*(\tau_j, \tau_l) \geqq 2\eta_1; \qquad j, l = 1, 2, 3, \ j \neq l. \tag{15}$$

Jetzt kann man drei Bögen[10]) $v_0 a_j$, $j = 1, 2, 3$ bestimmen so dass: $E(v_0 a_j) = v_0$ und dass aus $\lim \varrho(x, v_0) = 0$, $x \epsilon v_0 a_j$ auch $\lim \varrho^*(x, \tau_j) = 0$ folgt und weiterhin drei Bögen $v_0 b_j \subset v_0 a_j$, $j = 1, 2, 3$ so dass:

$$\varrho^*(v_0 b_j, v_0 b_l) \geqq \eta_1; \qquad j, l = 1, 2, 3, \ j \neq l. \tag{16}$$

Sei $\eta_2 = \text{minimum } \varrho(v_0, b_j)$; $j = 1, 2, 3$. Die Folge W_l bildet ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem von S_2, daher existiert ein W_m mit den Eigenschaften:

$$v_0 \epsilon W_m; \qquad \delta(W_m) < \text{minimum } (\eta_1, \eta_2). \tag{17}$$

Dann ist $b_j \epsilon S_2 - W_m$. Sei c_j der erste Punkt (von v_0 aus gerechnet) von $v_0 b_j$, welcher in $S_2 - W_m$ liegt, d_j ein Punkt von $v_0 b_j$, welcher zwischen v_0 und c_j liegt, endlich $v_0 d_j$ der Teilbogen von $v_0 b_j$ zwischen v_0 und d_j. Dann ist:

$$v_0 d_j \subset W_m; \qquad E(v_0 d_j) = v_0. \tag{18}$$

[9]) Fund. Math. XIV p. 317.

[10]) ab bedeutet einen einfachen Bogen, mit Endpunkten a, b.

Sei D_j diejenige Komponente von $W_m - E$ welche d_j enthält; gemäss (18) ist v_0 aus D_j erreichbar.

Sei $j \neq l$; nach (16) hat man:

$$\varrho^*(d_j, d_l) \geqq \eta_1. \tag{19}$$

Wäre nun $D_j = D_l$, so könnte man d_j und d_l durch ein in D_j liegendes Kontinuum C_1 verbinden; dann wäre aber:

$$\varrho^*(d_j, d_l) \leqq \delta(C_1) < \delta(D_j) \leqq \delta(W_m) < \eta_1. \tag{20}$$

in Widerspruch mit (19). Also $D_j \neq D_l$. Somit ist v_0 aus drei Komponenten von $W_m - E$ erreichbar, also: $v_0 \epsilon Q_m \subset Q$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

Jetzt kann man den Satz II in wenigen Worten beweisen. Wir setzen:

$$\Gamma_2 = v^{-1}(E_a^{(3)}); \qquad \Gamma_3 = v^{-1}(E_a - E_a^{(3)}). \tag{21}$$

Dann ist:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + \Gamma_3 \tag{22}$$

$$E_a = E_a^{(3)} + v(\Gamma_3) \tag{23}$$

Γ_2 ist die Urbildmenge einer abzählbaren Menge, also ein F_σ (rel Γ_1). Daher ist Γ_3 ein Γ_δ (rel Γ_1), und somit ein absolutes Γ_δ. Die stetige Funktion $v(\tau)$ nimmt auf Γ_3 jeden ihrer Werte höchstens zweimal an, daher ist die Wertmenge dieser Funktion $v(\Gamma_3)$ — eine Borelsche Menge[11]). Nach (23) ist E_a die Summe einer abzählbaren und einer Borelschen Menge, also eine Borelsche Menge, w. z. b. w.

[11]) Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* (1930) p. 176 ss.

Warszawa 22/XII. 1935.