$E_c - P$. Chaque ensemble non-dense dans E_c étant dénombrable, P est dénombrable. Comme d'autre part, l'ensemble $E - E_c$ est aussi dénombrable, on en conclut que f devient continue en supprimant l'ensemble dénombrable $P + E - E_c$. La fonction f est donc presque continue, c. q. f. d.

4. Remarques. 1. La fonction f considérée dans la première partie de la démonstration précédente étant semi-continue supérieurement, on en conclut que l'on peut dans le théor. III remplacer la propriété de Baire au sens restreint par la *semi-continuité supérieure* (donc par chaque notion contenue entre ces deux notions).

2. On peut démontrer que, pour qu'une fonction soit presque continue, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble ouvert H, l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartient à H soit „presque ouvert", c. à d. qu'il soit de la forme $G - P + R$ où G est ouvert et P et R sont dénombrables [1]). On en conclut facilement que E_c possède la propriété (ν) dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque chaque ensemble à propriété de Baire au sens restreint est presque ouvert.

3. Nous avons indiqué que la propriété (ν) de E_c est plus générale que la propriété (L) de E. Cependant la dernière propriété équivaut à la suivante: chaque fonction, définie pour tout x réel et jouissant de la propriété de Baire au sens large est presque continue sur E [2]).

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du théor. II.

---

[1]) C'est un cas particulier du théorème général suivant: soit F une famille d'ensembles qui contient: 1° chaque sous-ensemble de chaque ensemble qui lui appartient, 2° chaque somme d'une infinité dénombrable d'ensembles qui lui appartiennent; appelons „ensemble ouvert en négligeant F" tout ensemble de la forme $G - P + R$ où G est ouvert et P et R appartiennent à F; appelons „fonction continue en négligeant F" toute fonction qui devient continue en supprimant un ensemble de la classe F convenablement choisi. Avec ces définitions: *pour que la fonction f soit continue en négligeant F, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble ouvert H, l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartient à H soit ouvert en négligeant F.*

Pour la démonstration du cas particulier où F désigne la famille des ensembles de première catégorie, voir par ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, III-ème éd., Berlin-Leipzig 1935, p. 284, IV ou bien *Topologie I*, p. 172. La démonstration dans le cas général n'en diffère presque pas.

Les familles F ont été considérées par H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen* I, Berlin 1921, p. 176 et *Reelle Funktionen I*, Leipzig 1932, § 27, 4.

[2]) Cf. W. Sierpiński, C. R. Soc. Sc. Varsovie, Année XXVIII, Classe III, p. 25, Théor. II.

Un théorème concernant les translations d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

En utilisant une méthode de M. Banach [1]), j'ai démontré [2]) qu'il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, ne contient aucun sous-ensemble parfait et qui est transformé par chaque translation (le long de la droite) en lui-même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: Il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, contient un sous-ensemble parfait et qui est transformé par chaque translation (le long de la droite) en lui-même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Démonstration. J'ai démontré avec M. Ruziewicz [3]) qu'il existe deux ensembles linéaires parfaits (non vides) disjoints, P et Q, tels que toute translation de l'un d'eux a avec toute translation de l'autre au plus un point commun.

Soit

$$x_1 = 0,\ x_2,\ x_3, \dots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \dots,\ x_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi) \tag{1}$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal φ (de puissance du continu) formée de tous les nombres réels.

Désignons d'une façon générale par $E(a)$ la translation de l'ensemble E de longueur a (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels $x + a$, où $x \in E$); pour tout nombre ordinal $\alpha < \varphi$, désignons par E_α la somme de tous les ensembles $E(x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n})$ s'étendant

---

[1]) Voir S. Banach, *Fund. Math.* t. XIX, p. 10—16.

[2]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 24—27.

[3]) S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIX, p. 19 (Corollaire).

à toutes les suites finies $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (n variable) de nombres ordinaux $\leqslant \alpha$. On a évidemment toujours $E_\alpha \subset E_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta < \varphi$ et pour tout a réel, $E_\alpha(a) \subset E_\beta(a)$ pour $\alpha \leqslant \beta < \varphi$. On a aussi $E_\alpha(x_\alpha) = E_\alpha$, pour $\alpha < \varphi$.

Posons:

$$N = \sum_{\alpha<\varphi} (P_\alpha - Q_\alpha). \tag{2}$$

Je dis que l'ensemble N satisfait aux conditions du théorème.

Comme $x_1 = 0$, on a évidemment $P_1 = P(0) = P$ et $Q_1 = Q(0) = Q$, d'où, comme $PQ = 0$, $P_1 - Q_1 = P - Q = P$. D'après (2) l'ensemble N contient donc l'ensemble parfait P.

Or, comme $x_1 = 0$, l'ensemble Q_α contient pour tout $\alpha < \varphi$ l'ensemble $Q(x_1) = Q(0) = Q$: d'après (2) on a donc $NQ = 0$, d'où $Q \subset CN$. Le complémentaire CN de N contient donc aussi un sous-ensemble parfait, Q.

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. La suite transfinie (1) contenant tous les nombres réels, il existe un nombre ordinal $\lambda < \varphi$ tel que $a = x_\lambda$. D'après (2) on a, comme on voit sans peine:

$$N(a) = \sum_{\alpha<\varphi} [P_\alpha(x_\lambda) - Q_\alpha(x_\lambda)]. \tag{3}$$

Or, vu la définition des ensembles E_α, $\alpha \geqslant \lambda$ entraîne:

$$P_\alpha(x_\lambda) = P_\alpha \text{ et } Q_\alpha(x_\lambda) = Q_\alpha,$$

donc d'après (2) et (3):

$$N(a) - N \subset \sum_{\alpha<\lambda} P_\alpha(x_\lambda) \subset P_\lambda(x_\lambda) = P_\lambda. \tag{4}$$

Or, d'après (2), $N \supset P_\lambda - Q_\lambda$, d'où $CN \subset CP_\lambda + Q_\lambda$, donc, d'après (4):

$$N(a) - N \subset P_\lambda(CP_\lambda + Q_\lambda) = P_\lambda Q_\lambda$$

et par conséquent

$$N(a) - N \subset P_\lambda Q_\lambda. \tag{5}$$

Or, φ étant le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et λ un nombre ordinal $< \varphi$, il résulte tout de suite de la définition des ensembles E_α que P_λ est une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ termes de la forme $P(x)$ (où x est réel) et que Q_λ est une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ termes de la forme $Q(y)$ (où y est réel). On en conclut sans peine que l'ensemble $P_\lambda Q_\lambda$ est une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles de la forme $P(x)Q(y)$ (où x et y sont des nombres réels).

Or, d'après la propriété des ensembles P et Q, pour tous les x et y réels l'ensemble $P(x)Q(y)$ contient au plus un point. La puissance de l'ensemble $P_\lambda Q_\lambda$ est donc $< 2^{\aleph_0}$. D'après (5) nous concluons donc que l'ensemble $N(a) - N$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$, et cela est démontré pour tout nombre réel a.

Or, l'ensemble $N - N(a)$ est évidemment superposable (par translation) avec l'ensemble $N(-a) - N$ qui, comme nous venons de démontrer, est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. L'ensemble $N - N(a)$ est donc aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$ (pour a réels).

L'ensemble $N(a)$ (où a est un nombre réel quelconque) ne diffère donc de l'ensemble N que par un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Le théorème est ainsi démontré.