En modifiant un peu la démonstration du théorème de Novikoff-Liapounoff donnée par M. Novikoff[1]) ou bien celle donnée par M. Liapounoff[2]), nous obtenons ce

Théorème II: *Si* $S^i\{E^i_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ *est une suite infinie de systèmes déterminants* (donnés quelconques) *satisfaisant à la condition C et tels que* $\prod_{i=1}^{\infty} N(S^i)=0$, *il existe une suite infinie d'ensembles* $P^i \epsilon \mathfrak{B}(S^i)$ $(i=1,2,3,\ldots)$, *tels que* $N(S^i)\subset P^i$ *pour* $i=1,2,3,\ldots$ *et que* $\prod_{i=1}^{\infty} P^i=0$.

¹) *C. R. Ac. Sc. URSS* t. III (1934), p. 145—148.
²) l. c., t. II, p. 276—280.

Les groupes de Betti d'un complexe infini.

Par

Eduard Čech (Brno).

1. Soit un complexe infini K. Pour $n=0,1,2,\ldots$, désignons par σ_i^n $(i=1,2,3,\ldots)$ les n-simplexes de K, ces simplexes étant orientés d'une manière quelconque, mais fixe.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abélien donné. La loi de composition dans $\mathfrak{G}$ (et dans tous les autres groupes envisagés dans cette Note, qui sont tous abéliens) sera considérée comme *addition*. Appelons $(n, \mathfrak{G})$-*chaîne* chaque forme linéaire

$$C^n=\sum_i g_i\,\sigma_i^n, \qquad g_i \epsilon \mathfrak{G} \tag{1}$$

n'ayant qu'un nombre fini de coefficients g_i différents de zéro ¹).

En posant

$$\sum_i g_i\,\sigma_i^n+\sum_i g_i'\,\sigma_i^n=\sum_i (g_i+g_i')\,\sigma_i^n,$$

les $(n, \mathfrak{G})$-chaînes constituent un groupe abélien qui soit désigné par $\boldsymbol{C}^n$.

La lettre $\mathfrak{C}$ désigne le groupe abélien additif de tous les nombres entiers rationnels. Posons $\boldsymbol{C}^n(\mathfrak{C})=\boldsymbol{C}^n$. Si $C^n=\sum_i a_i\,\sigma_i^n$ est une $(n, \mathfrak{C})$-chaîne et si $g \epsilon \mathfrak{G}$, alors $\sum_i a_i\, g\cdot\sigma_i^n$ est une $(n, \mathfrak{G})$-chaîne désignée par $g\,C^n$.

La *frontière* $F\,C^0$ d'une $(0, \mathfrak{G})$-chaîne est égale à zéro. Pour $n>0$, la *frontière* $F\sigma_i^n$ du n-simplexe σ_i^n est une $(n-1, \mathfrak{C})$-chaîne

$$F\sigma_i^n=\sum_k \eta_{ik}^n\,\sigma_k^{n-1}.$$

¹) En général, chaque somme considérée dans cette Note n'a qu'un nombre fini de termes différents de zéro.

Il est inutile de rappeler ici la forme précise des entiers η_{ik}^n; seulement, nous ferons usage du fait connu que l'on a pour $n \geqq 2$

$$\sum_k \eta_i^n \eta_{kh}^{n-1} = 0 \qquad (i, h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Pour $n > 0$, la *frontière* FC^n de la $(n, \mathfrak{G})$-chaîne (1) est la $(n-1, \mathfrak{G})$-chaîne

$$FC^n = \sum_i g_i \cdot F\sigma_i^n.$$

En vertu de (2) on a pour $n \geqq 2$ et pour chaque $(n, \mathfrak{G})$-chaîne C^n

$$FFC^n = 0, \tag{3}$$

ce qui est évident pour $n = 1$.

La $(n, \mathfrak{G})$-chaîne C^n s'appelle un $(n, \mathfrak{G})$-*cycle*, si $FC^n = 0$. Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles constituent un sous-groupe C^n qui sera désigné par $\Gamma^n(\mathfrak{G})$. Pour chaque $C^{n+1} \epsilon\, C^{n+1}(\mathfrak{G})$, FC^{n+1} est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle en vertu de (3). Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles ayant la forme FC^{n+1} sont dits *homologues à zéro* (~ 0); ils constituent un sous-groupe du groupe $\Gamma^n(\mathfrak{G})$ qui sera désigné par $\boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G})$. Le groupe-quotient (Faktorgruppe)

$$\Gamma^n(\mathfrak{G})/\boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G})$$

sera désigné par $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$; c'est le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti relatif au domaine de coefficients* $\mathfrak{G}$. Posons

$$\Gamma^n(\mathfrak{C}) = \Gamma^n, \quad \boldsymbol{H}^n(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{H}^n, \quad \boldsymbol{B}^n(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{B}^n.$$

$\boldsymbol{B}^n$ est le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti ordinaire*. Les éléments B^n de $\boldsymbol{B}^n$ dont l'ordre est fini, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un $c \epsilon \mathfrak{C}$ tel que $c > 0$, $cB^n = 0$, constituent un sous-groupe du groupe $\boldsymbol{B}^n$, appelé le $n^{\text{ème}}$ *groupe de torsion;* il sera désigné par $\boldsymbol{T}^n$. On sait que $\boldsymbol{T}^0 = 0$; posons aussi $\boldsymbol{T}^{-1} = 0$. Si la dimension m du complexe K est finie, on a $\boldsymbol{B}^n = 0$ pour $n > m$ et $\boldsymbol{T}^n = 0$ pour $n \geqq m$.

Si les groupes abéliens $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ sont isomorphes, les groupes $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_1)$ et $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_2)$ le sont aussi. En particulier, si $\mathfrak{G}$ est un groupe cyclique d'ordre infini, le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe à $\boldsymbol{B}^n$. Si le groupe abélien $\mathfrak{G}$ est somme directe de deux sous-groupes $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$, alors le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe à la somme directe des deux groupes $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_1)$ et $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_2)$.

2. M. Alexander a considéré [1]) le cas où (1) *le complexe K est fini,* (2) *$\mathfrak{G}$ est un groupe cyclique d'ordre fini.* Il a montré que, dans ces hypothèses, la *structure* [2]) *du groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celles des trois groupes $\mathfrak{G}$, $\boldsymbol{B}^n$ et $\boldsymbol{T}^{n-1}$.* Il est facile d'éliminer l'hypothèse (2) du raisonnement de M. Alexander. Or, l'hypothèse (1) y est appliquée tout-à-fait essentiellement en faisant usage de la réduction d'une matrice à coefficients entiers à une forme canonique. Néanmoins, je vais montrer que le résultat de M. Alexander est complètement général, toutes les deux hypothèses (1) et (2) y étant superflues.

Commençons par une définition. Si Γ_i^n sont des $(n, \mathfrak{C})$-cycles (en nombre fini) et si $g_i \epsilon \mathfrak{G}$, alors $\sum_i g_i \Gamma_i^n$ est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle. Appelons *pur* chaque $(n, \mathfrak{G})$-cycle de la forme

$$\sum_i g_i \Gamma_i^n, \qquad g_i \epsilon \mathfrak{G}, \quad \Gamma_i^n \epsilon \Gamma^n.$$

Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles purs constituent un groupe abélien qui sera désigné par $\Gamma_1^n(\mathfrak{G})$. Evidemment

$$\Gamma^n(\mathfrak{G}) \supset \Gamma_1^n(\mathfrak{G}) \supset \boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G}).$$

Le groupe-quotient

$$\Gamma_1^n(\mathfrak{G})/\boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G})$$

sera désigné par $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ et appelé le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti pur, relatif au domaine de coefficients* $\mathfrak{G}$.

Ceci étant, je démontre dans cette Note les trois théorèmes suivants:

Théorème I. *Il existe un sous-groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ du groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ — appellons-le le $n^{\text{ème}}$ groupe de Betti complémentaire relatif au domaine de coefficients $\mathfrak{G}$ — tel que le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est la somme directe des deux sous-groupes $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ et $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$.* Le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ n'est pas univoquement déterminé, mais sa structure est déterminée sans ambiguïté, $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ étant isomorphe au groupe quotient

$$\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})/\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G}).$$

[1]) *Combinatorial Analysis Situs*, Trans. Amer. Math. 28, 301—329 (1926). Cf. aussi A. W. Tucker, *Modular homology characters,* Proc. Nat. Acad. Sc. 18, 467—471 (1932).

[2]) Deux groupes ont la même structure s'ils sont isomorphes.

Réciproquement, la structure de $B^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $B_1^n(\mathfrak{G})$ et $B_2^n(\mathfrak{G})$.

Théorème II. *La structure du groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $\mathfrak{G}$ et B^n. Plus précisément: Supposons que le groupe B^n soit donné par les éléments générateurs α $(i=1,2,3,\ldots,$ évent. ad inf.$)$ et par les relations définissantes $\sum_i a_{ik}\alpha_i=0$ $(k=1,2,3,\ldots,$ évent. ad inf.$)$* [1] *où $a_{ik}\in\mathfrak{E}$ et, pour chaque k, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de i telles que $a_{ik}\neq 0$. On obtient un groupe X isomorphe au groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$ de la manière suivante. Attachons à chaque i un symbole x_i. Les éléments de X sont les symboles $\sum_i g_i x_i$ n'ayant qu'un nombre fini de coefficients $g_i\in\mathfrak{G}$ différents de zéro. L'addition dans X est définie par*

$$\sum_i g_i x_i+\sum_i g_i' x_i=\sum_i (g_i+g_i')\, x_i$$

et il y a des relations définissantes

$$\sum_i a_{ik}\, g\cdot x_i=0 \quad pour \quad g\in\mathfrak{G}\ (k=1,2,3\ \ldots).$$

Théorème III. *La structure du groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $\mathfrak{G}$ et T^{n-1} Plus précisément. Supposons que le groupe T^{n-1} soit donné par les éléments générateurs β_i $(i=1,2,3,\ldots,$ évent. ad inf.$)$ et par les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$ $(k=1,2,3,\ldots,$ évent. ad inf.$)$, où $b_{ik}\in\mathfrak{E}$ et, pour chaque k, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de i telles que $b_{ik}\neq 0$. On obtient un groupe Y isomorphe au groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ de la manière suivante. Attachons à chaque k un symbole y_k. Les éléments de Y sont les symboles $\sum_k g_k y_k$ n'ayant qu'un nombre fini de coefficients $g_k\in\mathfrak{G}$ différents de zéro, ces coefficients g_k ne sont pas arbitraires, mais liés par les relations*

$$\sum_k b_{ik}\, g_k=0 \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

[1]) Cela veut dire que les éléments de B^n ont la forme $\sum_i c_i\alpha_i$, où ceux des coefficients $c_i\in\mathfrak{E}$ qui sont $\neq 0$ sont en nombre fini, que $\sum_i c_i\alpha_i+\sum_i c_i'\alpha_i=$ $=\sum_i (c_i+c_i')\,\alpha_i$, enfin que $\sum_i c_i\alpha_i=0$ si et seulement s'il existe des entiers b_k en nombre fini tels que $c_i=\sum_k b_k a_{ik}$ pour $i=1,2,3,\ldots$ Dans le cas où il n'y a aucune relation définissante, on dit que les éléments générateurs α_i sont *linéairement indépendants*.

L'addition dans Y est définie par

$$\sum_k g_k y_k+\sum_k g_k' y_k+\sum_k (g_k+g_k')\, y_k$$

et il y a des relations définissantes

$$\sum_k c_k\, g\cdot y_k=0 \quad pour\ chaque \quad g\in\mathfrak{G},$$

où c_k sont des entiers (dont ceux qui sont $\neq 0$ sont en nombre fini) tels que

$$\sum_k b_{ik}\, c_k=0 \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

3. Les démonstrations sons fondées sur le

Lemme. *Supposons que le groupe abélien $\mathfrak{G}$ possède un nombre fini ou dénombrable de générateurs linéairement indépendants. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Alors $\mathfrak{H}$ possède un système fini ou dénombrable de générateurs linéairement indépendants*

Démonstration. Soient g_i $(i=1,2,3,\ldots,$ évent. ad inf.$)$ les générateurs donnés linéairement indépendants du groupe $\mathfrak{G}$. Posons

$$h_1=\sum_{\nu=1}^{\lambda_1} a_{1\nu}\, g_\nu \qquad (a_{1\nu}\in\mathfrak{E}),$$

en choisissant λ_1 et $a_{1\nu}$ de manière que (1) $h_1\in\mathfrak{H}$, (2) $\lambda_1=$ minimum, (3) $a_{1\nu_1}>0$, $a_{1\nu_1}=$ minimum. Supposons que l'on, ait déjà déterminé les indices $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_i$, ainsi que les éléments $h_1, h_2, \ldots, h_i$ de $\mathfrak{H}$. Alors posons

$$h_{i+1}=\sum_{\nu=1}^{\lambda_{i+1}} a_{i+1,\nu}\, g_\nu \qquad (a_{i+1}\in\mathfrak{E}),$$

en choisissant λ_{i+1} et $a_{i+1,\nu}$ de manière que (1) $h_{i+1}\in\mathfrak{H}$, (2) $\lambda_{i+1}>\lambda_i$, $\lambda_{i+1}=$ minimum, (3) $a_{i+1,\lambda_{i+1}}>0$, $a_{i+1,\lambda_{i+1}}=$ minimum. En procédant de cette manière, on obtient une suite finie ou dénombrable $h_1, h_2, h_3, \ldots$ Posons $V(0)=0$; si $h\in\mathfrak{H}$ et $h\neq 0$, soit $h=\sum b_\nu g_\nu$; le plus haut indice ν tel que $b_\nu>0$ a la forme $\nu=\lambda_i$; posons $V(h)=i$.

Les h_i sont linéairement indépendants. En effet, si $h=\sum_{\mu=1}^{i} c_\mu h_\mu$, $c_\mu\in\mathfrak{E}$ et $c_i\neq 0$, on a $h=\sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b_\nu g_\nu$ et $b_\nu\in\mathfrak{E}$, $b_{\lambda_i}=c_i\, a_{i\lambda_i}\neq 0$, d'où $h\neq 0$.

Chaque élément h du groupe $\mathfrak{H}$ a la forme $\sum_{\mu=1}^{i} c_\mu h_\nu$, $c_\mu \in \mathfrak{E}$. C'est évident si $V(h)=0$. Soit $V(h)=i>0$ et supposons que l'énoncé soit vrai pour chaque $h'\in\mathfrak{H}$ tel que $V(h')<i$. On a $h=\sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b_\nu g_\nu$. Déterminons les entiers q et r de manière que $b_{\lambda_i}=q\,a_{i,\lambda_i}+r$, $0\leqq r<a_{i,\lambda_i}$. On a $h-q h_i=\sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b'_\nu g_\nu$, $b'_\nu\in\mathfrak{E}$, $0\leqq b'_{\nu_i}=r<a_{i,\lambda_i}$, d'où $b'_{\nu_i}=0$ d'après le choix de a_{i,λ_i}. Donc $V(h-q h_i)<i$, d'où $h-q h_i=\sum_\mu c_\mu h_\mu$, $h=q h_i+\sum_\mu c_\mu h_\mu$.

4. Démonstration du théorème I. Pour $n=0$ on a évidemment $\boldsymbol{B}_1^0(\mathfrak{G})=\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{G})$, $\boldsymbol{B}_2^0(\mathfrak{G})=0$. Soit $n>0$. Les $(n-1, \mathfrak{E})$-chaînes $1\cdot\sigma_i^{n-1}$ constituant évidemment un système fini ou dénombrable d'éléments générateurs lin. indépendants du groupe $\boldsymbol{C}^{n-1}$, il résulte du lemme que le sous-groupe $\boldsymbol{H}^{n-1}$ du groupe $\boldsymbol{C}^{n-1}$ possède un système fini ou dénombrable d'éléments générateurs h_k ($k=1,2,3,\ldots$, évent. ad inf.) lin. indépendants. Puisque $h_k\in\boldsymbol{H}^{n-1}$, il existe des $(n, \mathfrak{E})$-chaînes D_k^n telles que $F D_k^n=h_k$. Les chaînes D_k^n constituent un système de générateurs d'un sous-groupe — désignons-le par $\boldsymbol{D}^n$ — du groupe $\boldsymbol{C}^n$.

Soit $C^n\in\boldsymbol{C}^n$; alors $F C^n\in\boldsymbol{H}^{n-1}$. Donc il existe des nombres $a_k\in\mathfrak{E}$ (en nombre fini) tels que $F C^n=\sum_k a_k h_k$, de manière que $\Gamma^n=C^n-\sum_k a_h D_k^n\in\boldsymbol{\Gamma}^n$. D'autre part, soit $\Gamma^n\in\boldsymbol{\Gamma}^n$, $D^n\in\boldsymbol{D}^n$, $\Gamma^n+D^n=0$. Il en résulte que $F D^n=F(\Gamma^n+D^n)=0$. Or on a $D^n=\sum_k a_k D_k^n$, d'où $\sum_k a_k h_k=F D^n=0$, donc $a_k=0$ et par suite $D^n=0$ et $\Gamma^n=0$. Donc le groupe $\boldsymbol{C}^n$ est somme directe de $\boldsymbol{\Gamma}^n$ et de $\boldsymbol{D}^n$. On en déduit sans peine que le groupe $\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{G})$ est somme directe du groupe $\boldsymbol{\Gamma}_1^n(\mathfrak{G})$ et du groupe $\boldsymbol{\Gamma}_2^n(\mathfrak{G})$, ce dernier étant défini comme l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{G})$-cycles de la forme $\sum_k g_k D_k^n$, $g_k\in\mathfrak{G}$. Il en résulte aisément que le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est somme directe du groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ et d'un groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ isomorphe au groupe $\boldsymbol{\Gamma}_2^n(\mathfrak{G})$.

5. Démonstration du théorème II. Supposons que le groupe soit donné par les générateurs α_i ($i=1,2,3,\ldots$, évent. ad inf.) et par les relations définissantes $\sum_i a_{ik}\alpha_i=0$ ($k=1,2,3,\ldots$, évent. ad inf.). Autrement dit: (1) il existe des $(n, \mathfrak{E})$-cycles Γ_i^n tels que pour chaque

$(n, \mathfrak{G})$-cycle Γ^n on ait une homologie de la forme $\Gamma^n-\sum_i b_i\Gamma_i^n\sim 0$, (2) on a $\sum_i b_i\Gamma_i^n\sim 0$ si et seulement s'il existe des entiers c_k (en nombre fini) tels que $b_i=\sum_k a_{ik}c_k$. Il en résulte que les éléments du groupe $\boldsymbol{\Gamma}_1^n(\mathfrak{G})$ ont la forme $\sum_i g_i\Gamma_i^n$, $g_i\in\mathfrak{G}$, et que l'on a $\sum_i g_i\Gamma_i^n\sim 0$ si et seulement s'il existe des $g'_k\in\mathfrak{G}$ (en nombre fini) tels que $g_i=\sum_k a_{ik}g'_k$. Or ceci implique la validité du théorème II.

6. Démonstration du théorème III. Pour $n=0$ on a $\boldsymbol{B}_2^0(\mathfrak{G})=0$, $\boldsymbol{T}^{-1}=0$. Soit $n>0$. Supposons que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ soit donné par les générateurs β_i ($i=1,2,3,\ldots$, évent. ad inf.) et par les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$ ($k=1,2,3,\ldots$, évent. ad inf.). Le théorème III déduit des générateurs β_i et des relations $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$ un groupe $\boldsymbol{Y}$ et affirme l'isomorphie des deux groupes $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ et $\boldsymbol{Y}$. Nous allons d'abord prouver que la structure du groupe $\boldsymbol{Y}$ est déterminée sans ambiguïté par celle des groupes $\mathfrak{G}$ et $\boldsymbol{T}^{n-1}$.

Supposons d'abord que l'on ait choisi pour les générateurs β_i le système de *tous* les éléments du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$. Quant aux relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$, supposons les choisies d'une manière quelconque (mais fixe). Si l'on ajoute aux relations $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$ *toutes* les autres relations qui existent entre les β_i, le groupe $\boldsymbol{Y}$ doit être remplacé par un nouveau groupe $\boldsymbol{Y}'$. Les éléments de $\boldsymbol{Y}$ étaient de la forme $\sum_k g_k y_k$, les $g_k\in\mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik}g_k=0$ pour $i=1,2,3,\ldots$; on avait aussi les relations définissantes $\sum_k c_k g\cdot y_k=0$ ($g\in\mathfrak{G}$), où les c_k étaient des entiers tels que $\sum_k b_{ik}c_k=0$ pour $i=1,2,3,\ldots$. Les $\sum_i b_{ik}\beta_i=0$ constituant un système de relations définissantes pour les générateurs β_i du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$, les autres relations qui existent entre les β_i ont la forme $\sum_{ik} v_{hk}b_{ik}\beta_i=0$, $v_{hk}\in\mathfrak{E}$ (pour une valeur donnée de h, les $v_{hk}\neq 0$ sont en nombre fini). Le éléments de $\boldsymbol{Y}'$ ont la forme $\sum_k g_k y_k+\sum_h g'_h y'_h=0$, les $g_k\in\mathfrak{G}$ et les $g'_h\in\mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik}(g_k+\sum_h v_{hk}g'_h)=0$; on a aussi les relations définissantes $\sum c_h g\cdot y_k+\sum c'_h g\cdot y'_h=0$ ($g\in\mathfrak{G}$), où les entiers c_k et c'_h

sont tels que $\sum_k b_{ik}(c_k + \sum_h v_{hk} c'_h) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$. En posant

$$\varphi\left(\sum_k g_k y_k + \sum_h g'_h y'_h\right) = \sum_k \left(g_k + \sum_h v_{hk} g'_h\right) y_k,$$

on reconnait sans peine que φ est une correspondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes $\boldsymbol{Y}'$ et $\boldsymbol{Y}$.

Supposons maintenant que les générateurs β_i et les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ soient choisies arbitrairement. Pour achever la démonstration du fait que la structure du groupe $\boldsymbol{Y}$ ne dépend que de celle de $\mathfrak{G}$ et de $\boldsymbol{T}^{n-1}$, il suffit de prouver que, si l'on ajoute aux générateurs β_i tous les autres éléments $\beta'_j = \sum_i u_{ij}\beta_i$ du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$, en ajoutant simultanément aux $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ les nouvelles relations $\beta'_j - \sum_i u_{ij}\beta_i = 0$, le groupe $\boldsymbol{Y}'$ correspondant est identique à $\boldsymbol{Y}$. Les éléments du groupe $\boldsymbol{Y}'$ ont la forme $\sum_k g_k y_k + \sum_j g'_j y'_j$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ et les $g'_j \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k - \sum_j u_{ij} g'_j = 0$, $g'_j = 0$; on a aussi les relations définissantes $\sum_k c_k g \cdot y_k + \sum_j c'_j g \cdot y'_j = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k et c'_j étant tels que $\sum_k b_{ik} c_k - \sum_j u_{ij} c'_j = 0$, $c'_j = 0$. Donc les éléments de $\boldsymbol{Y}'$ sont simplement $\sum_k g_k y_k$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k = 0$, et les relations définissantes sont $\sum_k c_k g \cdot y_k = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k étant tels que $\sum_k b_{ik} c_k = 0$. Les groupes $\boldsymbol{Y}'$ et $\boldsymbol{Y}$ sont par conséquent identiques l'un à l'autre.

Ceci étant, il suffit de prouver la validité du théorème III en choisissant d'une manière convenable les générateurs et les relations définissantes du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$.

Comme les $(n-1, \mathfrak{E})$-chaînes $1 \cdot \sigma_i^{n-1}$ constituent un système fini ou dénombrable de générateurs lin. indépendants du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$, il résulte du lemme qu'il existe une suite finie ou infinie de générateurs C_i^{n-1} lin. indépendants du groupe $\boldsymbol{L}^{n-1} \subset \boldsymbol{C}^{n-1}$, constitué par tous les $(n-1, \mathfrak{E})$-cycles dont un certain multiple est homologue à zéro. L'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice i $(1, 2, 3, \dots,$ évent. ad inf.), il existe pour chaque k des entiers b_{ik} tels que (1) $b_{ik} = 0$ pour $i > k$, (2) $b_{kk} > 0$, (3) $\sum_i b_{ik} C_i^{n-1} \sim 0$. Choisissons les entiers b_{ik} de manière que la valeur de b_{kk} soit minima,

et posons $h_k = \sum_i b_{ik} C_i^{n-1}$ de manière que $h_k \in \boldsymbol{H}^{n-1}$. Or les h_k ont été déduits des C_i^{n-1} précisément de la même manière que les h_i des g_i dans la démonstration du lemme: il suffit d'y remplacer les deux groupes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ respectivement par $\boldsymbol{L}^{n-1}$ et par $\boldsymbol{H}^{n-1}$ [1]). Il en résulte que les h_k constituent un système de générateurs linéairement indépendants du groupe $\boldsymbol{H}^{n-1}$.

Comme

$$\boldsymbol{T}^{n-1} = \boldsymbol{L}^{n-1}/\boldsymbol{H}^{n-1},$$

aux C_i^{n-1} correspondent des générateurs β_i du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$, les relations définissantes étant $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$. Les éléments du groupe $\boldsymbol{Y}$ ont la forme $\sum_k g_k y_k$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k = 0$ pour chaque i. On n'a $\sum_k g_k y_k = 0$ que si tous les g_k sont $= 0$; en effet, les relations définisssantes du groupe $\boldsymbol{Y}$ sont $\sum_k c_k g \cdot y_k = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k étant tels que (1) $c_k = 0$ à partir d'une certaine valeur de k, (2) $\sum_k b_{ik} c_k = 0$ pour chaque i; puisque $b_{ik} = 0$ pour $i > k$ et $b_{kk} > 0$, les conditions (1) et (2) entraînent que $c_k = 0$ pour chaque k.

D'autre part, d'après la démonstration du théorème 1, le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$, constitué pas tous les $(n, \mathfrak{G})$-cycles de la forme $\sum_k g_k D_k^n$, les $D_k^n \in \boldsymbol{C}^n$ étant choisis de manière que $F D_k^n = h_k$. Les h_k étant lin. indépendants, les D_k^n le sont aussi; il en résulte sans peine que l'on ne peut avoir $\sum_k g_k D_k^n = 0$ que si $g_1 = g_2 = \dots = 0$. Or, on a $F \sum_k g_k D_k^n = \sum_k g_k h_k = \sum_{ik} b_{ik} g_k C_i^{n-1}$. Les C_i^{n-1} etant lin. indépendants, il en résulte que $\sum_k g_k D_k^n$ est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle si et seulement si $\sum_k b_{ik} g_k = 0$ pour chaque i. Donc les deux groupes $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$ et $\boldsymbol{Y}$ sont isomorphes. Les deux groupes $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ et $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$ étant aussi isomorphes, le théorème III est démontré.

7. **Remarques.** I. Supposons que le groupe $\boldsymbol{B}^n$ possède un système *fini* de générateurs (ce qui a lieu en particulier si le complexe K est fini). Pour $\mu \in \mathfrak{E}$, $\mu > 0$ désignons par $\mathfrak{G}(\mu)$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ constitué par tous les éléments de la forme μg $(g \in \mathfrak{G})$. On sait que le groupe $\boldsymbol{B}^n$ possède un nombre fini de générateurs α

[1]) Dans le cas présent, on a évidemment $\lambda_i = i$ dans la démonstration citée.

$(1 \leqq i \leqq m)$ tels que les relations définissantes aient la forme $\mu_i \alpha_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, où $\mu_i \in \mathfrak{C}$, $\mu_i \geqq 0$. On déduit aisément du théorème II que le groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est somme directe de m groupes $\boldsymbol{X}_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$, où (1) si $\mu_i = 0$, le groupe $\boldsymbol{X}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{G}$, (2) si $\mu_i > 0$, le groupe $\boldsymbol{X}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}(\mu_i)$.

II. Supposons que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ possède un nombre *fini* de générateurs (ce qui a lieu en particulier si le complexe K est fini). Pour $\mu \in \mathfrak{C}$, $\mu > 0$ désignons par $\mathfrak{G}[\mu]$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ constitué par tous les éléments $g \in \mathfrak{G}$ tels que $\mu g = 0$. On sait que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ possède un nombre fini de générateurs β_i $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que les relations définissantes aient la forme $\mu_i \beta_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ où $\mu_i \in \mathfrak{C}$, $\mu_i > 0$. On déduit aisément du théorème III que le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est somme directe de m groupes $\boldsymbol{Y}_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$, le groupe $\boldsymbol{Y}_i$ étant isomorphe à $\mathfrak{G}[\mu_i]$.

III. *Supposons que le groupe $\mathfrak{G}$ jouisse de la propriété suivante: $g \in \mathfrak{G}$ et $\mu \in \mathfrak{G}$, $\mu > 0$ étant choisis arbitrairement, il existe toujours un $g' \in \mathfrak{G}$ tel que $g = \mu g'$. Alors la structure du groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celles des deux groupes $\mathfrak{G}$ et $\boldsymbol{B}^n/\boldsymbol{T}^n$. Plus précisément, le groupe $\mathfrak{G}$ ayant la propriété énoncée, le groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\boldsymbol{X}^*$ qui s'obtient du groupe $\boldsymbol{B}^n/\boldsymbol{T}^n$ de la même manière que le groupe $\boldsymbol{X}$ a été obtenu du groupe $\boldsymbol{B}^n$ au théorème* II.

Le plus important exemple d'un groupe $\mathfrak{G}$ jouissant de la propriété envisagée est le groupe additif de nombres réels réduits mod. 1, jouant un rôle important dans les derniers travaux de M. Pontrjagin.

Démonstration. On voit sans peine que l'on peut choisir un système de générateurs et de relations définissantes du groupe $\boldsymbol{B}^n$ de la manière suivante: (1) les générateurs sont α_i $(i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) et α'_j $(j = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.), (2) les relations définissantes sont $\sum\limits_i a_{ik}\alpha_i + \sum\limits_j a'_{jk}\alpha'_j = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) et $\sum\limits_j u_{jh}\alpha'_j = 0$ (l'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice g), (3) les α'_i constituent un système de générateurs du groupe $\boldsymbol{T}^n$ et les $\sum\limits_j u_{jh}\alpha'_j = 0$ constituent les relations définissantes du groupe $\boldsymbol{T}^n$, (4) $u_{jh} = 0$ pour $j > h$, $u_{hh} > 0$. Evidemment, il existe un système de générateurs α_i^* du groupe $\boldsymbol{B}^n/\boldsymbol{T}^n$ tel que les relations définissantes sont

$\sum\limits_i a_{ik}\alpha_i^* = 0$. Les éléments du groupe $\boldsymbol{X}$ sont $\sum\limits_i g_i x_i + \sum\limits_j g'_j x'_j$ $(g_i \in \mathfrak{G}, g'_j \in \mathfrak{G})$ et les relations définissantes sont $\sum\limits_i a_{ik} g \cdot x_i + \sum\limits_j a'_{jk} g \cdot x'_j = 0$, $\sum\limits_j u_{jh} g \cdot x'_j = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$. Les éléments du groupe $\boldsymbol{X}^*$ sont $\sum\limits_i g_i x'_i$ $(g_i \in \mathfrak{G})$ et les relations définissantes sont $\sum\limits_i a_{ik} g \cdot x_i^* = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$.

Considérons les éléments X' de $\boldsymbol{X}$ ayant la forme particulière $X' = \sum\limits_j g'_j x'_j$ $(g'_j \in \mathfrak{G})$. Posons $f(X') = 0$ si tous les g'_j sont égaux à zéro; dans le cas contraire, soit $f(X')$ égal au plus grand indice j tel que $g'_j \neq 0$. Nous allons prouver que $X' = 0$. C'est évident pour $f(X') = 0$; supposons le vrai pour $f(X') < m$ et considérons un élément $X' = \sum\limits_j g'_j x'_j$ tel que $f(X') = m$. Comme $u_{mm} > 0$, il existe un élément $g \in \mathfrak{G}$ tel que $g'_m = u_{mm} g$. Or on a $\sum\limits_j u_{jm} g \cdot x'_j = 0$, d'où $X' = X'' = \sum\limits_j g'_j x'_j - \sum\limits_j u_{jm} g \cdot x'_j$. Puisque $u_{mm} g = g'_m$, $u_{jm} = 0$ pour $j > m$, $f(X') = m$, on a $f(X'') < m$, d'où $X' = X'' = 0$.

Ceci étant, posons

$$\varphi\Big(\sum_i g_i x_i + \sum_j g'_j x'_j\Big) = \sum g_i x_i^*.$$

On vérifie sans peine que φ est une correspondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$. Or le groupe $\boldsymbol{X}$ est isomorphe au groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ en vertu du théorème II.

IV. *Le groupe abélien $\mathfrak{G}$ étant arbitraire, désignons par $\mathfrak{H}$ le sous-groupe constitué par tous les éléments de $\mathfrak{G}$ dont l'ordre est fini. Alors le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{H})$.*

En particulier, si tous les éléments de $\mathfrak{G}$ ont l'ordre infini (p. ex. si $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe du groupe additif de tous les nombres complexes), on a $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G}) = 0$.

Démonstration. On peut supposer (voir la démonstration du théoreme III, p. 40) que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ soit donné par les générateurs β $(i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) tels que les relations définissantes aient la forme $\sum\limits_i b_{ik}\beta_i = 0$ (l'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice i), où $b_{kk} > 0$, $b_{ik} = 0$ pour $i > k$. Nous avons vu que le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\boldsymbol{Y}$ constitué par tous les formes linéaires $\sum\limits_k g_k y_k$ dont les coefficients $g_k \in \mathfrak{G}$ sont tels que

$$\sum_k b_{ik} g_{ik} = 0; \tag{4}$$

on n'a $\sum_k g_k y_k = 0$ que si $g_k = 0$ pour chaque k. On doit seulement prouver que $g_k \in \mathfrak{H}$, c'est-à-dire que l'ordre de chaque g_k est fini. Or ceci résulte sans peine par recurrence des équations (4), en tenant compte des conditions $b_{kk} > 0$, $b_{ik} = 0$ pour $i > k$.

V. *Soit* $m \in \mathfrak{E}$, $m > 0$. *Supposons que le groupe* $\mathfrak{G}$ *soit tel que* $mg = 0$ *pour chaque* $g \in \mathfrak{G}$. *Alors la structure du groupe* $B^n(\mathfrak{G})$ *est complètement déterminée par celle des trois groupes* $\mathfrak{G}$, $B^n(\mathfrak{E}_m)$ *et* $B^{n-1}(\mathfrak{E}_m)$, *où* $\mathfrak{E}_m$ *désigne le groupe additif des nombres entiers réduits* mod. m. En effet, si le groupe $\mathfrak{G}$ jouit de la propriété énoncée, on voit sans peine que les théorèmes I, II et III restent vrais (avec la démonstration essentiellement la même) en remplaçant $\mathfrak{E}$ par $\mathfrak{E}_m$ [1]).

[1]) On doit remplacer $\mathfrak{E}$ par $\mathfrak{E}_m$ aussi dans la définition du groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$.

Zum Diagonalverfahren Cantors.

Von

A. Fraenkel (Jerusalem).

Wenn das erste und einzige mathematische Journal, das ganz der Mengenlehre und ihren Anwendungen gewidmet ist und auf dessen bisherige Geschichte die Mathematiker Polens mit berechtigtem Stolze blicken können, nach kurzer Zeit das Jubiläum des 25. Bandes feiert, so ist das vielleicht ein passender Anlaß, neben neuen Forschungen auch eine allgemeine und prinzipielle Betrachtung vorzulegen. Besonders wenn das behandelte Problem dasjenige ist, das von den meisten Mengentheoretikern und von fast allen Gegnern der Mengenlehre als der springende Punkt beim Aufbau der Mengenlehre und der Begründung des Aktual-Unendlichen betrachtet wird: das *Diagonalverfahren,* wie es Cantor zum Beweis der Ungleichung $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (Mächtigkeit der Potenzmenge), speziell also der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums verwendet hat [1]).

Gegen das Diagonalverfahren sind in den letzten Jahren eine Reihe von Angriffen gemacht worden, die es als bedeutungslos oder unbegründet hinstellen und damit (ich glaube: mit richtiger Konsequenz) die Mengenlehre in ihren Grundfesten erschüttert erklären. Unter den Angreifern befinden sich solche, über die man nicht wohl schweigend zur Tagesordnung übergehen kann, wie z. B. der auch erkenntnistheoretisch mit Erfolg hervorgetretene

[1]) Es genügt auf Cantors Arbeit *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (Jahresb. Deutschen Math. Ver. **1** [1892], 75—78; Gesammelte Abhandlungen [Berlin 1932], 278—270) zu verweisen und von seiner Arbeit von 1874 abzusehen, ebenso von den späteren Anwendungen des Diagonalverfahrens, besonders durch die Herren Zermelo und Sierpiński.