exemple[16]) le plan projectif complexe K_2 (étant une variété à 4 dimensions) remplit la condition $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(K_2) = 3$, bien qu'il ne se laisse pas transformer en son sous-ensemble d'une manière continue et sans points invariants[17]).

La question suivante reste ouverte:

La thèse du théorème 3 reste-t-elle vraie pour tous les continus localement contractiles[18]) *situés dans* R_3?

[16]) C'est M. H. Hopf qui m'a indiqué cet exemple.

[17]) Voir H. Hopf, Journ. f. d. r. u. a. Math. 163 (1930), p. 85.

[18]) La question analogue dans le domaine des continus péaniens arbitraires situés dans R_3 est résolue dans le sens négatif, car il existe dans R_3 un continu péanien dont les nombres de Betti sont égaux à ceux du simplexe et qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants. Voir Fund. Math. 24 (1934), p. 52. La question de l'existence dans R_3 d'un continu péanien C qui contienne un point invariant par rapport à toute transformation continue en son sous-ensemble et remplisse la condition $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(C) \geqslant 2$ reste cependant ouverte.

Wiązowszczyzna, Noël 1934.

Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann.

Par

D. Menchoff (Moscou).

§ 1. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction continue d'une variable complexe $z = x + iy$ définie dans un domaine ouvert D, où x, y, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont réels. Supposons qu'en chaque point z, intérieur au domaine D, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent et vérifient les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D[1]).

Nous pouvons énoncer ce théorème d'une autre manière. Soit d une droite infinie située dans le plan du domaine D et passant par un point z. Désignons par $\lim_{h \to 0} (d) A(z, h)$ la limite de la quantité $A(z, h)$, lorsque h tend vers zéro de telle façon que le point $z + h$ reste toujours sur la droite d. Nous pouvons énoncer le théorème précédent de la manière suivante.

Supposons qu'en chaque point z, intérieur au domaine D, les limites

$$\lim_{h \to 0} (d) \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

[1]) Montel, *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, pp. 1820—1822 (1913).

Looman, *Über eine Erweiterung des Cauchy-Goursatschen Integralsatzes*, Nieuw. Arch. Wiskde, pp. 97—108, (1923).

Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografje Matematyczne II, pp. 242—246, Warszawa, (1933).

existent et possèdent la même valeur finie pour deux droites d passant par le point z et parallèles aux axes de coordonnées [1]).

Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D.

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante:

Théorème. *Soit $f(z)$ une fonction continue définie à l'intérieur du domaine D. Supposons qu'à chaque point z, intérieur à ce domaine, sauf peut-être les points d'un ensemble e fini ou dénombrable, il correspond deux droites $d_1(z)$ et $d_2(z)$ passant par ce point z et telles que les deux limites*

$$\lim_{h\to 0}\,[d_j(z)]\,\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \qquad (j=1,2)$$

existent et possèdent la même valeur finie [2]).

Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D [3]).

§ **2.** Nous introduirons tout d'abord les notations suivantes. Soit $B(z, h)$ une fonction réelle de deux variables complexes z, h et soit d une droite infinie passant par le point z et située dans le plan du domaine D. Désignons par

$$\lim_{h\to 0}\sup\,(d)\,B(z,h)$$

la plus grande des limites de la quantité $B(z, h)$, lorsque h tend vers zéro de telle façon que le point $z+h$ reste toujours sur la droite d. Posons

$$\lim_{h\to 0}\sup\,(d)\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| = L(z, d);$$

$L(z, d)$ est un nombre non négatif, fini ou non.

[1]) On suppose toujours que la fonction $f(z)$ est continue.

[2]) Nous supposons que les droites $d_j(z)$ sont situées dans le plan du domaine D.

[3]) Ce théorème a été démontré auparavant dans le cas où la fonction $f(z)$ est *univalente*. Dans ce cas on peut même remplacer, dans l'énoncé du théorème, les droites infinies $d_j(z)$ par deux rayons rectilignes $t_j(z)$, $j=1, 2$, issus du point z et situés sur deux droites différentes. (D. Menchoff, *Sur les fonctions monogènes*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 59, fasc. 3, 4, pp. 141—182).

Lorsque d' et d'' sont deux droites quelconques situées dans le pan du domaine D, nous désignerons par $\{d' \hat{,} d''\}$ l'angle formé par ces deux droites et compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 1. *Soit $f(z)$ une fonction continue définie dans un domaine D et soit P un ensemble parfait situé dans D et contenant des points intérieurs à ce domaine. Supposons qu'à chaque point z d'un ensemble H, appartenant à l'ensemble P et partout de deuxième catégorie sur P* [1]), *il correspond deux droites $d_j(z)$, $j=1, 2$, passant par ce point z et telles que*

$$L[z, d_j(z)] < +\infty.$$

Alors il existe une portion Π de l'ensemble P, située à l'intérieur du domaine D, et un nombre positif $\sigma < \frac{\pi}{1600}$, tels qu'il correspond, à chaque point z de l'ensemble Π, deux droites $d_1'(z)$ et $d_2'(z)$ passant par ce point et possédant les propriétés suivantes:

1⁰. $$\{d_j'(z') \hat{,} d_j'(z'')\} < \sigma \qquad (j=1,2)$$

quels que soient les points z' et z'' de l'ensemble Π,

2⁰. $$\{d_1'(z) \hat{,} d_2(z)\} > 800\,\sigma$$

pour tous les points z de l'ensemble Π,

3⁰. *La distance de l'ensemble Π à la frontière du domaine D est supérieure à σ,*

4⁰. $$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right| < \frac{1}{\sigma}$$

pour tous les points z de Π et pour tous les points ζ situés sur les droites correspondantes $d_j'(z)$, $j=1, 2$, et vérifiant l'inégalité $0<|\zeta-z|\leqslant\sigma$.

La démonstration de ce lemme est précisément la même que celle du lemme démontré dans mon ouvrage „*Sur les fonctions monogènes*“ [2]). Nous omettons cette démonstration.

[1]) Nous dirons que l'ensemble H, appartenant à un ensemble parfait P, est *partout de deuxième catégorie sur* P, lorsque l'ensemble $P-H$ est de première catégorie sur P.

[2]) L. c. § 4 p. 151.

Soit Π un ensemble parfait quelconque situé à l'intérieur du domaine D, dont la distance à la frontière de ce domaine est supérieure à σ, où σ a la même signification que plus haut. Désignons par $S(\Pi, \sigma)$ un système de droites $\delta_1(z)$ et $\delta_2(z)$ qui possèdent les propriétés suivantes:

1°. A chaque point z de l'ensemble Π il correspond au moins une droite $\delta_1(z)$ et une droite $\delta_2(z)$ passant par ce point [1]).

2°. Chaque position limite des droites $\delta_1(z)$ (pour z variable ou fixe) est aussi une droite $\delta_1(z)$ et, de-même, chaque position limite des droites $\delta_2(z)$ est aussi une droite $\delta_2(z)$.

3°. $$\{\delta_j(z'), \delta_j(z'')\} \leqslant \sigma \qquad (j = 1, 2)$$

où z' et z'' sont deux points quelconques de l'ensemble Π, différents ou non.

4°. $$\{\delta_1(z'), \delta_2(z'')\} \geqslant 800\,\sigma$$

pour deux droites quelconques $\delta_1(z')$ et $\delta_2(z'')$ du système $S(\Pi, \sigma)$.

5°. $$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{1}{\sigma}$$

pour tous les points z de l'ensemble Π et pour tous les points ζ vérifiant l'inégalité $0 < |\zeta - z| \leqslant \sigma$ et situés sur une droite quelconque $\delta_1(z)$ ou $\delta_2(z)$, correspondant à z.

Considérons les droites $d_1'(z)$ et $d_2'(z)$ qui figurent dans l'énoncé du lemme 1. Le système formé de toutes les droites $d_1'(z)$, $d_2'(z)$ et de toutes leurs positions limites est évidemment un système $S(\Pi, \sigma)$.

Nous avons donc le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $f(z)$ une fonction continue, définie dans un domaine D, et soit P un ensemble parfait, situé dans D et contenant des points intérieurs à ce domaine. Supposons qu'il existe un ensemble H appartenant à P, partout de deuxième catégorie sur P et qui possède la propriété:*

A chaque point z de H il correspond deux droites $d_1(z)$ et $d_2(z)$ passant par ce point z et vérifiant la condition

$$L[z, d_j(z)] < +\infty \qquad (j = 1, 2).$$

[1]) En général, il correspond à chaque point z de Π plusieurs droites $\delta_1(z)$ et $\delta_2(z)$ passant par ce point.

Dans ces conditions il existe un nombre positif $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ et une portion Π de l'ensemble P, située à l'intérieur du domaine D à la distance supérieure à σ de la frontière de ce domaine, auxquels il correspond un système $S(\Pi, \sigma)$ de droites $\delta_1(z)$ et $\delta_2(z)$.

Le principe de la démonstration du théorème énoncé à la fin du § 1 est le suivant. Désignons par E l'ensemble des points, intérieurs au domaine D, dans lesquels la fonctions $f(z)$ n'est pas monogène et soit P l'ensemble dérivé de E. Il est évident que P est un ensemble parfait ou vide. D'ailleurs, dans le premier cas, l'ensemble P contient nécessairement des points intérieurs au domaine D.

Supposons que le théorème en question n'est pas vrai. Dans ce cas l'ensemble P contient des points intérieurs au domaine D et nous pouvons nous servir du lemme 2 de ce paragraphe en y posant $H = P - e$, où e est un ensemble fini ou dénombrable qui figure dans l'énoncé du théorème. Par suite, il existe une portion Π de l'ensemble P qui possède toutes les propriétés énoncés dans le lemme 2. Supposons que la portion Π est définie par le domaine D' [1]), situé à l'intérieur de D, et soit R un carré quelconque, situé à l'intérieur du domaine D', dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Nous arriverons à une contradiction si nous démontrons que

$$\int_{C(R)} f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

quelle que soit la position du carré R à l'intérieur du domaine D', où $C(R)$ est le contour du carré R [2]).

En choisissant convenablement les axes de coordonnées, nous pouvons supposer que pour tous les points z de l'ensemble Π les angles $\{\delta_j(z), \widehat{\ }0x\}$ et $\{\delta_j(z), \widehat{\ }0y\}$, $j = 1, 2$, soient supérieurs à $300\,\sigma$, où $\delta_1(z)$ et $\delta_2(z)$ sont les droites qui figurent dans l'énoncé du lemme 2 et $0x$, $0y$ sont des axes de coordonnées. On voit, en résumant, que pour la démonstration du théorème en question il suffit de démontrer la proposition suivante:

[1]) On dit qu'une portion Π d'un ensemble parfait P est définie par le domaine D', lorsque Π se compose de tous les points de P, intérieurs à D', et de leurs points limites sur la frontière de D'.

[2]) Lorsque ω est un domaine dont la frontière est une courbe rectifiable simple, nous désignerons cette courbe par $C(\omega)$.

Soit $f(z)$ une fonction continue, définie dans un domaine D et monogène en chaque point d'un domaine D' intérieur à D, sauf peut-être aux points d'un ensemble parfait Π situé dans D'. Supposons qu'il correspond à chaque point z de Π, sauf peut-être aux points apartenant à un ensemble fini ou dénombrable, deux droites infinies $d_1(z)$ et $d_2(z)$ passant par ce point et telles que les deux limites

$$\lim_{h\to 0}[d_j(z)]\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \qquad (j=1,2)$$

existent et possèdent la même valeur finie. Supposons, de plus, qu'il existe un nombre positif $\sigma<\frac{\pi}{1600}$ et un système $S(\Pi,\sigma)$ de droites $\delta_j(z)$, $j=1,2$, tel que les angles $\{\delta_j(z),\hat{}\,0x\}$, $\{\delta_j(z),\hat{}\,0y\}$ sont supérieurs à $300\,\sigma$ pour tous les points z de l'ensemble Π.

Dans ces conditions on a

$$\int\limits_{C(R)} f(z)\,dz=0,$$

quel que soit le carré R, situé à l'intérieur du domaine D', dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

On peut d'ailleurs supposer que le diamètre du domaine D' soit inférieur à σ^2, de sorte que la distance entre deux points quelconques de l'ensemble Π soit inférieure à σ^2.

§ 3. Nous supposerons dans la suite que l'ensemble Π et la fonction $f(z)$ vérifient toutes les conditions qui figurent dans la proposition énoncée à la fin du paragraphe précédent. Nous démontrerons tout d'abord les quatre lemmes suivants:

Lemme 1. *Soient z' et z'' deux points quelconques de l'ensemble Π et soient $\delta_j(z')$ et $\delta_j(z'')$, $j=1,2$, les droites quelconques du système $S(\Pi,\sigma)$ qui correspondent aux points z' et z''. Désignons respectivement par z_1 et z_2 les points d'intersection des droites $\delta_1(z')$, $\delta_2(z'')$ et des droites $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z')$ et supposons que z_1 et z_2 soient différents de z' et z''.*

Alors le diamètre du quadrilatère $z'z_1z''z_2$ est inférieur à $\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|$ et pour tous les points ζ' et ζ'' de ce quadrilatère on a l'inégalité

$$|f(\zeta')-f(\zeta'')|<K(\sigma)\cdot|z'-z''|,$$

où $K(\sigma)$ est un nombre positif qui ne dépend que de σ.

Démonstration. On voit immédiatement que

$$|z'-z_1|=|z'-z''|\cdot\frac{\sin\{\delta_2(z''),\hat{}\,\overline{z'z''}\}}{\sin\{\delta_1(z'),\hat{}\,\delta_2(z'')\}},$$

où l'on désigne par $\overline{z'z''}$ le segment rectiligne dont les extrémités sont z' et z'' [1]). En vertu de la condition 4, qui figure dans la

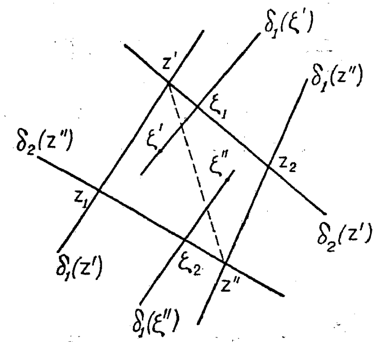

Fig. 1.

définition du système $S(\Pi,\sigma)$, on a l'inégalité

$$\{\delta_1(z'),\hat{}\,\delta_2(z'')\}\geqslant 800\,\sigma$$

et, par suite,

$$|z'-z_1|<|z'-z''|\cdot\frac{1}{400\,\sigma}.$$

On obtient de la même manière

$$|z'-z_2|<|z'-z''|\cdot\frac{1}{400\,\sigma},\qquad |z''-z_1|<|z'-z''|\cdot\frac{1}{400\,\sigma},$$

$$|z''-z_2|<|z'-z''|\cdot\frac{1}{400\,\sigma},$$

d'où il résulte que le diamètre du quadrilatère $z'z_1z''z_2$ est inférieur à $\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|$.

Désignons par Γ le contour du quadrilatère $z'z_1z''z_2$ et supposons tout d'abord que ζ' et ζ'' sont deux points quelconques

[1]) Dans la notation $\{d',d''\}$ nous prendrons quelquefois au lieu des droites infinies d' et d'' les segments rectilignes situés sur ces droites.

situés sur Γ. Supposons, pour fixer les idées, que les points ζ' et ζ'' se trouvent respectivement sur les segments $\overline{z'z_2}$ et $\overline{z''z_1}$. Puisque le diamètre du quadrilatère $z'z_1z''z_2$ est inférieur à $\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|$, on a les inégalités

$$(2)\qquad \begin{cases} |\zeta'-z'|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|, & |z'-z_2|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|,\\ |z_2-z''|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|, & |z''-\zeta''|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|.\end{cases}$$

Nous savons que la distance entre deux points quelconques de l'ensemble Π est inférieure à σ^2 et que les points z' et z'' appartiennent à l'ensemble Π. On obtient donc

$$(3)\qquad |z'-z''|<\sigma^2$$

et, par suite, en vertu de (2),

$$(4)\qquad \begin{cases} |\zeta'-z'|<\sigma, & |z'-z_2|<\sigma,\\ |z_2-z''|<\sigma, & |z''-\zeta''|<\sigma.\end{cases}$$

On voit de (4) et de la condition 5, figurant dans la définition du système $S(\Pi,\sigma)$, que

$$(5)\qquad \begin{cases} |f(\zeta')-f(z')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|\zeta'-z'|, & |f(z')-f(z_2)|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z_2|,\\ |f(z_2)-f(z'')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z_2-z''|, & |f(z'')-f(\zeta'')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z''-\zeta''|.\end{cases}$$

Donc, en vertu de (2),

$$(6)\qquad |f(\zeta')-f(\zeta'')|<\frac{4}{\sigma^2}\cdot|z'-z''|,$$

quels que soient les points ζ' et ζ'' situés sur le contour Γ.

Désignons par Π' la partie de l'ensemble Π située dans le quadrilatère $z'z_1z''z_2$ et supposons à présent que ζ' et ζ'' sont deux points quelconques de l'ensemble Π'. Soient $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ deux droites du système $S(\Pi,\sigma)$ passant respectivement par les points ζ' et ζ''. Désignons par ζ_1 un des points d'intersection de la droite $\delta_1(\zeta')$ avec le contour Γ. De même, désignons par ζ_2 un des points d'intersection de la droite $\delta_1(\zeta'')$ avec Γ (voir fig. 1).

On a évidemment

$$(7)\qquad |\zeta_1-\zeta'|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|, \qquad |\zeta_2-\zeta''|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|$$

et, par suite, en vertu de de (3),

$$|\zeta_1-\zeta'|<\sigma, \qquad |\zeta_2-\zeta''|<\sigma.$$

Puisque $\zeta'\subset\Pi$ et $\zeta''\subset\Pi$, on voit de la condition 5, figurant dans la définition du système $S(\Pi,\sigma)$, que

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|\zeta_1-\zeta'|, \qquad |f(\zeta_2)-f(\zeta'')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|\zeta_2-\zeta''|,$$

d'où il résulte, en vertu de (7),

$$(8)\qquad |f(\zeta_1)-f(\zeta')|<\frac{1}{\sigma^2}\cdot|z'-z''|, \qquad |f(\zeta_2)-f(\zeta'')|<\frac{1}{\sigma^2}\cdot|z'-z''|.$$

Les points ζ_1 et ζ_2 se trouvent sur le contour Γ; donc, en vertu de (6), on a l'inégalité

$$(9)\qquad |f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|<\frac{4}{\sigma^2}\cdot|z'-z''|.$$

En comparant les inégalités (8) et (9), on obtient finalement

$$(10)\qquad |f(\zeta')-f(\zeta'')|<\frac{6}{\sigma^2}\cdot|z'-z''|$$

pour tous les points ζ' et ζ'' de l'ensemble Π'.

On voit de (6) que l'inégalité (10) est aussi vraie pour tous les points ζ' et ζ'' qui se trouvent sur le contour Γ. De plus, on peut démontrer de la même manière que l'inégalité (10) est vérifiée, lorsque ζ' est un point arbitraire du contour Γ et ζ'' est un point quelconque de l'ensemble Π'. Donc, on voit, en résumant, que l'inégalité (10) est vérifiée pour tous les points ζ' et ζ'' dont chacun est situé soit dans l'ensemble Π', soit sur le contour Γ.

Supposons, à présent que ζ' est un point arbitraire de l'ensemble Π' ou du contour Γ et soit ζ'' un point quelconque du quadrilatère $z'z_1z''z_2$. Pour tous les points ζ'' situés dans l'ensemble Π' ou sur le contour Γ on a l'inégalité (10). De plus, pour un point fixe ζ' la différence $f(\zeta')-f(\zeta'')$ est une fonction monogène de la variable ζ'' partout dans le quadrilatère $z'z_1z''z_2$, sauf peut-

-être aux points de l'ensemble Π'. Il en résulte que le maximum de la fonction $|f(\zeta')-f(\zeta'')|$ est atteint aux points ζ'' situés dans l'ensemble Π' ou sur le contour Γ et, par suite, l'inégalité (10) subsiste pour tous les points ζ'' du quadrilatère $z' z_1 z'' z_2$ et pour tous les points ζ' situés dans l'ensemble Π' ou sur le contour Γ.

En supposant que ζ' et ζ'' sont des points arbitraires du quadrilatère $z' z_1 z'' z_2$ et en considérant la différence $f(\zeta')-f(\zeta'')$ comme une fonction d'une seule variable ζ', on démontre de la même manière que l'inégalité (10) est vérifiée pour tous les points ζ' et ζ'' du quadrilatère $z' z_1 z'' z_2$. En posant $K(\sigma)=\frac{6}{\sigma^2}$, on voit donc que l'inégalité (1) subsiste pour les mêmes points ζ' et ζ'', ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. *Pour tous les points z' et z'' de l'ensemble Π on a*

$$|f(z')-f(z'')|<K(\sigma)\cdot|z'-z''|, \tag{11}$$

où $K(\sigma)$ est le nombre défini dans le lemme 1.

Démonstration. Supposons tout d'abord que le point z' se trouve sur une des droites $\delta_j(z)$, $j=1,2$, qui correspondent au point z'', ou bien que le point z'' se trouve sur une des droites $\delta_j(z')$ qui correspondent au point z'. Supposons, pour fixer les idées, que le point z' se trouve sur une des droites $\delta_1(z'')$ [1]). Puisque la distance entre deux points quelconques de l'ensemble Π est inférieureà σ^2, on a

$$|z'-z''|<\sigma^2<\sigma$$

et, par suite, en tenant compte de la condition 5 qui figure dans la définition du système $S(\Pi,\sigma)$, on obtient l'inégalité

$$|f(z')-f(z'')|<\frac{1}{\sigma}\cdot|z'-z''|,$$

d'où il résulte l'inégalité (11).

Supposons, à présent, que le point z' ne se trouve sur aucune des droites $\delta_j(z'')$, $j=1,2$, et que le point z'' ne se trouve sur aucune des droites $\delta_j(z')$, $j=1,2$. En choisissant d'une fason quelconque les quatre droites $\delta_1(z')$, $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z')$, $\delta_2(z'')$ et en désignant

[1]) Nous savons qu'il existe en général plusieurs droites $\delta_1(z'')$ qui correspondent au point z''.

respectivement par z_1 et z_2 les points d'intersection des droites $\delta_1(z')$, $\delta_2(z'')$ et des droites $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z')$, on voit que les points z_1 et z_2 sont différents des points z', z'' et, par suite, que l'on se trouve dans les conditions du lemme 1. On obtient donc l'inégalité (11), en posant, dans l'inégalité (1), $\zeta'=z'$, $\zeta''=z''$. Le lemme 2 est ainsi démontré.

Lemme 3. *Soit C un cercle de centre z_0 et de rayon r, situé dans le plan du domaine D. Supposons que $z_0\subset\Pi$ et que*

$$\frac{\operatorname{mes}\Pi(z_0,r)}{\pi r^2}>1-\sigma^4, \tag{12}$$

où $\Pi(z_0,r)$ est la partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle C.

Dans ces conditions

$$|f(z)-f(z_0)|<K_1(\sigma)\cdot r \tag{13}$$

pour tous les points z vérifiant l'inégalité $|z-z_0|<\frac{1}{2}r$, où $K_1(\sigma)$ ne dépend que de σ (à savoir $K_1(\sigma)=2\cdot K(\sigma)$).

Démonstration. Supposons que z est un point quelconque vérifiant l'inégalité

$$|z-z_0|<\frac{1}{2}r \tag{14}$$

et soient ζ' et ζ'' deux points qui possèdent les propriétés suivantes:

1°. Le segment $\overline{\zeta'\zeta''}$ est parallèle à l'axe des y,

2°. Le point z se trouve sur le segment $\overline{\zeta'\zeta''}$ et

$$|z-\zeta'|=|z-\zeta''|=\frac{1}{2}\cdot|z-z_0|\cdot\sigma. \tag{15}$$

Prenons deux cercles C' et C'' de rayon égal à $\sigma^2\cdot|z-z_0|$ et de centres ζ' et ζ''. Il est clair que les cerles C' et C'' se trouvent à l'intérieur du cercle C et que l'aire de $C'=$ l'aire de $C<\pi\sigma^4 r^2$. Donc, il résulte de l'inégalité (12) que dans chacun des cercles C' et C'' il se trouve des points de l'ensemble Π. Désignons par z' et z'' deux points quelconques de l'ensemble Π situés respectivement dans les cercles C' et C''.

Soient $\delta_1(z')$, $\delta_2(z')$ et $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z'')$ les droites passant respectivement par les points z' et z'' et appartenant au système $S(\Pi,\sigma)$.

Nous supposons toujours que les droites de ce système vérifient toutes les conditions de la proposition énoncée à la fin du § 2. Comme les points z' et z'' appartiennent à l'ensemble Π, on a donc

$$(16) \qquad \{\delta_j(z'),\hat{\ } 0y\} \geqslant 300\,\sigma, \quad \{\delta_j(z''),\hat{\ } 0y\} > 300\,\sigma, \qquad (j=1,2).$$

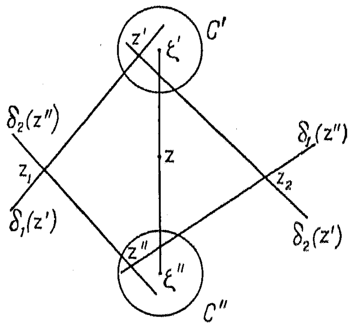

Fig. 2.

Désignons par z_1 et z_2 les points d'intersection des droites $\delta_1(z')$, $\delta_2(z'')$ et des droites $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z')$. Les points z' et z'' étant respectivement dans les cercles C' et C'', on a les inégalités

$$(17) \quad |z'-\zeta'| \leqslant \sigma^2 \cdot |z-z_0| < \sigma^2 \cdot r, \quad |z''-\zeta''| \leqslant \sigma^2 \cdot |z-z_0| < \sigma^2 \cdot r.$$

Comme le segment $\overline{\zeta'\zeta''}$ est parallèle à l'axe des y, on voit, en comparant (15), (16) et (17), que le point z_1 est extérieur aux droites $\delta_1(z'')$, $\delta_2(z')$ et, de même, le point z_2 est extérieur aux droites $\delta_1(z')$, $\delta_2(z'')$; de plus, le point z est à l'intérieur du quadrilatère $z' z_1 z'' z_2$. En vertu du lemme 1 de ce paragraphe, nous avons donc

$$(18) \qquad |f(z)-f(z')| < K(\sigma) \cdot |z'-z''|,$$

où $K(\sigma)$ ne dépend que de σ.

En comparant les inégalités (14), (15) et (17), on obtient

$$|z'-z''| \leqslant |z'-\zeta'| + |\zeta'-\zeta''| + |\zeta''-z''| < 2\sigma^2 r + \frac{r}{2} < r$$

et, par suite, en vertu de (18),

$$(19) \qquad |f(z)-f(z')| < K(\sigma) \cdot r.$$

Les points z' et z_0 appartenant à l'ensemble Π, on a, en vertu du lemme 2 de ce paragraphe,

$$|f(z')-f(z_0)| < K(\sigma) \cdot |z'-z_0|.$$

De plus, il résulte de (14), (15), (17) et de l'inégalité $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ que

$$|z'-z_0| < \frac{1}{2} r + \frac{1}{4} r\sigma + \sigma^2 r < r$$

et, par suite, que

$$(20) \qquad |f(z')-f(z_0)| < K(\sigma) \cdot r.$$

En comparant les inégalités (19) et (20), on obtient l'inégalité (13), où $K_1(\sigma) = 2 \cdot K(\sigma)$.

Lemme 4. *Si la mesure de l'ensemble Π est différente de zéro, la fonction $f(z)$ possède presque partout dans Π une dérivée $f'(z)$ satisfaisant à l'inégalité*

$$(21) \qquad |f'(z)| \leqslant 3 \cdot K_1(\sigma),$$

où $K_1(\sigma)$ est le nombre défini dans le lemme 3.

Démonstration. Démontrons tout d'abord que pour chaque point z de l'ensemble Π qui en est un point d'épaisseur superficielle [1]) on a l'inégalité

$$(22) \qquad \limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| \leqslant 3 \cdot K_1(\sigma).$$

Soit z un point quelconque d'épaisseur superficielle de l'ensemble Π et qui appartient à cet ensemble. On peut trouver un nombre r_0, qui dépend en général de z, tel que l'on ait pour $r < r_0$

$$(23) \qquad \frac{\text{mes}\, \Pi(z,r)}{\pi r^2} > 1 - \sigma^4,$$

où $\Pi(z,r)$ est une partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle C de centre z et de rayon r.

[1]) On dit qu'un point z est un point *d'épaisseur superficielle* d'un ensemble mesurable Q, lorsque $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\text{mes}\, Q(r)}{\pi r^2} = 1$ où $Q(r)$ est la partie de l'ensemble Q contenue dans le cercle $C(r)$ de centre z et de rayon r.

Soit $z+h$ un point quelconque situé dans le plan du domaine D et tel que

$$(24) \qquad |h| < \frac{1}{3} r_0.$$

En posant $3 \cdot |h| = r$, nous aurons

$$(25) \qquad |h| < \frac{r}{2}, \quad r < r_0.$$

On obtient donc, pour cette valeur de r, l'inégalité (23) et par suite, en vertu du lemme 3 de ce paragraphe et de la première inégalité (25),

$$|f(z+h) - f(z)| < K_1(\sigma) \cdot r = 3 K_1(\sigma) \cdot |h|$$

pour toutes les valeurs de h vérifiant l'inégalité (24). Il en résulte que l'inégalité (22) se présente pour tous les points z de Π qui sont des points d'épaisseur superficielle de cet ensemble, c'est-à-dire que l'on a l'inégalité (22) presque partout dans l'ensemble Π. On voit donc, d'après un théorème de M. Stepanoff, que la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz presque partout dans Π [1].

Nous avons supposé que la fonction $f(z)$ vérifie toutes les conditions de la proposition énoncée à la fin du § 2. Donc, il correspond à chaque point z de Π, sauf peut-être les points appartenant à un ensemble fini ou dénombrable, deux droites $d_1(z)$ et $d_2(z)$ passant par ce point et telles que les deux limites

$$\lim_{h \to 0} [d_j(z)] \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad (j = 1, 2)$$

existent et possèdent la même valeur finie. Il résulte d'un lemme que la fonction $f(z)$ possède par suite une dérivée finie $f'(z)$ presque partout dans Π [1]. De plus, on voit de l'inégalité (22) que l'on a (21) presque partout dans Π.

[1]) Stepanoff, *Über totale Differenzierbarkeit*, Math. Ann. 90 (1923), p. 318. On dit qu'une fonction $f(z)$ possède *une differentielle totale de Stoltz* en un point z, lorsque les dérivées partielles $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ existent et vérifient la condition

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z) - \frac{\partial f(z)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial f(z)}{\partial y} \Delta y}{\Delta z} = 0, \text{ où } \Delta z = \Delta x + i \Delta y.$$

§ 4. Démontrons maintenant la proposition énoncée à la fin du § 2. Considérons le domaine D' et l'ensemble parfait Π mentionnés dans l'énoncé de cette proposition. Soit R un carré quelconque, situé à l'intérieur du domaine D', dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Désignons par a la longueur de chaque côté du carré R et soit n un nombre entier positif quelconque. Nous prendrons, dans la suite, ce nombre assez grand pour que la quantité $\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{20\,a}{n}$ soit inférieure à la distance du carré R de la frontière du domaine D' et que l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{40\,a}{n} < \sigma$$

soit vérifiée. Divisons chaque côté de R en n parties égales et menons par les points de subdivision les droites parallèles aux axes de coordonnées. Le carré R sera alors partagé en n^2 carrés R_{nj}, $1 \leqslant j \leqslant n^2$, de côtés $\frac{a}{n}$ [2]).

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit, mais fixe, que nous supposerons toujours inférieur à $\frac{1}{4}$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Désignons par z_{nj} le point d'intersection des diagonales du carré R_{nj} et soit γ_{nj} le

[1]) D. Menchoff, *Sur les fonctions monogènes*, l. c., lemme 1 du § 7. L'énoncé du lemme est le suivant: *Soit $f(z)$ une fonction continue* (non nécessairement univalente) *définie dans un domaine D. Supposons que $f(z)$ possède la propriété K''' en un point z_0, intérieur à D, et en même temps admette en ce point une différentielle totale de Stoltz. Dans ces conditions la fonction $f(z)$ possède au point z_0 une dérivée finie $f'(z_0)$.*

Nous disons que la fonction $f(z)$ *possède la propriété K'''* au point z_0, s'il existe deux rayons rectilignes t_1 et t_2 issus du point z_0, situés sur deux droites différentes et tels que les deux limites

$$\lim_{h \to 0} (t_j) \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad (j = 1, 2)$$

existent et possèdent la même valeur finie.

[2]) Nous numérotons les carrés R_{nj} dans un ordre quelconque.

cercle de centre z_{nj} et de rayon $r_n = \frac{8a}{n}$. Nous allons considérer les trois types différents des carrés R_{nj}.

Désignons par R'_n ceux des carrés R_{nj} pour lesquels on a l'inégalité

$$\frac{\text{mes}\, \Pi_{nj}}{\pi r_n^2} > 1 - \varepsilon^2 \sigma^4, \tag{2}$$

où Π_{nj} est la partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle γ_{nj}. Désignons ensuite par R''_n ceux des carrés R_{nj} qui ne contiennent pas à leur intérieur de points de l'ensemble Π. Soient enfin R'''_n les carrés R_{nj}, qui diffèrent des carrés R'_n et R''_n, c'est-à-dire qui contiennent à leur intérieur des points de l'ensemble Π et pour lesquels se présente l'inégalité

$$\frac{\text{mes}\, \Pi_{nj}}{\pi r_n^2} \leqslant 1 - \varepsilon^2 \sigma^4. \tag{3}$$

Désignons par E_n l'ensemble des points qui se trouvent à l'intérieur ou sur les côtés des carrés R'''_n. Nous allons démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}\, E_n = 0. \tag{4}$$

En effet, dans le cas contraire il existerait un nombre positif fixe λ tel que l'inégalité $\text{mes}\, E_n > \lambda$ subsisterait pour une infinité d'indices n. En posant $E = \limsup_{n\to\infty} E_n$, nous aurions donc $\text{mes}\, E \geqslant \lambda$ et par suite

$$\text{mes}\, E > 0. \tag{5}$$

Soit z un point quelconque de l'ensemble E. Il existe une suite d'indices n_k, $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, tels que le point z appartient à tous les ensembles E_{n_k}. Désignons par R^*_k celui des carrés R'''_{n_k} qui contient à son intérieur ou sur son contour le point z et soit Π^*_k la partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle $\gamma_{n_k j}$ qui correspond au carré $R_{n_k j} = R^*_k$. On a, en vertu de l'inégalité (3)

$$\frac{\text{mes}\, \Pi^*_k}{\pi r_{n_k}^2} \leqslant 1 - \varepsilon^2 \sigma^4.$$

Puisque $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = 0$ et que les nombres ε et σ sont fixes, on voit

que le point z considéré n'est pas un point d'épaisseur superficielle de l'ensemble Π.

Pour chaque valeur de k le carré R^*_k est un des carrés R'''_{n_k} et, par suite, contient à son intérieur des points de l'ensemble Π. L'ensemble Π étant parfait et la diagonale du carré R^*_k tendant vers zéro avec $\frac{1}{k}$, on voit que le point z appartient à l'ensemble Π.

Nous avons supposé que z est un point quelconque de l'ensemble E. Donc chaque point de l'ensemble E appartient à l'ensemble Π et, en même temps, n'est pas un point d'épaisseur superficielle de Π, ce qui est impossible, puisque $\text{mes}\, E > 0$. De cette contradiction nous obtenons l'égalité (4).

§ 5. Considérons les intégrales

$$\int_{C(R'_n)} f(z)\, dz, \quad \int_{C(R''_n)} f(z)\, dz \quad \text{et} \quad \int_{C(R'''_n)} f(z)\, dz$$

prises dans le sens positif suivant les contours des carrés R'_n, R''_n et R'''_n. Nous avons supposé que la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point du domaine D', sauf peut-être aux points de l'ensemble Π. Puisque les carrés R''_n ne contiennent pas à leur intérieur de points de l'ensemble Π, on a donc

$$\int_{C(R''_n)} f(z)\, dz = 0 \tag{1}$$

pour chaque carré R''_n.

Considérons à présent les intégrales

$$\int_{C(R'_n)} f(z)\, dz. \tag{2}$$

Prenons un carré R'_n et désignons par Π^* la partie de l'ensemble Π comprise dans ce carré. Soit z_0 un point quelconque de l'ensemble Π^* et soit $C(z_0, r)$ un cercle de centre z_0 et de rayon r, où

$$\frac{4a}{n} \geqslant r \geqslant \varepsilon \frac{8a}{n}. \tag{3}$$

Désignons par γ le cercle γ_{nj} qui correspond au carré $R_{nj} = R'_n$, c'est-à-dire γ est le cercle de rayon $r_n = \frac{8a}{n}$ dont le centre se trouve au point d'intersection des diagonales du carré R'_n. Il résulte de l'inégalité (3) que

$$r_n \geqslant 2r, \quad r \geqslant \varepsilon r_n \tag{4}$$

et, par suite, que le cercle $C(z_0, r)$ est à l'intérieur du cercle γ.

Désignons par $\Pi(z_0, r)$ et Π' les parties de l'ensemble Π comprises respectivement dans les cercles $C(z_0, r)$ et γ. Nous aurons en vertu de l'inégalité (2) du § 4

$$\frac{\text{mes}\, \Pi'}{\pi r_n^2} > 1 - \varepsilon^2 \sigma^4 \tag{5}$$

et, par suite, aire de $C(z_0 r)$ — mes $\Pi(z_0, r) < \varepsilon^2 \sigma^4 \pi r_n^2$, d'où il résulte que

$$\text{mes}\, \Pi(z_0, r) > \pi r^2 - \varepsilon^2 \sigma^4 \pi r_n^2. \tag{6}$$

En comparant les inégalités (4) et (6) de ce paragraphe, on obtient finalement

$$\frac{\text{mes}\, \Pi(z_0, r)}{\pi r^2} > 1 - \sigma^4. \tag{7}$$

Nous avons désigné par $\Pi(z_0, r)$ la partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle $C(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r, vérifiant les inégalités (3). Puisque le point z_0 appartient à l'ensemble Π, il résulte du lemme 3 du § 3 que

$$|f(z) - f(z_0)| < K_1(\sigma) \cdot r \tag{8}$$

pour tous les points z vérifiant l'inégalité

$$|z - z_0| < \frac{1}{2} r, \tag{9}$$

où $K_1(\sigma)$ ne dépend que de σ. Dans l'inégalité (8) le point z_0 peut être un point quelconque de l'ensemble Π^* et r est un nombre arbitraire vérifiant les inégalités (3).

Soient z' et z'' deux points quelconques situés à l'intérieur ou sur le contour du carré R'_n. Prenons un point quelconque de l'ensemble Π^* et posons, dans l'inégalité (8), $r = \frac{4a}{n}$. Nous aurons

$$|f(z) - f(z_0)| < K_1(\sigma) \cdot \frac{4a}{n}$$

pour tous les points z vérifiant l'inégalité $|z - z_0| < \frac{2a}{n}$.

Puisque $|z' - z_0| < \frac{2a}{n}$ et $|z'' - z_0| < \frac{2a}{n}$, on obtient donc

$$|f(z') - f(z'')| < K_1(\sigma) \cdot \frac{8a}{n} \tag{10}$$

pour tous les points z' et z'' du carré R'_n.

Soient (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2) et (a_1, b_2), $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, les coordonnées des sommets du carré R'_n. Nous aurons

$$a_2 - a_1 = b_2 - b_1 = \frac{a}{n}. \tag{11}$$

Nous avons démontré dans le lemme 4 du § 3 que la fonction $f(z)$ possède presque partout dans Π une dérivée $f'(z)$ qui vérifie l'inégalité

$$|f'(z)| < 3 \cdot K_1(\sigma), \tag{12}$$

où $K_1(\sigma)$ a la même signification que plus haut. Donc les quatre dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existent presque partout dans l'ensemble Π^* et vérifient les inégalités

$$\left\{\begin{array}{ll} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 3 \cdot K_1(\sigma), & \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < 3 \cdot K_1(\sigma), \\ \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| < 3 \cdot K_1(\sigma), & \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < 3 \cdot K_1(\sigma). \end{array}\right. \tag{13}$$

De plus, on a les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14}$$

presque partout dans Π^*.

Ecrivons la relation évidente

$$\int_{C(R'_n)} f(z)\, dz = \int_{C(R'_n)} (u\, dx - v\, dy) + i \int_{C(R'_n)} (v\, dx + u\, dy) \tag{15}$$

et faisons une transformation de chacune des intégrales curvilignes

$$\int\limits_{C(R'_n)} u\,dx,\quad \int\limits_{C(R'_n)} v\,dy,\quad \int\limits_{C(R'_n)} v\,dx,\quad \int\limits_{C(R'_n)} u\,dy$$

en une intégrale double. Considérons l'intégrale $\int\limits_{C(R'_n)} u\,dy$. Soit Π_y l'ensemble des points appartenant à Π^* et ayant une ordonnée fixe y. Π_y est évidemment un ensemble fermé ou vide. En supposant que l'ensemble Π_y n'est pas vide, désignons par

$$z'_s = x'_s + iy \quad \text{et} \quad z''_s = x''_s + iy \quad \text{où} \quad x'_s < x''_s, \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

les extrémités des intervalles contigus à l'ensemble Π_y et soient $c' = a' + iy$ et $c'' = a'' + iy$ les extrémités de l'ensemble Π_y. Posons, de plus, $a_1 + iy = c_1$, $a_2 + iy = c_2$. Puisque les points z'_s et z''_s appartiennent à l'ensemble Π, nous avons, en vertu du lemme 2 du § 3, $|f(z''_s) - f(z'_s)| < K(\sigma)\cdot|z''_s - z'_s|$ et, par suite,

$$(16)\qquad |u(x''_s, y) - u(x'_s, y)| < K_1(\sigma)\cdot(x''_s - x'_s)$$

pour tous les intervalles contigus à l'ensemble Π_y, où $K_1(\sigma) = 2\cdot K(\sigma)$ a la même signification que plus haut (la relation entre les constantes $K(\sigma)$ et $K_1(\sigma)$ a été introduite dans la démonstration du lemme 3 du § 3). En posant

$$(17)\qquad r' = 2(a' - a_1) + \frac{8a}{n}\varepsilon, \quad r'' = 2(a_2 - a'') + \frac{8a}{n}\varepsilon,$$

on a évidemment

$$\frac{4a}{n} \geqslant r' \geqslant \frac{8a}{n}\varepsilon, \quad \frac{4a}{n} \geqslant r'' \geqslant \frac{8a}{n}\varepsilon,$$

c'est-à-dire r' et r'' vérifient les inégalités (3) de ce paragraphe.

Par suite, en prenant, dans l'inégalité (8), $z_0 = c'$ et $z_0 = c''$ et en tenant compte des inégalités évidentes

$$|c' - c_1| = a' - a_1 < \frac{r'}{2}, \quad |c_2 - c''| = a_2 - a'' < \frac{r''}{2},$$

nous aurons

$$|f(c_1) - f(c')| < K_1(\sigma)\cdot r', \qquad |f(c_2) - f(c'')| < K_1(\sigma)\cdot r'',$$

d'où il résulte, en vertu de (17), que

$$(18)\qquad \begin{cases} |u(a', y) - u(a_1, y)| < 2\cdot K_1(\sigma)(a' - a_1) + K_1(\sigma)\cdot\dfrac{8a}{n}\varepsilon, \\ |u(a_2, y) - u(a'', y)| < 2\cdot K_1(\sigma)(a_2 - a'') + K_1(\sigma)\cdot\dfrac{8a}{n}\cdot\varepsilon. \end{cases}$$

Désignons par $u_y(x)$ une fonction de x qui coïncide avec $u(x, y)$ dans l'ensemble Π_y et aux points c_1, c_2 et qui varie linéairement dans les segments $\overline{z'_s z''_s}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, $\overline{c_1 c'}$ et $\overline{c'' c_2}$. Il est clair que

$$(19)\qquad \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

presque partout dans l'ensemble Π_y; par suite, il résulte des inégalités (13) et (16):

$$\left|\frac{\partial u_y(x)}{\partial x}\right| < 3K_1(\sigma)$$

pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a', a''), sauf peut-être un ensemble de valeurs de mesure nulle. On a donc

$$(20)\qquad u(a'', y) - u(a', y) = \int_{a'}^{a''} \frac{\partial u_y(x)}{\partial x}\,dx$$

et, de plus,

$$(21)\qquad u(x''_s, y) - u(x'_s, y) = \int_{x'_s}^{x''_s} \frac{\partial u_y(x)}{\partial x}\,dx.$$

En comparant (19), (20) et (21), on obtient

$$u(a'', y) - u(a', y) = \int\limits_{\Pi_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \sum_s [u(x''_s, y) - u(x'_s, y)],$$

la somme $\sum\limits_s$ étant étendue à tous les intervalles contigus à l'ensemble Π_y. Par suite, en vertu de (16) et (18),

$$(22)\qquad u(a_2, y) - u(a_1, y) = \int\limits_{\Pi_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \eta(y)$$

où

(23) $|\eta(y)| < 8\,K_1(\sigma)\cdot\left[\sum_s (x_s'' - x_s') + (a' - a_1) + (a_2 - a'')\right] +$

$$+ K_1(\sigma)\cdot\frac{16\,a}{n}\cdot\varepsilon.$$

Nous avons obtenu la relation (22) et l'inégalité (23), en supposant que l'ensemble Π_y n'est pas vide. Lorsque cet ensemble est vide, nous poserons $\eta(y) = u(a_2, y) - u(a_1, y)$. En vertu de l'inégalité (10), nous aurons, pour ce nombre $\eta(y)$, l'inégalité (23), où il faut prendre $a_2 - a_1 = \frac{a}{n}$ au lieu de $\sum_s (x_s'' - x_s') + (a' - a_1) + (a_2 - a'')$. Nous aurons alors la relation (22), en y remplaçant $\int\limits_{\Pi_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx$ par zéro.

En posant $\int\limits_{b_1}^{b_2} \eta(y)\,dy = \theta$ et en tenant compte de la relation évidente

$$\int\limits_{C(R_n')} u\,dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} [u(a_2, y) - u(a_1, y)]\,dy,$$

on obtient de l'inégalité (22):

$$\int\limits_{C(R_n')} u\,dy = \int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\int\limits_{\Pi_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right] dy + \theta. \tag{24}$$

Il est clair que

$$\int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\sum_s (x_s'' - x_s') + (a' - a_1) + (a_2 - a'')\right] dy = \text{mes}\,\Pi''\ ^{1)},$$

où Π'' est l'ensemble de points qui se trouvent dans le carré R_n', mais n'appartiennent pas à l'ensemble Π^*. Par suite, en vertu de (11) et (23),

$$|\theta| < 8\cdot K_1(\sigma)\cdot \text{mes}\,\Pi'' + K_1(\sigma)\cdot\frac{16\,a^2}{n^2}\,\varepsilon. \tag{25}$$

[1]) Lorsque, pour une valeur quelconque de y, l'ensemble Π_y est vide, il faut remplacer dans cette relation le nombre $\sum_s (x_s'' - x_s') + (a' - a_1) + (a_2 - a'')$ par $a_2 - a_1$.

La dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction bornée, définie presque partout dans l'ensemble Π^*. Donc, il résulte d'un théorème de M. **Fubini** que

$$\int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\int\limits_{\Pi_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right] dy = \iint\limits_{\Pi^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy,$$

d'où l'on obtient, en vertu de (24),

$$\int\limits_{C(R_n')} u\,dy = \iint\limits_{\Pi^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy + \theta.$$

En répétant les mêmes raisonnements pour les intégrales

$$\int\limits_{C(R_n')} u\,dx,\quad \int\limits_{C(R_n')} v\,dx,\quad \int\limits_{C(R_n')} v\,dy$$

et en tenant compte de la relation (15), on trouve finalement

$$\int\limits_{C(R_n')} f(z)\,dz = -\iint\limits_{\Pi^*}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\iint\limits_{\Pi^*}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \theta_1,$$

où

$$|\theta_1| < 32\cdot K_1(\sigma)\cdot \text{mes}\,\Pi'' + K_1(\sigma)\cdot\frac{64\,a^2}{n^2}\,\varepsilon. \tag{26}$$

Les relations (14) étant vérifiées presque partout dans l'ensemble Π^*, on a donc

$$\int\limits_{C(R_n')} f(z)\,dz = \theta_1. \tag{27}$$

Il est clair que le carré R_n' est à l'intérieur du cercle γ, dont le centre coïncide avec le point d'intersection des diagonales de ce carré et dont le rayon est égal à $r_n = \frac{8\,a}{n}$. Il en résulte que

$$\text{mes}\,\Pi'' \leqslant \text{aire de } R_n' - \text{mes}\,\Pi^* \leqslant \pi\,r_n^2 - \text{mes}\,\Pi',$$

où l'on désigne, comme précédemment, par Π' la partie de l'ensemble Π comprise dans le cercle γ. En comparant cette dernière inégalité avec l'inégalité (5), on obtient

$$\operatorname{mes} \Pi'' \leqslant \varepsilon^2 \sigma^4 \pi r_n^2 = \varepsilon^2 \sigma^4 \cdot \pi \cdot \frac{64 a^2}{n^2}$$

et, par suite, en vertu de (26) et (27),

$$\left| \int\limits_{C(R'_n)} f(z)\, dz \right| < 64 \cdot K_1(\sigma) \cdot (32 \cdot \varepsilon \sigma^4 \pi + 1) \cdot \frac{a^2}{n^2} \cdot \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon < \frac{1}{4}$ et $\frac{a^2}{n^2} =$ aire de R'_n, on trouve finalement

$$\left| \int\limits_{C(R'_n)} f(z)\, dz \right| < K_2(\sigma) \cdot \varepsilon \cdot \text{aire de } R'_n, \tag{28}$$

où $K_2(\sigma)$ ne dépend que de σ. L'inégalité (28) est vraie pour tous les carrés R'_n.

§ **6.** Considérons à présent les intégrales

$$\int\limits_{C(R'''_n)} f(z)\, dz.$$

Prenons un des carrés R'''_n et désignons par Π^{**} la partie de l'ensemble Π contenue dans ce carré. Considérons les droites $\delta_j(z)$, $j = 1, 2$, du système $S(\Pi, \sigma)$ qui correspondent aux points z de l'ensemble Π^{**}. Nous supposons que le système $S(\Pi, \sigma)$ vérifie toutes les conditions de la proposition énoncée à la fin du § 2. Par suite, nous avons les inégalités

$$\{\delta_j(z), \widehat{\ } 0x\} > 300\,\sigma, \quad \{\delta_j(z), \widehat{\ } 0y\} > 300\,\sigma \qquad (j = 1, 2) \tag{1}$$

pour tous les points z de l'ensemble Π^{**} et pour toutes les droites correspondantes $\delta_j(z)$.

Désignons par $z_1 = a_1 + i b_1$, $z_2 = a_2 + i b_2$, $z_3 = a_2 + i b_1$, $z_4 = a_1 + i b_2$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, les sommets du carré R'''_n et soit $c = a' + i b'$ le point d'intersection des diagonales de ce carré. On a, comme précédemment,

$$a_2 - a_1 = b_2 - b_1 = \frac{a}{n}. \tag{2}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{ll} a'_1 = a_1 - \frac{a}{2n} \cdot \operatorname{tg} 300\,\sigma, & a'_2 = a_2 + \frac{a}{2n} \cdot \operatorname{tg} 300\,\sigma, \\ b'_1 = b_1 - \frac{a}{2n} \cdot \operatorname{tg} 300\,\sigma, & b'_2 = b_2 + \frac{a}{2n} \cdot \operatorname{tg} 300\,\sigma, \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\begin{array}{ll} c_1 = a'_1 + i b', & c_2 = a'_2 + i b', \\ c_3 = a' + i b'_1, & c_4 = a' + i b'_2, \end{array} \tag{4}$$

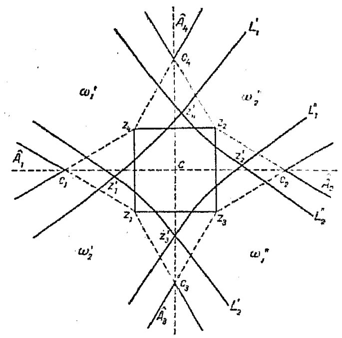

Fig. 3.

et soient $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ les angles qui possèdent les propriétés suivantes:

1°. Les sommets des angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ se trouvent respectivement aux points c_1, c_2, c_3 et c_4.

2°. L'ouverture de chacun de ces angles est égale à $600\,\sigma$.

3°. Les bissectrices des angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ se trouvent sur la droite passant par le point c et parallèle à l'axe des x.

4°. Les bissectrices des angles $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ se trouvent sur la droite passant par le point c et parallèle à l'axe des y.

5°. L'angle $\hat{A}_1$ est situé à gauche du point c_1 et l'angle $\hat{A}_2$ est situé à droite du point c_2.

6°. L'angle $\hat{A}_3$ est situé plus bas que le point c_3 et l'angle $\hat{A}_4$ est situé plus haut que le point c_4.

En vertu de (1), (3) et (4) les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont situés de deux côtés différentes de chaque droite $\delta_j(z)$, $z \subset \Pi^{**}$, $j=1,2$; les angles $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ possèdent la même propriété. Si les droites $\delta_1(z)$ et $\delta_2(z)$ ont la position indiquée sur la figure 1, les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_4$ sont situés du même côté de chaque droite $\delta_1(z)$, $z \subset \Pi^{**}$, et les angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ sont situés du côté opposé de ces droites. De plus, les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_3$ sont situés du même côté de chaque droite $\delta_2(z)$, $z \subset \Pi^{**}$, tandis que les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_4$ sont situés du côté opposé de ces droites.

Chaque droite $\delta_j(z)$, $z \subset \Pi^{**}$, $j=1,2$, partage le plan de la variable z en deux demi-plans que nous désignerons par $\omega'[\delta_j(z)]$ et $\omega''[\delta_j(z)]$. Pour fixer les idées, nous choisirons les notations de la façon que les demi-plans $\omega'[\delta_1(z)]$ et $\omega''[\delta_1(z)]$ contiennent respectivement les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_4$ et les angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et, de même, que les demi-plans $\omega'[\delta_2(z)]$ et $\omega''[\delta_2(z)]$ contiennent respectivement les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_3$ et les angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_4$.

Désignons par ω_j', $j=1,2$, l'ensemble des points intérieurs à tous les demi-plans $\omega'[\delta_j(z)]$, $z \subset \Pi^{**}$, et de même, désignons par ω_j'', $j=1,2$, l'ensemble des points intérieurs à tous les demi-plans $\omega''[\delta_j(z)]$, où $z \subset \Pi^{**}$.

Comme les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_4$ se trouvent à l'intérieur de chacun des demi-plans $\omega'[\delta_1(z)]$, l'ensemble ω_1' n'est pas vide et contient tous les points intérieurs à ces deux angles. Par la même raison, les ensembles ω_1'', ω_2' et ω_2'' ne sont pas vides et contiennent respectivement tous les points intérieurs aux angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, ou $\hat{A}_1$, $\hat{A}_3$, ou bien $\hat{A}_2$, $\hat{A}_4$.

Soit z_0 un point quelconque de l'ensemble ω_1'. Il est clair qu'il existe un cercle de centre z_0 et de rayon fixe dont tous les points appartiennent aussi à l'ensemble ω_1'. En effet, dans le cas contraire, le point z_0 serait un point limite pour les points qui se trouvent sur les droites $\delta_1(z)$, $z \subset \Pi^{**}$. Mais, d'après les propriétés du système $S(\Pi, \sigma)$, une position limite des droites $\delta_1(z)$ est aussi une droite de cette nature, à savoir $\delta_1(z^*)$ (propriété 2, § 2). De plus, $z^* \subset \Pi^{**}$, puisque l'ensemble Π^{**} est fermé. Par suite, le point z_0 se trouve sur une des droites $\delta_1(z)$, $z \subset \Pi^{**}$, ce qui est impossible. L'ensemble ω_1' est donc un domaine ouvert. On démontre de la même manière que les ensembles ω_1', ω_2' et ω_2'' sont aussi des domaines ouverts.

Désignons respectivement par L_j' et L_j'', $j=1,2$, les frontières des domaines ω_j' et ω_j''. Nous allons démontrer que chaque point de l'ensemble L_1' se trouve sur une des droites $\delta_1(z)$, $z \subset \Pi^{**}$. En effet, soit z' un point quelconque de l'ensemble L_1'. Tout point du domaine ω_1' est à l'intérieur de chacun des demi-plans $\omega'[\delta_1(z)]$. Par suite, le point z' se trouve à l'intérieur de chacun des demi-plans $\omega'[\delta_1(z)]$, ou bien appartient à une des droites $\delta_1(z)$. Mais le point z' n'est pas un point intérieur au domaine ω_1' et, par suite, ne se trouve pas à l'intérieur de tous les demi-plans $\omega'[\delta_1(z)]$. Donc le point z' appartient à une des droites $\delta_1(z)$, c'est-à-dire chaque point de l'ensemble L_1' appartient à une des droites $\delta_1(z)$. On démontre de la même manière que chaque point de l'ensemble L_1'' appartient aussi à l'une des droites $\delta_1(z)$ et, de même, que tous les points de chacun des ensembles L_2' et L_2'' appartiennent à l'une des droites $\delta_2(z)$ (on suppose toujours que $z \subset \Pi^{**}$).

Il est clair que pour chaque valeur de j, $j=1,2$, les points intérieurs à un demi-plan quelconque $\omega'[\delta_j(z)]$, $z \subset \Pi^{**}$, ne se trouvent ni à l'intérieur ni sur la frontière du domaine ω_j'' et, de même, les points intérieurs à un demi-plan quelconque $\omega''[\delta_j(z)]$, ne sont situés ni à l'intérieur ni sur la frontière du domaine ω_j'. Il en résulte que pour aucune valeur de j ($j=1,2$) les domaines ω_j' et ω_j'' n'ont de points communs.

Soient z' et z'' deux points arbitraires de l'ensemble L_1'. D'après ce qui précède, ces points sont situés respectivement sur deux droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$, où $\zeta' \subset \Pi^{**}$ et $\zeta'' \subset \Pi^{**}$. Les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_2(\zeta'')$ ne peuvent être différentes et parallèles, puisque dans le cas contraire une des droites $\delta_1(\zeta')$ ou $\delta_1(\zeta'')$, à savoir $\delta_1(\zeta')$, serait située du côté différent de la droite $\delta_1(\zeta'')$ que le domaine ω_1' et, par suite, le point z' ne pourrait pas être situé sur l'ensemble L_1', ce qui est impossible. Donc, si les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ sont différentes, elles possèdent un point commun ζ_0. Le point z' se trouve sur l'ensemble L_1' et, par suite, ne peut pas être situé de l'autre côté de la droite $\delta_1(\zeta'')$ que le domaine ω_1'. De même, le point z'' ne peut pas être situé de l'autre côté de la droite $\delta_1(\zeta')$ que le domaine ω_1'. Donc les segments $\overline{\zeta_0 z'}$ et $\overline{\zeta_0 z''}$ constituent un angle *obtus* et, par suite, nous avons les inégalités (fig. 4):

$$(5) \qquad |z'-\zeta_0| < |z'-z''|, \qquad |z''-\zeta_0| < |z'-z''|;$$

Démontrons maintenant que

$$(6) \qquad \{\overline{z'z''}\,\hat{,}\,0x\} > 300\,\sigma, \qquad \{\overline{z'z''}\,\hat{,}\,0y\} > 300\,\sigma,$$

où z' et z'' sont deux points quelconques de l'ensemble L_1'.

Nous avons déjà vu que les points z' et z'' doivent être situés respectivement sur deux droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$, où $\zeta' \subset \Pi^{**}$ et $\zeta'' \subset \Pi^{**}$. Si $\delta_1(\zeta') \equiv \delta_1(\zeta'')$, les inégalités (6) sont vérifiées en vertu des inégalites (1). Lorsque les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ sont différentes, elles possèdent, d'après ce qui précède, un point commun ζ_0 et, de plus, $\{\delta_1(\zeta')\,\hat{,}\,\delta_1(\zeta'')\} < \sigma$.

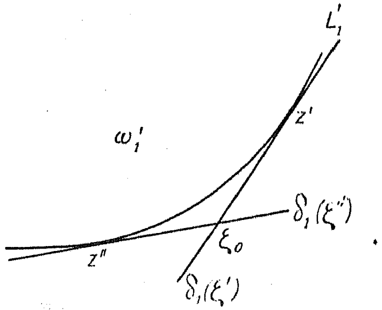

Fig. 4.

On a, en vertu des inégalités (1),

$$\{\overline{\zeta_0 z'}\,\hat{,}\,0x\} > 300\,\sigma, \qquad \{\overline{\zeta_0 z''}\,\hat{,}\,0z\} > 300\,\sigma,$$
$$\{\overline{\zeta_0 z'}\,\hat{,}\,0y\} > 300\,\sigma, \qquad \{\overline{\zeta_0 z''}\,\hat{,}\,0y\} > 300\,\sigma.$$

Puisque les segments $\overline{\zeta_0 z'}$ et $\overline{\zeta_0 z''}$ constituent un angle obtus, il résulte de ces dernières inégalités que les inégalités (6) sont vérifiées.

On démontre de la même manière que les inégalités (6) subsistent pour deux points quelconques z' et z'' de l'ensemble L_1'' et, aussi, pour deux points quelconques de chacun des ensembles L_2' et L''.

Il est clair que chaque droite parallèle à l'axe des x contient des points intérieurs à chacun des angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ et, par suite, des points intérieurs à chacun des domaines ω_1' et ω_1''. Il en résulte que toutes les droites parallèles à l'axe des x possèdent des points communs avec chacun des ensembles L_1' et L_1''. D'ailleurs, en vertu de (6), ces droites peuvent avoir au plus un seul point commun avec chacun de ces ensembles.

En raisonnant de la même manière, on démontre que, d'une façon générale, chaque droite parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y possède un et un seul point commun avec chacun des ensembles L_j' et L_j'', $j = 1, 2$.

Désignons par $\varphi(x)$ l'ordonnée d'un point de l'ensemble L_1' correspondant à l'abscisse x. Il résulte de ce qui précède que $\varphi(x)$ est une fonction univalente, définie pour toutes les valeurs de x. De plus, on voit de la seconde inégalité (6) et de l'inégalité $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ (voir § 2), que

$$(7) \qquad \left|\frac{\varphi(x') - \varphi(x'')}{x' - x''}\right| < \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 300\,\sigma\right) = \mathrm{ctg}\,300\,\sigma,$$

quelles que soient les valeurs x' et x'' et, par suite, que pour chaque valeur de x la fonction $\varphi(x)$ possède des nombres dérivés bornés. Il en résulte que l'ensemble L_1' est une courbe rectifiable dont l'équation est $y = \varphi(x)$. On démontre de la même manière que chacun des ensembles L_2'', L_2' et L_2'' est aussi une courbe rectifiable.

Lorsque $z' = x' + iy'$ et $z'' = x'' + iy''$ sont deux points quelconques situés sur une certaine courbe L_j' ou L_j'', $j = 1, 2$, nous désignerons par $\smile z'z''$ la partie de cette courbe comprise entre les points z' et z''. En supposant que les points z' et z'' se trouvent sur la courbe L_1', nous aurons, en vertu de (7),

$$(8) \qquad \textit{longueur de } \smile z'z'' < |x' - x''| \cdot \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\,300\,\sigma} < \frac{1}{\sigma} \cdot |x' - x''|,$$

et l'on démontre de la même manière que l'inégalité (8) subsiste aussi, lorsque z' et z'' sont des points quelconques situés sur l'une des courbes L_1'', L_2' ou L_2''.

Puisque, pour une valeur fixe de j, les domaines ω_j' et ω_j'' n'ont pas de points communs intérieurs, ces domaines sont situés de deux côtés différents de chacune des deux courbes L_j' et L_j''. Nous avons déjà vu que les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_4$ se trouvent dans le domaine ω_1', tandis que les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ sont situés dans le domaine ω_1''. De même, les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_3$ se trouvent dans le domaine ω_2' et les angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_4$ sont situés dans le domaine ω_2''. Par suite, les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_4$ sont situés du même côté de la courbe L_1', tandis que les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$ se trouvent du côté opposé de cette courbe et, de plus, les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_3$ sont situés du même côté de la courbe L'_2, tandis que les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_4$ sont situés du côté opposé de cette courbe. Il en résulte que les courbes L'_1 et L'_2 possèdent au moins un point commun z'_1 (voir fig. 3, p. 83). De plus, ce point est unique.

En effet, supposons par contre que les courbes L'_1 et L'_2 possèdent un autre point commun z''_1. Le point z'_1 est situé sur deux droites $\delta_1(\zeta'_1)$, $\delta_2(\zeta'_2)$, tandis que le point z''_1 est situé sur deux droites $\delta_1(\zeta''_1)$, $\delta_2(\zeta''_2)$, où les points $\zeta'_1, \zeta''_1, \zeta'_2$ et ζ''_2 appartiennent à l'ensemble Π^{**}. D'après ce que nous avons déjà vu, le droites $\delta_1(\zeta'_1)$ et $\delta_1(\zeta''_1)$ ou bien coïncident, ou bien possèdent un point commun ζ_0. D'ailleurs, dans le dernier cas, les segments $\overline{\zeta_0 z'_1}$ et $\overline{\zeta_0 z''_1}$ constituent un angle obtus. Il en résulte que

$$\{\overline{z'_1 z''_1}, \widehat{\ }\delta_1(\zeta'_1)\} \leqslant \sigma,$$

puisque, d'après la propriété 3⁰ des droites $\delta_j(z)$, on a l'inégalité $\{\delta_1(\zeta'_1), \delta_1(\zeta''_1)\} \leqslant \sigma$ [1]. On démontre de la même manière que

$$\{\overline{z'_1 z''_1}, \widehat{\ }\delta_2(\zeta'_2)\} \leqslant \sigma,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité $\{\delta_1(\zeta'_1), \widehat{\ }\delta_2(\zeta_2)\} \geqslant 800\sigma$ [propriété 4⁰ des droites $\delta_j(z)$]. On voit donc que les courbes L'_1 et L'_2 possèdent un et un seul point commun z'_1.

On démontre de la même manière que les courbes de chaque couple (L''_1, L''_2), (L''_1, L'_2) et (L'_1, L''_2) possèdent un et un seul point commun. Nous désignerons respectivement ces points par z'_2, z'_3 et z'_4 (voir fig. 3, p. 83). De plus, nous poserons $z'_j = x'_j + i y'_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, où x'_j et y'_j sont réels. Nous avons déjà vu que le point z_1 est situé sur deux droites $\delta_1(\zeta'_1)$ et $\delta_2(\zeta'_2)$, où $\zeta'_1 \subset \Pi^{**}$ et $\zeta_2 \subset \Pi^{**}$, c'est-à-dire les points ζ'_1 et ζ'_2 se trouvent dans le carré R'''_n. On obtient du triangle $\Delta\, z'_1 \zeta'_1 \zeta'_2$

$$\frac{|z'_1 - \zeta'_1|}{\sin \sphericalangle z'_1 \zeta'_2 \zeta'_1} = \frac{|\zeta'_1 - \zeta'_2|}{\sin \sphericalangle \zeta'_1 z'_1 \zeta_2}$$

d'où il résulte

$$|z'_1 - \zeta'_1| \leqslant \frac{|\zeta'_1 - \zeta'_2|}{\sin \sphericalangle \zeta'_1 z'_1 \zeta'_2}. \tag{9}$$

[1]) Voir la définition du système $S(\Pi, \sigma)$ au § 2, p. 62. Lorsque les droites $\delta_1(\zeta'_1)$ et $\delta_1(\zeta''_1)$ coïncident, l'angle $\{z'_1 z''_1, \widehat{\ }\delta_1(\zeta'_1)\}$ est égal à zéro.

Les côtés du carré R'''_n étant égaux à $\frac{a}{n}$, nous avons

$$|\zeta'_1 - \zeta'_2| < \frac{2a}{n}.$$

De plus, il résulte de l'inégalité $\{\delta_1(\zeta'_1), \widehat{\ }\delta_2(\zeta'_2)\} \geqslant 800\sigma$ que

$$\sin \sphericalangle \zeta'_1 z'_1 \zeta'_2 = \sin\{\delta_1(\zeta'_1), \widehat{\ }\delta_2(\zeta'_2)\} \geqslant \sin 800\sigma > \sigma.$$

En comparant ces dernières inégalités avec l'inégalité (9), nous obtenons finalement

$$|z'_1 - \zeta'_1| \leqslant \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2a}{n}. \tag{10}$$

Le point ζ'_1 appartenant au carré R'''_n, on voit donc que la distance du point z'_1 au carré R'''_n est inférieure à $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2a}{n}$, et l'on démontre de la même manière que les distances de chaque point z'_1, z'_3 et z'_4 au carré R'''_n sont aussi inférieures à $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2a}{n}$. Il en résulte que

$$\begin{cases} |x'_1 - x'_3| < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{5a}{n}, & |x'_3 - x'_2| < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{5a}{n}, \\ |x'_1 - x'_4| < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{5a}{n}, & |x'_4 - x'_2| < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{5a}{n} \end{cases} \tag{11}$$

où x'_j et y'_j, $j = 1, 2, 3, 4$, désignent, comme précédemment, les abscisses et les ordonnées des points z'_j. On obtient de l'inégalité (8)

$$\textit{longueur de } \smile z'_j z'_k < \frac{1}{\sigma} \cdot |x'_j - x'_k|, \tag{12}$$

où les indices j et k peuvent avoir des valeurs appartenant à un des quatre couples $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(1, 4)$ ou $(4, 2)$. Par suite, en vertu de (11),

$$\textit{longueur de } \smile z'_j z'_k < \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{5a}{n} \tag{13}$$

pour les mêmes valeurs de j et k.

Désignons par F l'ensemble de tous les points z qui ne sont intérieurs à aucun des domaines ω'_1, ω''_1, ω'_2 et ω''_2. Il est clair que F est un ensemble parfait simplement connexe dont la frontière se compose de tous les points appartenant aux courbes $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_3' z_2'$, $\smile z_1' z_4'$ et $\smile z_4' z_2'$ [1]). Par suite, on voit de l'inégalité (13) que le diamètre de l'ensemble F est inférieur à $\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}$.

Nous allons démontrer que pour tous les points z' et z'' de l'ensemble F on a l'inégalité

$$|f(z')-f(z'')| < K_8(\sigma)\cdot\frac{a}{n}, \tag{14}$$

où $K_8(\sigma)$ ne dépend que de ϱ.

En effet, soient tout d'abord z' et z'' des points quelconques de la courbe $\smile z_1' z_4'$. Puisque cette courbe est une partie de la courbe L_1', il résulte de ce qui précède que les points z' et z'' se trouvent respectivement sur deux droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ du système $S(\Pi, \sigma)$, où $\zeta' \subset \Pi^{**}$ et $\zeta'' \subset \Pi^{**}$. Supposons tout d'abord que les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ sont différentes. Nous avons vu que, dans ce cas, les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ possèdent un point commun ζ_0 pour lequel on a les inégalités (5). Lorsque les droites $\delta_1(\zeta')$ et $\delta_1(\zeta'')$ coïncident, nous supposerons que ζ_0 est un point quelconque situé à l'intérieur du segment $\overline{z'z''}$. Il est clair que nous avons, dans ce cas, les mêmes inégalités (5).

Il résulte de la définition même des domaines ω_j', ω_j'', $j=1, 2$, que tous les points de l'ensemble Π^{**} ne sont des points intérieurs à aucun de ces domaines. Par suite, l'ensemble Π^{**} est une partie de l'ensemble F. Les points z' et z'' se trouvent sur la courbe $\smile z_1' z_4'$ et les points ζ', ζ'' appartiennent à l'ensemble Π^{**}. Comme tous les points de la courbe $\smile z_1' z_4'$ se trouvent sur la frontière de l'ensemble F on voit que les quatre points z', z'', ζ' et ζ'' appartiennent à l'ensemble F. Le diamètre de ce dernier ensemble étant inférieur à $\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}$, nous obtenons donc les inégalités

[1]) Nous dirons qu'un ensemble e de points, appartenant à un ensemble parfait F, est la frontière de cet ensemble, lorsque e se compose de tous les points de F qui ne sont pas des points intérieurs de cet ensemble. Il peut arriver que tous les points de l'ensemble F appartiennent à sa frontière. Cela a lieu, par exemple, si les courbes $\smile z_1' z_4'$ et $\smile z_3' z_2'$ coïncident, tandis que chacune des courbes $\smile z_1' z_3'$ et $\smile z_4' z_2'$ se réduit à un point (on pourrait démontrer que dans ce cas les courbes $\smile z_1' z_4'$ et $\smile z_3' z_2'$ sont des segments rectilignes).

$$\left\{\begin{array}{l} |z'-\zeta'| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}, \qquad |z''-\zeta''| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}, \\ \qquad\qquad |z'-z''| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n} \end{array}\right. \tag{15}$$

et, par suite, en vertu de (5),

$$\left\{\begin{array}{l} |\zeta_0-z'| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}, \qquad |\zeta_0-z''| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20\,a}{n}, \\ |\zeta_0-\zeta'| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{40\,a}{n}, \qquad |\zeta_0-\zeta''| < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{40\,a}{n}. \end{array}\right. \tag{16}$$

En comparant les inégalités (15) et (16) avec l'inégalité (1) du § 4, nous obtenons finalement

$$\left\{\begin{array}{l} |z'-\zeta'| < \sigma, \qquad |z''-\zeta''| < \sigma, \\ |\zeta_0-\zeta'| < \sigma, \qquad |\zeta_0-\zeta''| < \sigma. \end{array}\right. \tag{17}$$

Les points z' et ζ_0 se trouvent sur la droite $\delta_1(\zeta')$, tandis que les points z'' et ζ_0 se trouvent sur la droite $\delta_1(\zeta'')$. On obtient donc des inégalités (17) et de la propriété 5⁰ des droites $\delta_j(z)$ [1]):

$$|f(z')-f(\zeta')| \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot|z'-\zeta'|, \qquad |f(z'')-f(\zeta'')| < \frac{1}{\sigma}\cdot|z''-\zeta''|,$$

$$|f(\zeta_0)-f(\zeta')| \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot|\zeta_0-\zeta'|, \qquad |f(\zeta_0)-f(\zeta'')| < \frac{1}{\sigma}\cdot|\zeta_0-\zeta''|,$$

d'où il résulte, en vertu de (15) et (16), que

$$|f(z')-f(\zeta')| < \frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{20\,a}{n}, \qquad |f(z'')-f(\zeta'')| < \frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{20\,a}{n},$$

$$|f(\zeta_0)-f(\zeta')| < \frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{40\,a}{n}, \qquad |f(\zeta_0)-f(\zeta'')| < \frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{40\,a}{n}$$

et, par suite, que

$$|f(z')-f(z'')| < \frac{120\,a}{n}. \tag{18}$$

L'inégalité (18) est vraie pour tous les points z' et z'' de la courbe $\smile z_1' z_4'$.

On démontre de la même manière que l'inégalité (18) est aussi vérifiée, si les points z' et z'' se trouvent sur la courbe $\smile z_1' z_3'$, ou

[1]) Voir la définition du système $S(\sigma, \Pi)$ au § 2, p. 62.

si ces deux points sont situés sur la courbe $\smile z_4' z_2'$ ou bien s'il sont situés sur la courbe $\smile z_3' z_2'$.

Supposons à présent que z' et z'' sont deux points quelconques de la frontière de l'ensemble F, c'est-à-dire qu'ils sont deux points quelconques dont chacun est situé sur une des courbes $\smile z_1' z_4'$, $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_4' z_2'$ ou $\smile z_3' z_2'$. Supposons, pour fixer les idées, que z' se trouve sur la courbe $\smile z_1' z_4'$ et z'' se trouve sur la courbe $\smile z_3' z_2'$. Nous aurons en vertu de (18)

$$|f(z')-f(z_1')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{120a}{n},$$

$$|f(z'')-f(z_3')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{120a}{n},$$

$$|f(z_1')-f(z_3')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{120a}{n}$$

et, par suite,

(19) $$|f(z')-f(z'')<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{360a}{n}.$$

L'inégalité (19) est vérifiée pour tous les points z' et z'' situés sur la frontière de l'ensemble F.

Désignons par Π_0 l'ensemble fermé qui est une partie commune des ensembles Π et F, $\Pi_0=(\Pi, F)$, et soit z un point quelconque de Π_0. Prenons une droite $\delta_1(z)$ du système $S(\Pi,\sigma)$ qui correspond au point z et désignons par $\tilde{z}$ un des points communs de la droite $\delta_1(z)$ avec la frontière de l'ensemble F. Le point $\tilde{z}$ se trouve sur une des courbes $\smile z_1' z_4'$, $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_4' z_2'$ ou $\smile z_3' z_2'$.

Nous avons déjà vu que le diamètre de l'ensemble F est inférieur à $\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20a}{n}$. On obtient donc

(20) $$|\tilde{z}-z|<\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20a}{n}$$

et, par suite, en vertu de l'inégalité (1) du § 4,

(21) $$|\tilde{z}-z|<\sigma.$$

Puisque z appartient à l'ensemble Π, il résulte de (21) et de la propriété 5°, p. 62 des droites $\delta_j(z)$ que l'on a $|f(\tilde{z})-f(z)|<\frac{1}{\sigma}\cdot|\tilde{z}-z|$,

d'où l'on obtient, en vertu de (20),

(22) $$|f(\tilde{z})-f(z)|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{20a}{n}.$$

Soient, à présent, z' et z'' deux points quelconques de l'ensemble Π_0. Nous tirons de l'inégalité (22)

(23) $$|f(\tilde{z}')-f(z')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{20a}{n},\qquad |f(z)-f(z'')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{20a}{n},$$

où $\tilde{z}'$ et $\tilde{z}''$ sont deux points de la frontière de l'ensemble F qui se trouvent respectivement sur les droites $\delta_1(z')$ et $\delta_1(z'')$, correspondant aux points z' et z''. On obtient de l'inégalité (19):

$$|f(\tilde{z}')-f(z'')|<\frac{1}{\sigma^3}\cdot\frac{360a}{n}$$

et, par conséquent en vertu de (23), $|f(z')-f(z'')|<K_3(\sigma)\cdot\frac{a}{n}$, où $K_3(\sigma)=\frac{400}{\sigma^3}$. Nous avons ainsi obtenu l'inégalité (14), p. 90; nous l'avons obtenue pour tous les points z' et z'' de l'ensemble Π_0. De plus, il résulte des inégalités (19) et (23) que l'inégalité (14) est aussi vérifiée, si z' et z'' sont deux points quelconques situés sur la frontière de l'ensemble F, ou bien, si z' est un point quelconque de la frontière de l'ensemble F, tandis que z'' est un point quelconque de l'ensemble Π_0.

Nous avons supposé que le nombre n est assez grand pour que la distance du carré R à la frontière du domaine D' soit supérieure à $\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20a}{n}$, (voir § 4, p. 73). Puisque le diamètre de l'ensemble F est inférieur à $\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{20a}{n}$ et que cet ensemble possède des points communs avec le carré R_n''', on voit que tous les points de l'ensemble F se trouvent à l'intérieur du domaine D'. Mais la fonction est monogène partout à l'intérieur du domaine D', sauf peut-être aux points de l'ensemble Π. Par suite, la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point de l'ensemble F, sauf peut-être aux points de l'ensemble Π_0. Il en résulte, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 1 du § 3, que l'inégalité (14) est vérifiée pour tous les points z' et z'' de l'ensemble F, c. q. f. d.

Désignons par F_0 l'ensemble de tous les points appartenant à F et situés dans le carré R_n'''. Puisque chaque courbe $\smile z_1' z_4'$, $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_4' z_2'$ et $\smile z_3' z_2'$ possède au plus un point commun avec chacun des côtés du carré R_n''', il est clair que F_0 est un ensemble parfait, simplement connexe dont la frontière se compose des arcs des courbes $\smile z_1' z_4'$, $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_4' z_2'$, $\smile z_3' z_2'$ et des segments situés sur le contour du rectangle R_n'''. D'ailleurs, sur chacune des courbes $\smile z_1' z_4'$, $\smile z_1' z_3'$, $\smile z_4' z_2'$ et $\smile z_3' z_2'$ il existe au plus un arc appartenant à la frontière de l'ensemble F_0 et, de même, sur chaque côté du carré R_n''' il existe au plus un segment qui se trouve sur la frontière de F_0. Désignons par λ_{jk} l'arc de la courbe $\smile z_j' z_k'$ appartenant à la frontière de l'ensemble F_0, où

(24) $j=1,\ k=4;\quad j=1,\ k=3;\quad j=4,\ k=2\quad$ ou $\quad j=3,\ k=2.$

De même, désignons par s_{kj} un segment rectiligne situé sur le côté $\overline{z_j z_k}$ du carré R_n''' et faisant partie de la frontière de l'ensemble F_0, où les indices j et k sont définis par les égalités (24) et z_j $(j=1,2,3,4)$ sont les sommets du carré R_n''' (voir fig. 3, p. 83).

Il peut arriver que certains arcs λ_{jk} ou certains segments s_{jk} n'existent pas. Par exemple, l'arc λ_{jk} n'existe pas, lorsque la courbe correspondante $\smile z_j' z_k'$ est extérieure au carré R_n''' et, de même, le segment s_{jk} n'existe pas, si l'ensemble F n'a pas de points communs avec le côté $\overline{z_j z_k}$ du carré R_n'''.

λ_{jk} étant une partie de la courbe $\smile z_j' z_k'$, on a

$$\textit{longueur de } \lambda_{jk} \leqslant \textit{longueur de } \smile z_j' z_k'$$

et, par suite, en vertu de (13),

$$\textit{longueur de } \lambda_{jk} < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{5a}{n}. \tag{25}$$

De même, s_{jk} est une partie du segment $\overline{z_j z_k}$, qui est un côté du carré R_n'''; par suite,

$$\textit{longueur de } s_{jk} \leqslant |z_j - z_k| = \frac{a}{n}. \tag{26}$$

Désignons par G l'ensemble de tous les points intérieurs du carré R_n''' qui n'appartiennent pas à l'ensemble F_0. Il est clair que l'ensemble G est une somme de certains domaines ouverts g_ν, chacun desquels est connexe et dont le nombre est au plus égal à quatre;

c'est-à-dire que nous pouvons supposer l'indice ν prendre des valeurs vérifiant l'inégalité $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0$ où $\nu_0 \leqslant 4$. Tous les domaines g_ν sont simplement connexes, sauf le cas où tous les points de l'ensemble F se trouvent à l'intérieur du carré R_n'''. Dans ce cas $\nu_0 = 1$ et le domaine g_1 est doublement connexe. Lorsque tous les points du carré R_n''' appartiennent à l'ensemble F, les domaines g_ν n'existent pas [1]).

Puisque $\Pi^{**} \subset F_0$ [2]) et que la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point du carré R_n''', sauf peut-être aux points de l'ensemble Π^{**}, on voit que $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de chaque domaine g_ν. De plus, le contour $C(g_\nu)$ de chacun de ces domaines est formé évidemment d'arcs des courbes $\smile z_j' z_k'$, en nombre fini, et de segments rectilignes situés sur le contour du carré R_n'''; le contour $C(g_\nu)$ se compose donc d'un nombre fini de courbes rectifiables.

En désignant par z_0 un point quelconque de l'ensemble F et en posant $f(z) - f(z_0) = \varphi(z)$, nous avons, en vertu de (14), p. 90,

$$|\varphi(z)| < K_3(\sigma)\cdot\frac{a}{n} \tag{27}$$

pour tous les points z de l'ensemble F. Nous pouvons écrire, en choisissant convenablement le sens de parcours des arcs λ_{jk} et des segments s_{jk},

$$\left\{\begin{aligned} &\int\limits_{C(R_n''')} f(z)\,dz = \int\limits_{C(R_n''')} \varphi(z)\,dz = \\ &= \sum_{j,k}\Big[\int\limits_{\lambda_{jk}} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{s_{jk}} \varphi(z)\,dz\Big] + \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int\limits_{C(g_\nu)} \varphi(z)\,dz, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

où la somme $\sum\limits_{j,k}$ est étendue à tous les couples d'indices j et k qui s'obtiennent des égalités (24) [3]). Nous avons en vertu de (25), (26) et (27)

[1]) On pourrait démontrer que dans ce cas tous les quatre sommets du carré R_n''' appartiennent à l'ensemble Π.

[2]) Nous avons vu p. 90 que $\Pi^{**} \subset F$.

[3]) Lorsque certaines courbes λ_{jk} ou certains segments s_{jk} n'existent pas, il faut remplacer les intégrales correspondantes $\int\limits_{\lambda_{jk}} \varphi(z)\,dz$ ou $\int\limits_{s_{jk}} \varphi(z)\,dz$ par zéro.

$$(29)\qquad \begin{cases} \left|\int\limits_{\lambda_{jk}} \varphi(z)\,dz\right| < K_3(\sigma)\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}\cdot\dfrac{5a^2}{n^2}, \\ \left|\int\limits_{s_{jk}} \varphi(z)\,dz\right| < K_3(\sigma)\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}\cdot\dfrac{a^2}{n^2} \end{cases}$$

pour tous les couples d'indices j et k qui figurent dans les égalités (24). De plus, la fonction $f(z)$ étant holomorphe à l'intérieur de chaque domaine g_ν, on obtient

$$(30)\qquad \int\limits_{C(g_\nu)} \varphi(z)\,dz = 0.$$

En comparant la relation (28) avec les inégalités (29) et avec la relation (30), on trouve finalement

$$\left|\int\limits_{C(R_n''')} f(z)\,dz\right| < 4\cdot K_3(\sigma)\cdot\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{5a^2}{n^2} + 4\cdot K_3(\sigma)\cdot\frac{a^2}{n^2}$$

et, par suite,

$$(31)\qquad \left|\int\limits_{C(R_n''')} f(z)\,dz\right| < K_4(\sigma)\cdot \text{ aire de } R_n''',$$

où $K_4(\sigma)$ ne dépend que de σ. L'inégalité (31) est vérifiée pour chacun des carrés R_n'''.

§ **7.** Nous pouvons maintenant définir la valeur de l'intégrale

$$\int\limits_{C(R)} f(z)\,dz,$$

où R est un carré quelconque, situé à l'intérieur du domaine D', dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Nous aurons évidemment

$$(1)\qquad \int\limits_{C(R)} f(z)\,dz = \sum{}' \int\limits_{C(R_n')} f(z)\,dz + \sum{}'' \int\limits_{C(R_n'')} f(z)\,dz + \sum{}''' \int\limits_{C(R_n''')} f(z)\,dz,$$

où les sommes Σ', Σ'' et Σ''' sont étendues respectivement à tous les carrés R_n', R_n'' et R_n'''. En tenant compte de la relation (1) du § 5, de l'inégalité (28) du même paragraphe et de l'inégalité (31) du § 6,

on obtient de la relation (1) du paragraphe présent:

$$(2)\qquad \left|\int f(z)\,dz\right| < K_2(\sigma)\cdot\varepsilon\cdot\sum{}' \text{aires de } R_n' + K_4(\sigma)\cdot\sum{}''' \text{aires de } R_n''',$$

où ε est un nombre arbitrairement petit, mais fixe.

Nous avons désigné par E_n l'ensemble de tous les points qui se trouvent à l'intérieur ou sur les côtés des carrés R_n''' et nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes } E_n = 0$, (voir § 4, p. 74). Or, il est évident que mes $E_n = \Sigma'''$ aires de R_n''', d'où il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \sum{}''' \text{aires de } R_n''' = 0.$$

Par suite, on peut choisir le nombre n assez grand pour que l'inégalité

$$(3)\qquad \sum{}''' \text{aires de } R_n''' < \varepsilon\cdot \text{aire de } R$$

soit vérifiée. De plus, il est évident que

$$(4)\qquad \sum{}' \text{aires de } R_n' \leqslant \text{aire de } R.$$

En comparant (2), (3) et (4), on trouve finalement

$$(5)\qquad \left|\int\limits_{C(R)} f(z)\,dz\right| < K_5(\sigma)\cdot\varepsilon\cdot \text{aire de } R,$$

où $K_5(\sigma)$ ne dépend que de σ.

On peut prendre le nombre ε arbitrairement petit, indépendamment du nombre σ. Par suite, en vertu de (5),

$$\int\limits_{C(R)} f(z)\,dz = 0.$$

La proposition de la fin du § 2 est donc complètement démontrée, ce qui achève la démonstration du théorème énoncé à la fin du § 1, p. 60.