Sur le théorème de décomposition de la théorie de la dimension.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

1. Coefficients dimensionnels. Urysohn[1]) a introduit, pour chaque espace métrique compact X et chaque entier positif n, un coefficient $d_n(X)$ qui est la *borne inférieure des nombres ε pour lesquels il existe une décomposition de X en k ensembles fermés (k arbitraire fini) $X=F_1+F_2+\ldots+F_k$ telle que l'on ait*

(*) $\delta(F_i)<\varepsilon$ [2]) *pour* $i=1, 2, \ldots, k$

(**)$_n$ $F_{i_1}\cdot F_{i_2}\cdot\ldots\cdot F_{i_{n+1}}=0$ *pour chaque système* $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_{n+1}\leqslant k$.

Un théorème fondamental dans la théorie de la dimension, l'ainsi dit „Zerlegungssatz" [3]), prend alors la forme suivante:

(1) *Pour que* $\dim X\leqslant n$, *il faut et il suffit que* $d_{n+1}(X)=0$.

Je me propose d'évaluer dans cette note les coefficients $d_n(X)$ d'une manière différente, ce qui permettra de déduire de (1) une nouvelle propriété caractéristique de la dimension.

Considérons d'abord le coefficient $d_1(X)$. L'inégalité $d_1(X)<\varepsilon$ exprime l'existence d'une décomposition en un nombre quelconque k d'ensembles fermés $X=F_1+F_2+\ldots+F_k$ tels que (*) et que

(**)$_1$ $F_{i_1}\cdot F_{i_2}=0$ pour $1\leqslant i_1<i_2\leqslant k$.

[1]) P. Urysohn, Fund. Math. 8 (1926), p. 353.
[2]) $\delta(Y)$ désigne comme d'habitude le diamètre de Y.
[3]) P. Urysohn, l. c. pp. 292 et 294.

On vérifie immédiatement que

(2) *Pour avoir $d_1(Y)<\varepsilon$ (Y désignant un sous-ensemble fermé de X), il faut et suffit que chaque composante de Y soit de diamètre $<\varepsilon$.*

(3) *Si $d_1(Y)<\varepsilon$, il existe un ensemble ouvert $U\subset X$ tel que $Y\subset U$ et $d_1(U)<\varepsilon$.*

2. Théorèmes de décomposition.

Théorème 1. *Pour chaque espace métrique compact X et pour chaque entier positif n, on a*

$$d_n(X)=\min\{\max_{i=1,2,\ldots,n}[d_1(X_i)]\},$$

quelle que soit la décomposition en ensembles fermés $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

Démonstration. Admettons que $d_1(X_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2, \ldots, n$. Il existe donc des décompositions

$$X_1=F_1^1+F_2^1+\ldots+F_{k_1}^1,$$
$$X_2=F_1^2+F_2^2+\ldots+F_{k_2}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n=F_1^n+F_2^n+\ldots+F_{k_n}^n,$$

où les sommandes de chaque ligne sont fermés, de diamètre $<\varepsilon$ et disjoints deux à deux. Or, la décomposition de X ainsi obtenue réalise l'inégalité $d_n(X)<\varepsilon$, puisqu'il existe pour chaques $x\in X$ et $i=1, 2, \ldots, n$ tout au plus un seul j tel que $x\in F_j^i$. Il est ainsi démontré que

$$d_n(X)\leqslant\min\{\max_{i=1,2,\ldots,n}[d_1(X_i)]\}.$$

Pour établir l'inégalité inverse, remarquons qu'elle est trivialement vraie pour $n=1$ et admettons qu'elle soit vraie pour $n-1$. Soit $d_n(X)<\varepsilon$. Il existe donc une décomposition de X en ensembles fermés $X=F_1+F_2+\ldots+F_k$ satisfaisant aux conditions (*) et (**)$_n$. Posons

$$Y=\sum F_{i_1}\cdot F_{i_2}\ldots F_{i_n},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n\leqslant k$. Pour chaque couple de systèmes $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n\leqslant k$ et $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_n\leqslant k$ on a en vertu de (**)$_n$

$$(F_{i_1}\cdot F_{i_2}\cdot\ldots\cdot F_{i_n})\cdot(F_{j_1}\cdot F_{j_2}\cdot\ldots\cdot F_{j_n})=0.$$

d'où, selon (*), $d_1(Y)<\varepsilon$. D'après (3) il existe donc un ensemble ouvert $U\subset X$ tel que $Y\subset U$ et $d_1(\overline{U})<\varepsilon$.

Posons $X_n=\bar{U}$, $X'=X-U$ et considérons la décomposition $X'=X'\cdot F_1+X'\cdot F_2+...+X'\cdot F_k$. Pour chaque système $1\leqslant i_1<i_2<...<i_n\leqslant k$ on a donc

$$X'\cdot F_{i_1}\cdot X'\cdot F_{i_2}\cdot...\cdot X'\cdot F_{i_n}=X'\cdot F_{i_1}\cdot F_{i_2}\cdot...\cdot F_{i_n}\subset(X-U)\cdot Y\subset(X-Y)\cdot Y=0,$$

d'où $d_{n-1}(X')<\varepsilon$ en vertu de (*). Nous avons ainsi établi que

$$X=X'+X_n,\qquad d_1(X_n)<\varepsilon,\qquad d_{n-1}(X')<\varepsilon.$$

L'inégalité à démontrer étant supposée vraie pour $n-1$, il existe une décomposition de X' en ensembles fermés $X'=X_1+X_2+...+X_{n-1}$ tels que $d_1(X_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2,..., n-1$. On a donc $X=X_1+X_2+...+X_n$ et $d_1(X_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2,..., n$, ce qui entraine l'inégalité q. f. d.

Le th. 1 donne en vertu de (1) et (2) le suivant

Théorème 2. Pour que $\dim X\leqslant n$ *(X désignant un espace métrique compact), il faut et il suffit qu'il existe pour tout* $\varepsilon>0$ *une décomposition de X en ensembles fermés* $X=X_1+X_2+...+X_{n+1}$, *telle que l'on ait* $d_1(X_i)<\varepsilon$ *pour* $i=1, 2,..., n+1$, c. à d. que chaque sous-continu de X_i soit de diamètre $<\varepsilon$.

3. Application. Nous allons à présent déduire du th. 2 le théorème suivant de MM. L. Schnirelmann et K. Borsuk[4]):

Chaque sous-ensemble fermé X de dimension $\leqslant n$ *d'un continu localement contractile K se laisse décomposer en* $n+1$ *ensembles fermés contractiles dans K.*

En effet, choisissons $\varepsilon>0$ assez petit pour que chaque ensemble de diamètre $<\varepsilon$ soit contractile dans K. Or, la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés disjoints et contractiles dans K étant aussi contractile dans K, chaque ensemble fermé $Y\subset K$ et tel que $d_1(Y)<\varepsilon$ est contractile dans K. L'application directe du th. 2 donne donc le théorème demandé.

---

[4]) L. Schnirelmann, Monatshefte für Math. u. Phys. 37 (1930) p. 132; K. Borsuk, Fund. Math. 26 (1936) p. 128,4.

4. Généralisations.

Théorème 3. Pour tout espace métrique compact X et tout système d'entiers positifs $n_1+n_2+...+n_k=n$, *on a*

$$d_n(X)=\min\{\max_{i=1,2,...,k}[d_{n_i}(X_i)]\},$$

quelle que soit la décomposition en ensembles fermés $X=X_1+X_2+...+X_k$.

Démonstration. Les inégalités $d_{n_i}(X_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2, ..., k$ entraînent en vertu du th. 1 l'existence des décompositions d'ensembles X_i en ensembles fermés

$$\text{(i)}\qquad \begin{aligned} X_1&=X'_1+X'_2+...+X'_{n_1},\\ X_2&=X'_{n_1+1}+X'_{n_1+2}+...+X'_{n_1+n_2},\\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ X_k&=X'_{n_1+n_2+...+n_{k-1}+1}+X'_{n_1+n_2+...+n_{k-1}+2}+...+X'_{n_1+n_2+...+n_k},\end{aligned}$$

tels que $d_1(X'_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2,..., n$. En vertu du th. 1, on a donc $d_n(X)<\varepsilon$. D'autre part, cette inégalité entraîne en vertu du même théorème l'existence d'une décomposition de X en ensembles fermés $X=X'_1+X'_2+...+X'_n$, telle que $d_1(X'_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2,..., n$. Or, la décomposition $X=X_1+X_2+...+X_k$, donnée par les formules (i), satisfait en vertu du th. 1 (en y posant $X=X_i$ et $n=n_i$) aux conditions $d_{n_i}(X_i)<\varepsilon$ pour $i=1, 2, ..., k$.

Le th. 3 donne en raison de (1) deux théorèmes suivants:

Théorème 4. Pour que $\dim X\leqslant n$, *il faut et il suffit que pour toute décomposition* $n+1=n_1+n_2+...+n_k$ *et tout* $\varepsilon>0$, *il existe une décomposition de X en ensembles fermés* $X=X_1+X_2+...+X_k$, *telle que*

$$d_{n_i}(X_i)<\varepsilon\quad pour\quad i=1, 2, ..., k.$$

Théorème 5. Pour que $\dim X\leqslant n$, *il faut et suffit que pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe une décomposition* $n+1=n_1+n_2+...+n_k$ *et une décomposition de X en ensembles fermés* $X=X_1+X_2+...+X_k$, *telle que*

$$d_{n_i}(X_i)<\varepsilon\quad pour\quad i=1, 2, ..., k.$$