bildet dann die Begrenzung von jedem H_k in A_2 ab, und somit läßt sich zu einer stetigen Abbildung des ganzen H_k in M erweitern. Die Begrenzung von H wird ferner von f in U abgebildet und, da jeder in U liegende, geschlossene Weg homotop Null in M ist, so läßt sich f auch zu einer stetigen Abbildung des ganzen zweidimensionalen Elementes H in M erweitern. Dadurch wird aber f zu einer stetigen Abbildung der ganzen Kreisscheibe V_2 erweitert.

Der Beweis des Satzes 6, und somit auch des Satzes 6′, ist hiermit beendet.

Aus dem Satz 6′ folgt insbesondere, daß die bekannte Poincarésche Mannigfaltigkeit[16]) M_3 mit verschwindender eindimensionalen Bettischen Zahl und mit von Null verschiedener Fundamentalgruppe von der Kategorie > 2 ist. Diese Tatsache zeigt, daß sich die Kategorie nicht durch bloße Homologieeigenschaften ausdrücken läßt.

---

[16]) Unter einer Poincaréschen Mannigfaltigkeit versteht man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die dieselben Homologiegruppen, wie die dreidimensionale euklidische Sphäre, und eine nichtverschwindende Fundamentalgruppe hat.

Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense[1]).

Par

Casimir Kuratowski et Wacław Sierpiński (Warszawa).

D'après un théorème très important de M. Lusin[2]), l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble indénombrable E jouissant de la propriété suivante

(L) E est un sous-ensemble de la ligne droite tel que, quel que soit l'ensemble non-dense N (dans la ligne droite), le produit NE est au plus dénombrable.

La propriété (L) n'est pas topologique: l'ensemble E étant un ensemble frontière, on peut le transformer par homéomorphie en un sous-ensemble E^* de l'ensemble non-dense de Cantor; comme indénombrable et non-dense, E^* ne jouit pas de la propriété (L). On peut donc se demander quelles sont les propriétés topologiques qui caractérisent les ensembles homéomorphes aux ensembles à propriété (L)? Le théorème qui suit répond à cette question:

Théorème I. *Pour qu'un espace métrique séparable E soit homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété (L), il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante*[3])

(ν) chaque sous-ensemble N de E non-dense (par rapport à E) est au plus dénombrable.

---

[1]) Présenté à la Soc. Pol. Math. à Varsovie le 22. XI. 1935.

[2]) C. R. Paris t. 158 (1914), p. 1259. V. aussi Fund. Math. t. VI, p. 154—155 et t. XXII, p. 306, 312 et 315, ainsi que W. Sierpiński, *Hypothèse du continu* (Monogr. Matem., t. IV, Warszawa 1934), où le chap. II tout entier (pp. 36—75) concerne ce théorème et ses conséquences.

[3]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie* I (Monogr. Matem., t. III, Warszawa 1933), p. 273.

Dans la deuxième partie de cette note nous analysons le rapport de la propriété (ν) à la propriété de Baire[1]). Appelons, pour abréger, *presque continue* toute fonction qui devient continue en supprimant un ensemble dénombrable de ses arguments convenablement choisi. Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants.

Théorème II. *E étant espace métrique séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que chaque fonction (à valeurs réelles) définie sur E et jouissant de la propriété de Baire au sens large soit presque continue, est que E possède la propriété* (ν).

En remplaçant la propriété de Baire au sens large par la même propriété *au sens restreint* et la propriété (ν) de l'espace E par la *propriété* (ν) *de l'ensemble* E_c, de ses points de condensation, on obtient le théor. III[2]).

Bien entendu, l'ensemble E_c peut posséder la propriété (ν) sans que l'espace E la possède: soit, en effet, E l'ensemble qui s'obtient de l'ensemble E^* considéré auparavant en lui ajoutant un point intérieur de chaque intervalle contigu à l'ensemble de Cantor; E ne possède pas la propriété (ν), puisque E^* est indénombrable et non-dense dans E, tandis que E_c la possède, comme sous-ensemble de E^*.

1. Démonstration du théor. I. Evidemment chaque ensemble E à propriété (L) jouit de la propriété (ν). Cette dernière propriété étant intrinsèque, elle appartient donc à chaque ensemble homéomorphe à un ensemble à propriété (L). La *nécessité* de la condition (ν) est ainsi établie.

Afin de démontrer sa *suffisance*, admettons que E est un espace métrique séparable à propriété (ν). Nous allons démontrer d'abord que E est de dimension 0.

---

[1]) Une fonction f est dite à *propriété de Baire au sens large* lorsqu'elle devient continue en supprimant un ensemble de première catégorie de ses arguments convenablement choisi. Si pour chaque ensemble E, la fonction partielle f/E possède ladite propriété par rapport à E, la fonction f est à *propriété de Baire au sens restreint*.

[2]) Il est à remarquer que nos théorèmes impliquent *sans utiliser l'hypothèse du continu* l'équivalence des deux propositions suivantes:

Proposition I: Il existe un ensemble linéaire indénombrable qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense.

Proposition II: Il existe un ensemble linéaire indénombrable E tel que toute fonction de Baire d'une variable réelle est continue sur E quand on néglige un ensemble dénombrable de points.

Autrement dit[1]), A et B étant deux ensembles fermés et disjoints situés dans E, il s'agit de définir un ensemble simultanément fermé et ouvert F qui contient A et est disjoint de B. Transformons à ce but l'espace E par une fonction continue f en sous-ensemble de l'intervalle 01 de façon que $f(A)=0$ et $f(B)=1$; on peut poser, par exemple,

$$f(x)=\frac{\varrho(x,A)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$$

où $\varrho(x,X)$ désigne la borne inférieure des distances du point x aux points de l'ensemble X.

E étant un espace à propriété (ν), toute image continue de E est de mesure nulle[2]). Il existe donc un point p dans l'intervalle 01 qui n'est pas une valeur de la fonction f. Posons $F=$ l'ensemble des x tels que $f(x)<p$. Evidemment F est fermé et ouvert, contient A et est disjoint de B. Il est ainsi établi que E est de dimension 0.

Chaque espace de dimension 0 étant homéomorphe à un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{N}$ de tous les nombres irrationnels, on peut supposer que $E\subset\mathfrak{N}$. Nous allons construire à présent un ensemble $\mathfrak{N}^*$ homéomorphe à $\mathfrak{N}$ et tel que $E\subset\mathfrak{N}^*\subset\mathfrak{N}$ et que, quel que soit l'ensemble N non-dense dans $\mathfrak{N}^*$, le produit NE soit au plus dénombrable. Dès que l'ensemble $\mathfrak{N}^*$ sera construit, la démonstration du théorème sera achevée: une homéomorphie de $\mathfrak{N}^*$ en $\mathfrak{N}$ transforme E en un ensemble à propriété (L).

Passons à la construction de l'ensemble $\mathfrak{N}^*$. En désignant par E_c l'ensemble des points de condensation de E qui appartiennent à E, l'ensemble $\overline{E_c}$ est parfait. E_c constitue un sous-ensemble frontière dans $\overline{E_c}\cdot\mathfrak{N}$, puisque E ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait, comme ensemble à propriété (ν). En enlevant de $E_c\cdot\mathfrak{N}$ un ensemble dénombrable dense et disjoint de E_c, on obtient un ensemble H qui contient E_c, est un G_δ (dans la ligne droite) et satisfait à l'inclusion

$$H\subset\overline{\overline{H}-H} \tag{1}$$

(autrement dit: n'est localement fermé en aucun point).

En entourant chaque point de l'ensemble (dénombrable) $E-E_c$ par un intervalle ouvert de l'ensemble $\mathfrak{N}$, suffisamment petit, on

---

[1]) Cf. par ex. *Topologie I*, § 21, I.

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math., t. XI (1928), p. 302.

obtient un ensemble G ouvert dans $\mathfrak{M}$ et tel que

$$(2) \qquad E - E_c \subset G, \qquad G \cdot \overline{E}_c = 0, \qquad \overline{G} \cdot E_c \subset \overline{E - E_c}\ ^{1)}.$$

Posons $\mathfrak{M}^* = G + H$. Il vient, d'une part,

$$G \subset \overline{\overline{G} - \mathfrak{M}} \subset \overline{\overline{G} - (G + H)}$$

et, d'autre part, comme $H \subset \overline{E}_c$, on a selon (2) $G \cdot H = 0$ et il résulte de (1) que

$$H \subset \overline{\overline{H} - H} = \overline{\overline{H} - (G \cdot \overline{H} + H)} = \overline{\overline{H} - (G + H)}.$$

Par conséquent $G + H \subset \overline{\overline{G + H} - (G + H)}$, ce qui prouve que $G+H$ n'est localement fermé en aucun point. D'après un théorème de M. Mazurkiewicz[2]), c'est un ensemble homéomorphe à $\mathfrak{M}$.

Ceci établi, supposons, par impossible, qu'il existe un ensemble N non-dense dans $\mathfrak{M}^*$ et tel que l'ensemble NE soit indénombrable. L'ensemble $E - E_c$ étant dénombrable, on peut évidemment admettre que $N \subset E_c$.

N étant non-dense dans l'ensemble $\mathfrak{M}^* = G + H$, il vient $N \subset \overline{(G + H) - \overline{N}} = \overline{G - \overline{N}} + \overline{H - \overline{N}}$, d'où

$$N = N \cdot \overline{G - \overline{N}} + N \cdot \overline{H - \overline{N}}.$$

Ces deux sommandes sont non-denses dans E. Car d'une part, selon (2), on a $N \cdot \overline{G - \overline{N}} \subset E_c \cdot \overline{G} \subset E_c \cdot \overline{E - E_c}$ et ce dernier ensemble étant non-dense dans E (comme frontière relative à E de E_c), il en est de même de $N \cdot \overline{G - \overline{N}}$. D'autre part, l'inclusion $H \subset \overline{E}_c \subset \overline{E}$ entraîne $N \cdot \overline{H - \overline{N}} \subset \overline{N} \cdot \overline{\overline{E} - \overline{N}}$ et (comme auparavant) le deuxième ensemble étant non-dense dans $\overline{E}$, il en est de même du premier; celui-ci est donc non-dense dans E[3]).

Comme somme de deux ensembles non-denses dans E, N est non-dense dans E. Mais cela contredit la propriété (ν), puisque, par hypothèse, N est indénombrable. Le théorème I se trouve ainsi établi.

2. Démonstration du théor. II. Pour prouver la *nécessité* de la condition (ν), admettons que l'espace E contient un sous-ensemble indénombrable et non-dense N. On peut évidemment supposer

[1]) Cf. par ex. *Topologie I*, p. 99, 6.
[2]) Wektor 1918, No 16. Cf. *Topologie I*, p. 225.
[3]) Cf. *Topologie I*, p. 35, 4.

que N est de puissance $\aleph_1$ et que chaque point de N en est un point de condensation. Faisons correspondre à chaque point p de N une suite d'entourages relatifs à N qui convergent vers p. Chacun de ces entourages est donc de puissance $\aleph_1$. En outre, la famille F de tous ces entourages (lorsque p parcourt N) est de puissance $\aleph_1$ et, enfin l'ensemble N lui-même est de cette puissance. On peut donc, en vertu d'un théorème général[1]), décomposer N en deux ensembles disjoints P et Q qui ont $\aleph_1$ points communs avec chaque ensemble appartenant à la famille F. Chaque point de N est donc un point de condensation de P et de Q. Il en résulte que la fonction caractéristique de P, c. à d. identique à 1 aux points de P et à 0 aux points de $E - P$, n'est pas presque continue. D'autre part, comme fonction caractéristique d'un ensemble non-dense, c'est une fonction à propriété de Baire.

La *suffisance* de la condition (ν) est évidente: f étant une fonction à propriété de Baire définie sur l'espace E à propriété (ν), soit P un ensemble de première catégorie tel que f soit continue sur $E - P$. La propriété (ν) implique que P est dénombrable; f est donc presque continue[2]).

3. Démonstration du théor. III. Pour prouver la *nécessité* de notre condition admettons que l'ensemble E_c contient un sous-ensemble indénombrable N, non-dense dans E_c. La fonction caractéristique de l'ensemble $\overline{N}$, c. à d. telle que $f(\overline{N}) = 1$ et $f(E - \overline{N}) = 0$, est la fonction demandée: elle jouit de la propriété de Baire au sens restreint, car comme fonction caractéristique d'un ensemble fermé, elle est de I-re classe de Baire (même semi-continue supérieurement); elle n'est pas presque continue, car p étant un point de condensation de N, il existe dans chaque entourage de p une infinité indénombrable de points x tels que $f(x) = 1$ et, d'autre part, il y existe une infinité indénombrable des x tels que $f(x) = 0$, notamment des points de $E_c - \overline{N}$ (puisque $\overline{N}$ est non-dense dans E_c et E_c se compose exclusivement de points de condensation).

Passons à présent à la *suffisance*. Admettons que l'ensemble E_c jouit de la propriété (ν) et soit f une fonction à propriété de Baire au sens restreint définie sur E. Il existe par conséquent un ensemble P de première catégorie sur E_c tel que la fonction f est continue sur

[1]) *Hypothèse de continu*, p. 113, théorème 1.
[2]) Cf. Fund. Math., t. XV (1930), p. 212 et 285. Voir aussi *Hypothèse du continu*, p. 42.

$E_c - P$. Chaque ensemble non-dense dans E_c étant dénombrable, P est dénombrable. Comme d'autre part, l'ensemble $E - E_c$ est aussi dénombrable, on en conclut que f devient continue en supprimant l'ensemble dénombrable $P + E - E_c$. La fonction f est donc presque continue, c. q. f. d.

4. Remarques. 1. La fonction f considérée dans la première partie de la démonstration précédente étant semi-continue supérieurement, on en conclut que l'on peut dans le théor. III remplacer la propriété de Baire au sens restreint par la *semi-continuité supérieure* (donc par chaque notion contenue entre ces deux notions).

2. On peut démontrer que, pour qu'une fonction soit presque continue, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble ouvert H, l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartient à H soit „presque ouvert", c. à d. qu'il soit de la forme $G - P + R$ où G est ouvert et P et R sont dénombrables[1]). On en conclut facilement que E_c possède la propriété (ν) dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque chaque ensemble à propriété de Baire au sens restreint est presque ouvert.

3. Nous avons indiqué que la propriété (ν) de E_c est plus générale que la propriété (L) de E. Cependant la dernière propriété équivaut à la suivante: chaque fonction, définie pour tout x réel et jouissant de la propriété de Baire au sens large est presque continue sur E[2]).

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du théor. II.

---

[1]) C'est un cas particulier du théorème général suivant: soit F une famille d'ensembles qui contient: 1° chaque sous-ensemble de chaque ensemble qui lui appartient, 2° chaque somme d'une infinité dénombrable d'ensembles qui lui appartiennent; appelons „ensemble ouvert en négligeant F" tout ensemble de la forme $G - P + R$ où G est ouvert et P et R appartiennent à F; appelons „fonction continue en négligeant F" toute fonction qui devient continue en supprimant un ensemble de la classe F convenablement choisi. Avec ces définitions: *pour que la fonction f soit continue en négligeant F, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble ouvert H, l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartient à H soit ouvert en négligeant F.*

Pour la démonstration du cas particulier où F désigne la famille des ensembles de première catégorie, voir par ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, III-ème éd., Berlin-Leipzig 1935, p. 284, IV ou bien *Topologie I*, p. 172. La démonstration dans le cas général n'en diffère presque pas.

Les familles F ont été considérées par H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen* I, Berlin 1921, p. 176 et *Reelle Funktionen I*, Leipzig 1932, § 27, 4.

[2]) Cf. W. Sierpiński, C. R. Soc. Sc. Varsovie, Année XXVIII, Classe III, p. 25, Théor. II.

Un théorème concernant les translations d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

En utilisant une méthode de M. Banach[1]), j'ai démontré[2]) qu'il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, ne contient aucun sous-ensemble parfait et qui est transformé par chaque translation (le long de la droite) en lui-même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Il existe un ensemble linéaire N qui, ainsi que son complémentaire, contient un sous-ensemble parfait et qui est transformé par chaque translation (le long de la droite) en lui-même, si l'on néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. J'ai démontré avec M. Ruziewicz[3]) qu'il existe deux ensembles linéaires parfaits (non vides) disjoints, P et Q, tels que toute translation de l'un d'eux a avec toute translation de l'autre au plus un point commun.

Soit

$$(1) \qquad x_1 = 0,\ x_2,\ x_3, \dots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \dots,\ x_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal φ (de puissance du continu) formée de tous les nombres réels.

Désignons d'une façon générale par $E(a)$ la translation de l'ensemble E de longueur a (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels $x+a$, où $x \in E$); pour tout nombre ordinal $\alpha < \varphi$, désignons par E_α la somme de tous les ensembles $E(x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n})$ s'étendant

---

[1]) Voir S. Banach, *Fund. Math.* t. XIX, p. 10—16.

[2]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 24—27.

[3]) S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIX, p. 19 (Corollaire).