Beweis von Ia: Wir dürfen den zugrundegelegten Raum als kompakt voraussetzen, denn jeder totalbeschränkte Raum ist isometrisch einer Teilmenge eines kompakten Raumes[4]). Wir erweitern f auf die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M, indem wir für $p \subset \overline{M} - M$ das Bild $f(p)$ als die Menge der Häufungspunkte aller Folgen $f(p_n)$ erklären ($p_n \subset M$, $\lim p_n = p$). Es ist klar, daß die so erweiterte Abbildung immer noch eine Dehnung ist, und daß

$$f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} \subset \overline{M} \tag{1}$$

gilt.

Seien a, b Punkte von $\overline{M}$. Wir setzen $a_0 = a$, $b_0 = b$ und nehmen a_n als ein Element der Menge $f(a_{n-1})$ an und b_n als ein Element der Menge $f(b_{n-1})$ (die Möglichkeit dieser Rekursion folgt aus 1). Da f eine Dehnung ist, gilt

$$\varrho(a_m, a_n) \geqq \varrho(a_{m-1}, b_{n-1}), \qquad \varrho(b_m, b_n) \geqq \varrho(b_{m-1}, b_{n-1}), \tag{2}$$

$$\varrho(a_n, b_n) \geqq \varrho(a_{n-1}, b_{n-1}). \tag{3}$$

Wegen der Kompaktheit des Raumes gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl i und eine natürliche Zahl k mit

$$\varrho(a_i, a_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varrho(b_i, b_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach 2 folgt daraus

$$\varrho(a_0, a_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varrho(b_0, b_k) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

und nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho(a_k, b_k) < \varrho(a_0, b_0) + \varepsilon.$$

Daraus folgt nach 3

$$\varrho(a_0, b_0) \leqq \varrho(a_1, b_1) < \varrho(a_0, b_0) + \varepsilon,$$

also

$$\varrho(a_0, b_0) = \varrho(a_1, b_1),$$

d. h. die Abbildung f ist eine *Isometrie*.

Da nach 4 in jeder Nähe von a Punkte aus $f(\overline{M})$ vorkommen (nämlich die a_k), liegt $f(\overline{M})$, also nach 1 auch $f(M)$ überall dicht in $\overline{M}$. Damit ist auch der zweite Teil von Ia bewiesen.

Problem: Läßt sich etwas Schärferes aussagen über die etwa in Satz IV ausgedrückte Kompensation von Dehnungen durch Verkürzungen und umgekehrt?

[4]) Die vollständige Hülle des Raumes (Hausdorff, *Mengenlehre*, 2. Aufl., 1927, S. 107) beispielsweise ist kompakt.

Über den Lusternik-Schnirelmannschen Begriff der Kategorie [1]).

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

In ihren Untersuchungen auf dem Gebiete der Differentialgeometrie und der Variationsrechnung haben die Herren L. Lusternik[2]) und L. Schnirelmann[3]) eine neue, für abgeschlossene Teilmengen E einer Mannigfaltigkeit definierte topologische Invariante eingeführt und *Kategorie von E in Bezug auf M* genannt. Die von ihnen eingeführte Definition läßt sich folgendermassen formulieren:

(1) *Die Kategorie von E in Bezug auf M (Bezeichnung: $\mathrm{cat}_M E$) ist die kleinste von derartigen Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, daß E eine Zerlegung in $\mathfrak{m}$ in E abgeschlossene und in M zusammenziehbare Teilmengen zuläßt.*

Die Kategorie (schlechthin) von M (Bezeichnung: $\mathrm{cat}\, M$) heißt die Kategorie von M in Bezug auf M selbst.

In dieser Form hat die Definition der Kategorie einen Sinn nicht nur dann, wenn E eine abgeschlossene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist, sondern auch im allgemeinsten Falle irgendeiner Teilmenge E eines ganz beliebigen Raumes M. Da man in dem Begriff

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meiner in C. R. Bd. 198 (1934), S. 1730 befindlichen Note veröffentlicht worden.

[2]) L. Lusternik, *Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 125—130.

[3]) L. Schnirelmann, *Über eine neue kombinatorische Invariante*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 131—134.

der Kategorie eine neue, ganzzahlige, topologische Invariante hat, welche — ihrem Wesen nach — einer Homotopieeigenschaft entspricht und von den Homologieinvarianten wesentlich verschieden ist (vgl. den Satz 6′), so scheint es vom Standpunkte der allgemeinen Topologie nicht ohne Interesse zu sein, die Kategorie auch für allgemeinere Räume als die Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.

Besonders beachtenswert erweist sich hier der Fall, wo M ein kompakter, lokal zusammenziehbarer Raum ist. Es lassen sich nämlich fast sämtliche, für den Fall einer Mannigfaltigkeit von Herren Lusternik und Schnirelmann bewiesene Sätze auf diese allgemeinere Räume übertragen. Dies zu zeigen, ist die erste Aufgabe der vorliegenden Arbeit. Die zweite ist, eine gewiße Relation zwischen Kategorie und Fundamentalgruppe aufzustellen. Diese Relation wird uns insbesondere festzustellen erlauben, daß die Kategorie keine Homologieinvariante ist.

Unter einem *Raum* wird hier stets ein metrischer nichtleerer Raum verstanden. Ist E eine Teilmenge eines Raumes M, so wird die Menge $U \subset M$ *Umgebung von* E *in* M genannt, wenn E im Inneren von U enthalten ist, d. h. wenn die abgeschlossene Hülle von $M-U$ keinen Punkt von E enthält. Diese Umgebung von E, welche aus denjenigen Punkten von M besteht, die höchstens um ein positives ε von E entfernt sind, heißt ε*-Umgebung von* E *in* M.

Wir werden sagen, daß B *aus* A *durch eine Deformation in* M *hervorgeht*, wenn es eine stetige Funktion $f(x, t)$ gibt, welche für jedes $x \epsilon A$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ definiert ist, wobei $f(A, 1)=B$, $f(x, 0)=x$ und $f(x, t) \epsilon M$ für jedes x und t gilt. Wenn insbesondere durch eine Deformation in M eine einpunktige Menge aus A hervorgehen kann, so wird A *in* M *zusammenziehbar* genannt.

Ein Raum M wird *lokal zusammenziehbar* genannt, wenn es für jeden Punkt $p \epsilon M$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt derart, daß η-Umgebung von p in der ε-Umgebung von p zusammenziehbar ist. Ein Raum M heißt *in der* n*-ten Dimension lokal zusammenhängend*, wenn es für jeden Punkt $p \epsilon M$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt derart, daß jede auf der Randsphäre S_n der $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Vollkugel V_{n+1} definierte stetige Funktion mit den in der η-Umgebung von p liegenden Werten sich zu einer stetigen Abbildung der ganzen Vollkugel V_{n+1} in die ε-Umgebung von p erweitern läßt. Es ist bekannt, daß im Falle, wo die Menge $f(S_n)$ in M zusammenziehbar ist, f zu einer stetigen Abbildung von V_{n+1} in M sich erweitern läßt. Daraus folgt, daß jeder lokal zusammenziehbare Raum lokal zusammenhängend in jeder Dimension ist.

Unter einem *Produkt* zweier Räume A und B wird der Raum $A \times B$ verstanden, der als Elemente alle Paare (x, y) mit $x \epsilon A$ und $y \epsilon B$ hat und der durch die Formel $\varrho[(x, y), (x', y')] = \sqrt{\varrho(x, x')^2 + \varrho(y, y')^2}$ metrisiert ist.

Aus (1) folgt unmittelbar:

(2) *Ist* $A \subset B \subset M$, *so gilt* $\operatorname{cat}_M A \leqslant \operatorname{cat}_M B$.

(3) *Ist* $A \subset M \subset N$, *so gilt* $\operatorname{cat}_M A \geqslant \operatorname{cat}_N A$.

(4) *Sind* A *und* B *zwei in ihrer Summe abgeschlossene Teilmengen von* M, *so gilt*
$$\operatorname{cat}_M (A+B) \leqslant \operatorname{cat}_M A + \operatorname{cat}_M B.$$

(5) *Ist* $A \subset M \subset N$, *wobei kein in* N *liegender Bogen gleichzeitig Punkte von* M *und* $N-M$ *enthält, so gilt*
$$\operatorname{cat}_M A = \operatorname{cat}_N A.$$

Wir haben ferner:

(6) *Geht* B *aus* A *durch eine Deformation in* M *hervor, so gilt*
$$\operatorname{cat}_M A \leqslant \operatorname{cat}_M B\ [4]).$$

Aus (1) folgt nämlich die Existenz einer Klasse $\mathfrak{M}$ von der Mächtigkeit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \operatorname{cat}_M B$, deren Elemente die in B abgeschlossenen und in M zusammenziehbaren Mengen mit der Summe B sind. Es sei nun $f(x, t)$ die Funktion, welche A in B (im Raume M) stetig überführt. Wir ordnen jeder Menge $E \epsilon \mathfrak{M}$ die Menge $f^{-1}(E, 1) = \underset{x \epsilon A}{E}[f(x, 1) \epsilon E]$ [5]) zu. Die Mengen $f^{-1}(E, 1)$ bilden dann eine Klasse $\mathfrak{M}'$ abgeschlossener (der Stetigkeit von $f(x, 1)$ halber) Teilmengen von B, wobei $f^{-1}(E, 1)$ durch $f(x, t)$ in die in M zusammenziehbare Menge E stetigerweise übergeführt wird. Es folgt daraus, daß die der Klasse $\mathfrak{M}'$ angehörenden Mengen in M zusammenziehbar sind, womit die Ungleichung $\operatorname{cat}_M A \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}'}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \operatorname{cat}_M B$ bewiesen ist.

(7) *Sind* A *und* B *zwei in ihrer Summe abgeschlossene und disjunkte Teilmengen eines Raumes* M, *dessen je zwei Punkte sich durch einen Bogen verbinden lassen, so gilt:*
$$\operatorname{cat}_M (A+B) = \operatorname{Max}(\operatorname{cat}_M A, \operatorname{cat}_M B).$$

Es sei $\mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{N}$) eine Punktmengenklasse von der Mächtigkeit $\operatorname{cat}_M A$ (bzw. $\operatorname{cat}_M B$), die eine Zerlegung von A (bzw. von B) in abgeschloßene und in M zusammenziehbare Mengen darstellt. Wir können $\operatorname{cat}_M A \leqslant \operatorname{cat}_M B$ annehmen. Es gibt dann eine eineindeutige Zuordnung ψ, welche jeder Menge $E \epsilon \mathfrak{M}$ eine Menge $\psi(E) \epsilon \mathfrak{N}$ zuordnet. Mit $\mathfrak{M}_0$ bezeichnen wir die Klasse aller Mengen von der Gestalt $E + \psi(E)$, wo $E \epsilon \mathfrak{M}$, und aller Mengen, welche der Klasse $\mathfrak{N} - \psi(\mathfrak{M})$ angehören. Da E in A, $\psi(E)$ in B und A und B in $A+B$ abgeschlossen sind, sind alle Elemente von $\mathfrak{M}_0$

---

[4]) Vgl. L. Lusternik, l. c. S. 127, 3.

[5]) $\underset{x \epsilon A}{E}[\ ]$ bedeutet die aus allen Punkten x von der Eigenschaft $[\ ]$ bestehende Teilmenge von A.

in $A+B$ abgeschlossen, wobei ihre Vereinigungsmenge gleich $A+B$ ist und es gilt $\overline{\overline{\mathfrak{M}_0}} = \overline{\overline{\mathfrak{N}}} = \mathrm{cat}_M B = \mathrm{Max}\,(\mathrm{cat}_M A,\ \mathrm{cat}_M B)$. Mit Rücksicht auf (2), bleibt es nur zu zeigen, daß jede Menge $E_0 \epsilon \mathfrak{M}_0$ in M zusammenziehbar ist. Da im Falle wo $E_0 \epsilon \mathfrak{N} - \psi(\mathfrak{M})$ die Zusammenziehbarkeit von E_0 explizit vorausgesetzt wurde, so können wir $E_0 = E + \psi(E)$ mit $E \epsilon \mathfrak{M}$ annehmen. Es sei nun $f(x,t)$ (bzw. $f'(x,t)$) eine Funktion, welche E (bzw. $\psi(E)$) in M zusammenzieht. Nach unserer Voraussetzung über den Raum M, gibt es ferner eine stetige Funktion $\varphi(x,t)$, welche die höchstens zweipunktige Menge $f(E,1) + f'(\psi(E),1)$ in M zusammenzieht. Wenn wir nun

$$\begin{aligned} f_0(x,t) &= f(x,2t) && \text{für jedes } x \epsilon E; && 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2},\\ f_0(x,t) &= f'(x,2t) && \text{für jedes } x \epsilon \psi(E); && 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2},\\ f_0(x,t) &= \varphi[f_0(x,\tfrac{1}{2}),\, 2t-1] && \text{für jedes } x \epsilon E_0; && \tfrac{1}{2} < t \leqslant 1, \end{aligned}$$

setzen, so ist es leicht zu ersehen, daß die dadurch definierte Funktion f_0 die Menge E_0 in M zusammenzieht, womit der Beweis beendet ist.

(8) *Sind A und B zwei disjunkte und in ihrer Summe abgeschlossene Teilmengen von M, wobei sich kein Punkt von A mit keinem Punkt von B durch einen Bogen verbinden läßt, so gilt:*

$$\mathrm{cat}_M(A+B) = \mathrm{cat}_M A + \mathrm{cat}_M B.$$

Es sei $\mathfrak{M}_0$ eine Punktmengenklasse von der Mächtigkeit $\mathrm{cat}_M(A+B)$, welche eine Zerlegung von $A+B$ in abgeschlossene (in $A+B$) und in M zusammenziehbare Mengen darstellt. Da kein Punkt von A mit keinem Punkt von B durch einen Bogen verbindbar ist, so schließen wir, daß $\mathfrak{M}_0$ in zwei disjunkte Summanden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zerfällt, von denen der erste eine Zerlegung von A in abgeschlossene (in A) und in M zusammenziehbare Mengen, und der zweite eine ähnliche Zerlegung von B darstellt. Nach (1) muß somit $\mathrm{cat}_M A \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ und $\mathrm{cat}_M B \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{N}}}$ gelten. Da ferner $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} + \overline{\overline{\mathfrak{N}}} = \overline{\overline{\mathfrak{M}_0}} = \mathrm{cat}_M(A+B)$ gilt, so folgt daraus $\mathrm{cat}_M A + \mathrm{cat}_M B \leqslant$ $\leqslant \mathrm{cat}_M(A+B)$ und schließlich, nach (4): $\mathrm{cat}_M A + \mathrm{cat}_M B = \mathrm{cat}_M(A+B)$, w. z. b. w.

Aus den Behauptungen (5) und (8) ergibt sich unmittelbar:

(9) *Ist M Summe zweier abgeschlossener disjunkter Mengen M_1 und M_2, so gilt für jede Menge $A \subset M$:*

$$\mathrm{cat}_M A = \mathrm{cat}_M(A \cdot M_1) + \mathrm{cat}_M(A \cdot M_2)$$

Nun beweisen wir folgenden

Satz 1. *Hat eine zusammenhängende Menge A endliche Kategorie in Bezug auf M, so lassen sich je zwei Punkte von A durch einen in M liegenden einfachen Bogen verbinden.*

Beweis. Es sei $A = E_1 + E_2 + \ldots E_n$ eine Zerlegung von A in abgeschlossene (in A) und zusammenziehbare (in M) Teilmengen E_i. Dem Zusammenhange von A zufolge, gibt es dann für irgend zwei Punkte $a, b \epsilon A$ ein endliches Indexsystem $n_1, n_2, \ldots n_k$ derart, daß $a \epsilon E_{n_1}$, $b \epsilon E_{n_k}$ gilt und daß sich jedem $i = 1, 2, \ldots, (k-1)$ ein Punkt

$$p_i \epsilon E_{n_i} \cdot E_{n_{i+1}} \tag{10}$$

zuordnen läßt. Die Bedingung (10) wird auch für $i=0$ und $i=k$ gelten, wenn wir $n_0 = n_1$, $n_{k+1} = n_k$, $p_0 = a$ und $p_{k+1} = b$ setzen. Es bezeichne nun $f_i(x,t)$ eine Funktion, welche $E_{n_{i+1}}$ im Raum M zusammenzieht. Auf Grund von (10) ist $f_i(x,t)$ für $x = p_i$ und $x = p_{i+1}$ bestimmt, wobei die Mengen $P_i' = \underset{x}{E}[x = f_i(p_i, t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1]$ und $P_i'' = \underset{x}{E}[x = f_i(p_{i+1}, t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1]$ Streckenbilder sind, die entsprechend p_i und p_{i+1} enthalten und den Punkt $f_i(p_i, 1) = f_i(p_{i+1}, 1)$ gemeinsam haben. Die Menge $P_i = P_i' + P_i''$ ist somit ein Streckenbild, welches p_i und p_{i+1} in M verbindet. Hieraus ergibt sich, daß $P = \sum_{i=0}^{k} P_i$ ein Streckenbild ist, welches die Punkte $p_{n_0} = a$ und $p_{n_{k+1}} = b$, und somit auch einen diese Punkte verbindenden Bogen enthält, w. z. b. w.

Aus (9) und dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich folgendes

Korollar. *Damit die Kategorie (schlechthin) eines Raumes endlich sei, ist es notwendig, daß je zwei Punkte irgendeiner Komponente dieses Raumes durch einen Bogen verbindbar seien und daß die Anzahl aller Komponenten endlich sei.*

Es folgt aus den einfachsten Beispielen [6]), daß die Bedingung aus dem letzten Korollar für die Endlichkeit der Kategorie nicht hinreichend ist. Eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung dafür wird durch folgenden Satz gegeben:

---

[6]) Ein solches Beispiel befindet sich z. B. in den Fund. Math. 17 (1931), S. 163.

Satz 2. *Jede in sich kompakte Teilmenge eines lokal zusammenziehbaren Raumes hat in Bezug auf diesen Raum eine endliche Kategorie.*

Es sei, in der Tat, A eine in sich kompakte Teilmenge eines lokal zusammenziehbaren Raumes M. Für jedes $p \in A$ gibt es dann eine in M zusammenziehbare und abgeschlossene Umgebung U_p. Dem bekannten Heine-Borelschen Überdeckungssatz zufolge gibt es dann ein endliches Punktensystem $p_1, p_2, \dots p_k$ derart, daß $A = \sum_{i=1}^{k} (A \cdot U_{p_i})$ gilt, womit eine endliche Zerlegung von A in abgeschlossene und in M zusammenziehbare Mengen $A \cdot U_{p_i}$ gegeben ist.

Satz 3. *Für jede abgeschlossene Teilmenge A eines lokal zusammenziehbaren endlichdimensionalen kompakten Raumes M gibt es eine Umgebung U von der Art, daß $\mathrm{cat}_M U = \mathrm{cat}_M A$ gilt.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 2 ist die Zahl $n = \mathrm{cat}_M A$ endlich. Wir betrachten nun eine Zerlegung von A in n in sich kompakte und in M zusammenziehbare Mengen $E_1, E_2, \dots, E_n$. Es sei $f_i(x, t)$ eine Funktion, welche E_i in M auf einen Punkt p_i zusammenzieht. f_i ist somit eine Funktion, welche das Produkt $E_i \times \langle 0,1 \rangle$ der Menge E_i und der Strecke $\langle 0,1 \rangle$ stetigerweise in M abbildet. Wenn wir nun $f_i(x, 0) = x$ und $f_i(x, 1) = p_i$ für jedes $x \in M$ setzen, so gelangen wir zu einer stetigen Funktion, welche die abgeschlossene Teilmenge $Q_i = E_i \times \langle 0,1 \rangle + M \times (0) + M \times (1)$ des Produktraumes $M \times \langle 0,1 \rangle$ in M abbildet. Da M ein endlichdimensionaler lokal zusammenziehbarer kompakter Raum ist, so läßt sich f_i zu einer stetigen Abbildung einer Umgebung (im Raume $M \times \langle 0,1 \rangle$) G_i von Q_i in M erweitern [7]). Für eine hinreichend kleine abgeschlossene Umgebung (im Raume M) U_i von E_i gilt aber $U_i \times \langle 0,1 \rangle \subset G_i$, woraus folgt, daß die erweiterte Funktion f_i die Umgebung U_i im Raume M zusammenzieht. Da ferner U_i in M abgeschlossen, also in sich kompakt vorausgesetzt wurde, so ist U_i auch in der Menge $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$ abgeschlossen. U bildet somit eine Umgebung von A, deren Kategorie $\leqslant n$ ist. Da aber, nach (2), $\mathrm{cat}_M U \geqslant \mathrm{cat}_M A = n$ gilt, so ist $\mathrm{cat}_M U = \mathrm{cat}_M A$, womit der Beweis beendet ist.

Satz 4. *Für jede in sich kompakte Teilmenge A eines zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raumes M gilt*

$$\mathrm{cat}_M A \leqslant \dim A + 1.$$

[7]) Fund. Math. 19 (1932), S. 224 u. S. 240.

Zunächst beweisen wir:

(11) *Je zwei Punkte eines zusammenhängenden und in der 0-ten Dimension lokal zusammenhängenden Raumes M lassen sich in M durch einen Bogen verbinden.*

Es bezeichne M_0 die Menge derjenigen Punkte von M, welche sich mit einem beliebigen (aber festen) Punkt $p_0 \in M$ durch einen Bogen verbinden lassen. Es ist zu zeigen, daß $M_0 = M$ gilt. Sonst gäbe es nämlich einen Punkt p, der gleichzeitig ein Häufungspunkt von M_0 und von $M - M_0$ ist. Da M in der 0-ten Dimension lokal zusammenhängend ist, so gibt es eine Umgebung U von p derart, daß sich jeder Punkt von U mit p durch einen einfachen Bogen verbinden läßt. Wenn wir insbesondere einen Punkt $a \in U \cdot M_0$ und einen Punkt $b \in U - M_0$ betrachten, so schließen wir, daß sich a und b, und somit auch b und p_0 in M durch einen einfachen Bogen verbinden lassen, was der Voraussetzung $b \in U - M_0$ und der Definition von M_0 widerspricht.

Beweis des Satzes 4. Da im Falle wo A unendlichdimensional ist die Behauptung ohne weiteres aus dem Satz 2 folgt, können wir $n = \dim A < \aleph_0$ annehmen. Da ferner im Falle $n = -1$, d. h. $A = 0$, die Behauptung trivialerweise richtig ist, wollen wir annehmen, die Behauptung sei für den Fall $n \leqslant k$ gültig und werden unter dieser Annahme ihre Gültigkeit für den Fall $n = k + 1$ beweisen. Auf Grund der Kompaktheit von A und des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes schließen wir, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß jede Teilmenge von A vom Durchmesser $\leqslant \varepsilon$ in M zusammenziehbar ist. Da A eine in sich kompakte und n-dimensionale Menge ist, so gibt es eine abgeschlossene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge A_0 von A von der Art, daß $A - A_0$ Summe endlichvieler, paarweise disjunkter und in $A - A_0$ abgeschlossener Punktmengen $G_1, G_2, \dots, G_p$ ist, wobei jedes G_i einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Nach dem für die Dimensionen $\leqslant k = n - 1$ als gültig angenommenen Satz, gibt es dann eine Zerlegung $A_0 = E_1 + E_2 + \dots + E_n$, wobei die Mengen E_i in sich kompakt und in M zusammenziehbar sind. Sei also $f_i(x, t)$ die für jedes $(x, t) \in E_i \times \langle 0,1 \rangle \subset A \times \langle 0,1 \rangle$ definierte stetige Abbildung mit den in M liegenden Werten, welche die Bedingungen $f_i(x, 0) = x$, $f_i(x, 1) = p_i$ für jedes $x \in E_i$ erfüllt. Wenn wir ferner $f_i(x, 0) = x$ und $f_i(x, 1) = p_i$ für jedes $x \in A$ setzen, so erhalten wir eine stetige Funktion, welche die abgeschlossene Teilmenge $Q_i = E_i \times \langle 0,1 \rangle + A \times (0) + A \times (1)$ des Produktraumes $A \times \langle 0,1 \rangle$ in M abbildet. Da A endlichdimensional und M lokal zusammenziehbar ist, läßt sich f_i zu einer stetigen Abbildung einer Umgebung G_i von Q_i in M erweitern [8]). Auf dieselbe Art, wie bei dem Beweis des Satzes 3 schließen wir, daß die so erweiterte Funktion f_i eine abgeschlossene Umgebung (in A) U_i von E_i in M zusammenzieht. Es folgt daraus, daß die abgeschlossene Umgebung $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ von A_0 (in A) eine Kategorie $\leqslant n$ hat. Die Menge $\overline{A - U}$ ist dabei Summe in sich kompakter und disjunkter Mengen $B_j = \overline{G_j - U}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, die Durchmesser $< \varepsilon$ haben und somit in M zusammenziehbar sind. Daraus und aus (7) und (11) folgt, daß die Kategorie von $B = \sum_{j=1}^{p} B_j$ gleich 1 ist. Es bleibt nun (2), (4) und die Beziehung $\overline{A - U} \subset B$ zu beachten, um die Ungleichung $\mathrm{cat}_M A \leqslant \mathrm{cat}_M U + \mathrm{cat}_M \overline{A - U} \leqslant \leqslant \mathrm{cat}_M U + \mathrm{cat}_M B \leqslant n+1$ zu erhalten.

Die durch den Satz 4 angegebene Abschätzung der Kategorie läßt sich im Allgemeinen nicht weiter verschärfen, denn nach L. Schnirelmann [9]) hat der n-dimensionale Torus (d. h. das Produkt von n Kreislinien) die Kategorie $n+1$. Auch die Voraussetzung der lokalen Zusammenziehbarkeit läßt sich nicht wesentlich abschwächen und z. B. durch die des lokalen Zusammenhanges ersetzen. Es gibt nämlich schon in der Ebene lokal zusammenhängende Kurven, die eine Kategorie gleich einer beliebig gegebenen Zahl $m \leqslant \aleph_0$ haben [10]).

Satz 5. *Ist A eine in sich kompakte Teilmenge eines in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängenden Raumes M, so gibt es eine Überdeckung von A mit $m = \mathrm{cat}_M A$ Streckenbildern, die in M zusammenziehbar sind.*

Wir beginnen mit dem Beweis des folgenden einfachen Hilfssatzes:

Hilfssatz. *Ist A eine in sich kompakte Teilmenge eines zusammenhängenden und in der 0-ten Dimension lokal zusammenhängenden Raumes M, so gibt es in M ein A enthaltendes Streckenbild C, für welches* $\dim (C - A) \leqslant 1$ *gilt.*

Beweis. Mit Rücksicht auf (11) und die Kompaktheit (in sich) von A, läßt sich jedem Punktpaar (x, y) von A ein diese Punkte in M verbindender einfacher Bogen $L(x, y)$ zuordnen, und zwar derart, daß für hinreichend kleines $\varrho(x, y)$ der Bogen $L(x, y)$ beliebig kleinen Durchmesser hat. Es sei nun φ eine stetige Funktion, welche die bekannte triadische diskontinuierliche Cantorsche Menge N auf A abbildet. Wir erweitern nun φ zu einer stetigen Abbildung der ganzen Strecke $\langle 0,1 \rangle$ und zwar derart, daß wir φ auf jedem Komplementärintervalle $\langle a,b \rangle$ von $\langle 0,1 \rangle - N$ zu irgendeiner stetigen Abbildung von $\langle a,b \rangle$ auf den Bogen $L(\varphi(a), \varphi(b))$ erweitern. Da $L(x, y)$ einen mit $\varphi(x, y)$ gegen Null konvergierenden Durchmesser hat, so ist die so erweiterte Funktion φ auf der ganzen Strecke $\langle 0,1 \rangle$ stetig, d. h. $C = \varphi(\langle 0,1 \rangle)$ ein Streckenbild ist. Da ferner $C - A$ in der Summe höchstens abzählbar vieler Bögen enthalten ist, so ist die Behauptung unseres Hilfssatzes erfüllt.

Beweis des Satzes 5. Es genügt offenbar den Beweis im Falle $\mathrm{cat}_M A = 1$ durchzuführen. Da ferner alle Komponenten eines in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängenden Raumes ebenso in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängend sind, so können wir annehmen, daß M zusammenhängend ist. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz, gibt es in M ein Streckenbild C, welches A enthält und für welches $\dim (C - A) \leqslant 1$ gilt. Es sei nun $\varphi(x, t)$ eine A in M auf den Punkt p_0 zusammenziehende Funktion. Wenn wir $\varphi(x, 0) = x$ und $\varphi(x, 1) = p_0$ auch für jedes $x \in C - A$ setzen, so wird φ zu einer die abgeschlossene Teilmenge $B = A \times \langle 0,1 \rangle + C \times (0) + C \times (1)$ in M abbildenden Funktion, wobei $C \times \langle 0,1 \rangle - B \subset (C - A) \times \langle 0,1 \rangle$ eine höchstens zweidimensionale Menge ist. Wenn wir nun beachten, daß M lokal zusammenhängend in den Dimensionen $\leqslant 1$ ist, so schließen wir [8]), daß sich φ zu einer stetigen Abbildung einer Umgebung G von B (im Raume $C \times \langle 0,1 \rangle$) in M erweitern läßt. Wenn wir nun C in endlichviele Streckenbilder mit Durchmessern kleiner als eine beliebige Konstante $\alpha > 0$ zerlegen und die Summe derjenigen von diesen Streckenbildern, welche Punkte von A enthalten, beachten, so gelangen wir zu einer Umgebung von A in C, welche in eine Summe von endlich vielen disjunkten Streckenbildern $C_1, C_2, \ldots, C_k$ zerfällt. Ist aber α hinreichend klein, so bildet die Summe $C_1 + C_2 + \ldots + C_k$ eine beliebig kleine Umgebung von A in C. Somit können wir annehmen, daß α so klein gewählt wurde, daß $C_i \times \langle 0,1 \rangle \subset G$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt. Es folgt daraus, daß jede von den Mengen $C_1, C_2, \ldots, C_k$ durch die erweiterte Funktion $\varphi(x, t)$ in M zusammengezogen wird.

[8]) C. Kuratowski, Fund. Math. 24 (1935), S. 272 und 273.
[9]) l. c. S. 34.
[10]) Fund. Math. 23 (1935), S. 285—291.

Ist nun $k=1$, so sind wir fertig. Ist dagegen $k>1$, so gibt es zwei Punkte $a \epsilon C_1$ und $b \epsilon C_2$, und einen diese Punkte in M verbindenden Bogen L. Es gibt dann einen Teilbogen L' von L, dessen Endpunkte zu zwei verschiedenen von den Streckenbildern $C_1, C_2, \ldots, C_k$ gehören, der aber sonst zu allen diesen Streckenbildern punktfremd ist.

Ohne die Allgemeinheit unserer Betrachtungen zu vermindern, können wir annehmen, daß $L=L'$ ist. Die Mengen $C_1+L+C_2, C_3, \ldots, C_k$ sind dann disjunkte Streckenbilder. Da ihre Anzahl $k-1$ ist, so wird unser Beweis auf Grund des Induktionsprinzips beendet, wenn wir nur zeigen, daß C_1+L+C_2 in M zusammenziehbar ist. Um dies zu beweisen, führen wir eine parametrische (homöomorphe) Darstellung $\alpha(\theta)$ des Bogens L ein, und zwar derart, daß $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\alpha(-1)=a$ und $\alpha(1)=b$ gelte. Dann setzen wir:

$$\begin{array}{llll}
\psi(x,t)=\varphi(x,2t), & \text{wenn} & x \epsilon C_1+C_2 & \text{und } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\
\psi[\alpha(\theta),t]=\alpha[(1+t)\theta], & \text{wenn} & |\theta| \leqslant \dfrac{1}{1+t} & \text{und } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\
\psi[\alpha(\theta),t]=\varphi[a,-2((1+t)\theta+1)], & \text{wenn} & -1\leqslant\theta\leqslant \dfrac{-1}{1+t} & \text{und } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\
\psi[\alpha(\theta),t]=\varphi[b,2((1+t)\theta-1)], & \text{wenn} & \dfrac{1}{1+t}\leqslant\theta\leqslant 1 & \text{und } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}, \\
\psi(x,t)=\psi[\alpha(2t-2),\frac{1}{2}], & \text{wenn} & x \epsilon C_1 & \text{und } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1, \\
\psi(x,t)=\psi[\alpha(-2t+2),\frac{1}{2}], & \text{wenn} & x \epsilon C_2 & \text{und } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1, \\
\psi[\alpha(\theta),1]=\psi[\alpha(2\theta-2t\theta),\frac{1}{2}], & \text{wenn} & -1\leqslant\theta\leqslant 1 & \text{und } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.
\end{array}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die durch diese Formeln definierte Funktion ψ die Menge C_1+L+C_2 in M zusammenzieht, womit der Beweis beendet ist.

Korollar. *Ist M ein kompakter und in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängender Raum, so gibt es eine Zerlegung von M in $m = \operatorname{cat} M$ (aber offenbar nicht in weniger als m) Streckenbilder, die in M zusammenziehbar sind.*

Unter einem *geschlossenen Weg im Raume M* versteht man eine stetige Funktion f, welche die Kreislinie $S_1 = \underset{z}{E}[|z|=1]$ auf eine Teilmenge von M abbildet. Der Weg f heißt dabei *homotop Null im Raume M*, wenn sich f zu einer stetigen Abbildung der ganzen Kreisscheibe $V_2 = \underset{z}{E}[|z|\leqslant 1]$ in M erweitern läßt.

Zunächst beweisen wir:

(12) $\left\{\right.$ *Ist f eine Homöomorphie und $f(S_1)$ ein Retrakt von M, so ist f in M nicht homotop Null.*

Zum Beweis betrachten wir eine Funktion φ, welche M auf $f(S_1)$ retrahiert. Existiere nun eine Erweiterung f_0 von f auf V_2, so wäre die Funktion $f^{-1}\varphi f_0(x)$ eine V_2 auf S_1 retrahierende Funktion, trotz der bekannten Tatsache, daß S_1 kein Retrakt von Q_1 ist [11]).

Es ist schließlich zu bemerken, daß aus der Homotopie zu Null in M sämtlicher in einer Teilmenge A von M liegender geschlossener Wege folgt, daß jede den Rand irgendeines zweidimensionalen Elementes E (d. h. eines mit der Kreischeibe homöomorphen Raumes) stetigerweise in A abbildende Funktion sich zu einer stetigen Abbildung von E in M erweitern läßt.

Satz 6. *Ein in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängendes Kontinuum M von der Kategorie $\leqslant 2$ ist dann und nur dann unikohärent [12]), wenn jeder geschlossene Weg homotop Null in M ist.*

Da für Streckenbilder die Unikohärenz mit dem Verschwinden der eindimensionalen Bettischen Zahl gleichbedeutend ist [13]), wie auch die Homotopie sämtlicher geschlossener Wege mit Null mit dem Verschwinden der Fundamentalgruppe [14]), so läßt sich der Satz 6 auch folgendermaßen formulieren:

Satz 6'. *Für die in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängenden Kontinuen von der Kategorie $\leqslant 2$ ist das Verschwinden der eindimensionalen Bettischen Zahl mit dem Verschwinden der Fundamentalgruppe gleichbedeutend.*

Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Ist M ein in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängender Raum und A eine in sich kompakte und in M zusammenziehbare Menge, so gibt es eine Umgebung U von A derart, daß jeder in U liegende geschlossene Weg homotop Null in M ist.*

---

[11]) Siehe z. B. Fund. Math. 17 (1931), S. 161.

[12]) Ein zusammenhängender Raum M heißt *unikohärent*, wenn bei jeder Zerlegung von M in zwei abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen A und B, der Durchschnitt $A \cdot B$ zusammenhängend ist.

[13]) Siehe E. Čech, Fund. Math. 20 (1933), S. 232. Auch K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 230.

[14]) Was die Definition der Fundamentalgruppe anbetrifft, siehe z. B. S. Lefschetz, *Topology*, New York 1930, S. 82.

Beweis. Auf Grund des Satzes 5, können wir uns auf den Fall beschränken, wo A ein Streckenbild ist. Es gibt ferner ein $\varepsilon>0$ derart, daß für jeden Punkt $p\in A$ jeder in der ε-Umgebung von p liegende geschlossene Weg in M homotop Null ist. Zu diesem ε gibt es ein $\eta>0$ derart, daß man je zweien in der η-Umgebung irgendeines Punktes p von A liegenden Punkten a, b einen Bogen $L(a, b)$ zuordnen kann, und zwar derart, daß $L(a,b)$ in der ε-Umgebung von p liege und daß, wenn a und b zu A gehören, $L(a, b)\subset A$ gelte.

Es sei nun U die $\frac{1}{3}\eta$-Umgebung von A und f ein in U liegender geschlossener Weg. Wir setzen:

$$L_k=\underset{z}{E}\left[z=e^{2\pi\varphi i};\ \frac{k}{m}\leqslant\varphi\leqslant\frac{k+1}{m}\right]\qquad\text{für}\quad k=0, 1,\ldots, (m-1).$$

Die Bögen L_k bilden dann, für ein hinreichend großes M, eine beliebig feine Zerlegung der Kreislinie S_1. Wir können also m so groß wählen, daß die Mengen $f(L_k)$ Durchmesser $<\frac{1}{3}\eta$ haben. Da der Weg f in U liegt, können wir jedem $k=0, 1,\ldots, (m-1)$ einen in der $\frac{1}{3}\eta$-Umgebung von $f(e^{2\pi\frac{k+1}{m}i})$ liegenden Punkt $a_k\in A$ zuordnen. Wir erweitern nun die Funktion f auf die Strecken

$$\Lambda_k=\underset{z}{E}[z=r\cdot e^{2\pi\frac{k+1}{m}i};\quad \tfrac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1]$$

und auf die Kreisbögen

$$L'_k=\underset{z}{E}\left[z=\tfrac{1}{2}\,e^{2\pi\varphi i};\ \frac{k}{m}\leqslant\varphi\leqslant\frac{k+1}{m}\right]$$

derart, daß sie entsprechend durch f auf die einfachen Bögen $L(f(e^{2\pi\frac{k+1}{m}i}), a_k)$ und $L(a_{k-1}, a_k)$ homöomorph abgebildet werden. Die so erweiterte Funktion f bildet dann die geschlossene Kurve $\Lambda_k+L'_k+\Lambda_{k+1}+L_k$ in die ε-Umgebung des Punktes a_k ab und somit läßt sich zu einer stetigen Abbildung des durch diese Kurve begrenzten, in der z-Ebene liegenden Elementes erweitern. Wenn wir diese Erweiterung für jedes $k=0, 1,\ldots, (m-1)$ durchführen, so wird die Funktion $f(z)$ für jedes $\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 1$ definiert, wobei sie die Kreislinie $\underset{z}{E}[|z|=\frac{1}{2}]$ auf die in A liegende Summe $\sum_{k=0}^{m-1}L(a_k, a_{k+1})$ abbildet. Da aber A in M zusammenziehbar ist, so läßt sich f auch zu einer stetigen Abbildung der ganzen Kreisscheibe $E[|z|\leqslant\frac{1}{2}]$ in M erweitern, womit der Beweis des Hilfssatzes beendet ist.

Beweis des Satzes 6. Im Falle, wo M nicht unikohärent ist, gibt es eine einfache geschlossene Kurve K, die ein Retrakt von M ist[15]). Nach (12) ist dann eine beliebige homöomorphe Abbildung f von S_1 auf K ein in M nicht mit Null homotoper Weg.

Es sei nun M ein unikohärentes in den Dimensionen $\leqslant 1$ lokal zusammenhängendes Kontinuum, das eine Zerlegung in zwei in M zusammenziehbare abgeschlossene Teilmengen A_1 und A_2 zuläßt. Es ist zu zeigen, daß jeder in M liegende geschlossene Weg f homotop Null in M ist. Auf Grund des Satzes 5 können wir annehmen, daß A_1 und A_2 Streckenbilder sind. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz, gibt es ferner eine Umgebung U von A_1 derart, daß jeder in U liegende geschlossene Weg homotop Null in M ist. Da im Falle, wo $f(S_1)\subset A_1$ oder $f(S_1)\subset A_2$ gilt, der Weg f offenbar homotop Null ist, so können wir

$$(13)\qquad f(S_1)-A_1\neq 0\neq f(S_1)-A_2$$

annehmen. Die Menge $T=\underset{z}{E}[f(z)\in M-A_1]$ ist dann eine offene Teilmenge von S_1 und somit zerfällt sie in höchstens abzählbarviele offene, disjunkte Kreisbögen $L_1, L_2,\ldots$ Der gleichmäßigen Stetigkeit von f halber gibt es dann ein n derart, daß für jedes $k>n$ die Menge $f(L_k)$ in U enthalten ist. Wir beachten nun die offenen Kreisbögen $L_1, L_2,\ldots, L_n$. Mit a_k und b_k bezeichnen wir die Endpunkte von L_k. Die Menge $f(L_k)$ ist dann in einer gewißen Komponente Γ von $M-A_1$ enthalten, wobei $f(a_k)$ und $f(b_k)$ in ihrer Begrenzung B liegen. Der Unikohärenz von M zufolge ist aber B ein Kontinuum. Da ferner $U\cdot A_2$ eine Umgebung von B in dem Streckenbilde A_2 ist, so gibt es einen in $U\cdot A_2$ liegenden einfachen Bogen λ_k, welcher $f(a_k)$ und $f(b_k)$ verbindet. Da ferner — nach (13) — die Menge T nicht überall dicht in S_1 ist, so haben je zwei verschiedene L_k höchstens einen Endpunkt gemein. Es folgt daraus, daß die Inneren der Strecken $\overline{a_k b_k}$ zueinander fremd sind. Wir erweitern die Funktion f auf die Summe der Strecken $\overline{a_k, b_k}$ und zwar derart, daß die erweiterte Funktion f die geschlossene Strecke $\overline{a_k, b_k}$ stetigerweise auf λ_k abbilde.

Es sei nun H_k, für $k=1, 2,\ldots, n$ das durch $L_k+\overline{a_k, b_k}$ begrenzte, in der z-Ebene liegende, zweidimensionale Element und H bezeichne die abgeschlossene Hülle von $V_2-\sum_{k=1}^{m}H_k$. Die Funktion

[15]) d. h. es gibt eine stetige Funktion ψ, welche M auf K abbildet derart, daß $\psi(x)=x$ für jedes $x\in K$ gilt. Siehe hierzu Fund. Math. 17 (1931), S. 184.

bildet dann die Begrenzung von jedem H_k in A_2 ab, und somit läßt sich zu einer stetigen Abbildung des ganzen H_k in M erweitern. Die Begrenzung von H wird ferner von f in U abgebildet und, da jeder in U liegende, geschlossene Weg homotop Null in M ist, so läßt sich f auch zu einer stetigen Abbildung des ganzen zweidimensionalen Elementes H in M erweitern. Dadurch wird aber f zu einer stetigen Abbildung der ganzen Kreisscheibe V_2 erweitert.

Der Beweis des Satzes 6, und somit auch des Satzes 6', ist hiermit beendet.

Aus dem Satz 6' folgt insbesondere, daß die bekannte Poincarésche Mannigfaltigkeit [16]) M_3 mit verschwindender eindimensionalen Bettischen Zahl und mit von Null verschiedener Fundamentalgruppe von der Kategorie > 2 ist. Diese Tatsache zeigt, daß sich die Kategorie nicht durch bloße Homologieeigenschaften ausdrücken läßt.

---

[16]) Unter einer Poincaréschen Mannigfaltigkeit versteht man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die dieselben Homologiegruppen, wie die dreidimensionale euklidische Sphäre, und eine nichtverschwindende Fundamentalgruppe hat.

Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense [1]).

Par

Casimir Kuratowski et Wacław Sierpiński (Warszawa).

D'après un théorème très important de M. Lusin [2]), l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble indénombrable E jouissant de la propriété suivante

(L) *E est un sous-ensemble de la ligne droite tel que, quel que soit l'ensemble non-dense N (dans la ligne droite), le produit NE est au plus dénombrable.*

La propriété (L) n'est pas topologique: l'ensemble E étant un ensemble frontière, on peut le transformer par homéomorphie en un sous-ensemble E^* de l'ensemble non-dense de Cantor; comme indénombrable et non-dense, E^* ne jouit pas de la propriété (L). On peut donc se demander quelles sont les propriétés topologiques qui caractérisent les ensembles homéomorphes aux ensembles à propriété (L)? Le théorème qui suit répond à cette question:

Théorème I. *Pour qu'un espace métrique séparable E soit homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété* (L), *il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante* [3])

(ν) *chaque sous-ensemble N de E non-dense (par rapport à E) est au plus dénombrable.*

---

[1]) Présenté à la Soc. Pol. Math. à Varsovie le 22. XI. 1935.

[2]) C. R. Paris t. 158 (1914), p. 1259. V. aussi Fund. Math. t. VI, p. 154—155 et t. XXII, p. 306, 312 et 315, ainsi que W. Sierpiński, *Hypothèse du continu* (Monogr. Matem., t. IV, Warszawa 1934), où le chap. II tout entier (pp. 36—75) concerne ce théorème et ses conséquences.

[3]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie* I (Monogr. Matem., t. III, Warszawa 1933), p. 273.