may be continued indefinitely. Thus there exist an ascending sequence $m_1, m_2, m_3, \ldots$ of natural numbers and a sequence $H_1, H_2, H_3, \ldots$ such that (1) H_1 is a finite subset of G_1 and, for each i greater than 1, H_i is a finite subset of $G_{m_{i-1}}$, (2) for each i, every piece of the set G_{m_i} which intersects g, without being embedded in it, is embedded in some piece of the set H_i. For each i, let W_i denote the set of all pieces of the set H_i that intersect g without being embedded in it. For each i, each piece of the set W_{i+1} is embedded in some piece of W_i. It follows, by Theorem 3 of Section II, that if K denotes the set of all points X such that X is common to all the point sets $W_1'^*$, $W_2'^*$, $W_3'^*, \ldots$ then K is compact. But K is identical with T.

It has been shown that a space satisfying Axioms 1_4, 2 and 3 is metric. Now Mr. F. B. Jones of the University of Texas has shown that every locally connected, connected and locally peripherally separable metric space is completely separable. He has also shown that in a space in which Axioms 1—4 of Point Set Theory and Theorem 1 of the present Section hold true, Theorem 2 of Chapter VI of Point Set Theory holds true. If a space satisfies Theorem 1 of this section then it is locally peripherally separable. From these results and results established in preceding sections of this paper it follows that if a space satisfies Axioms 1_6, 2, 3, 4, 5, 6 and 7 then it satisfies Axioms 1—5 of Point Set Theory.

V. Consequences of Axioms 1—7.

With the use of Axiom 1_7, by an argument similar to that employed to prove Theorem 1 of Section IV, it may be shown that every region is compact. With the help of results established in Chapter VII of Point Set Theory it follows that if a space satisfies Axioms 1—7 then the set of all points is topologically equivalent either to a plane or to the surface of a sphere.

Le théorème de Souslin dans la théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soient $S\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ et $T\{H_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ deux systèmes déterminants [1]) formés d'ensembles quelconques. Soient $N(S)$ et $N(T)$ respectivement leurs noyaux [1]). Nous dirons que *les systèmes S et T sont en relation R*, si pour toutes deux suites infinies d'indices naturels $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et $q_1, q_2, q_3, \ldots$ il existe un nombre naturel s tel que

$$E_{p_1,p_2,\ldots,p_s} H_{q_1,q_2,\ldots,q_s} = 0.$$

Désignons respectivement par $\mathfrak{B}(S)$ par $\mathfrak{B}(T)$ la famille de tous les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles qui forment respectivement les systèmes S et T et en effectuant avec eux un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions et de multiplications d'ensembles.

Théorème I: *Si deux systèmes déterminants S et T sont en relation R, il existe deux ensembles P et Q tels que $P \epsilon \mathfrak{B}(S)$, $Q \epsilon \mathfrak{B}(T)$, $PQ = 0$, $N(S) \subset P$ et $N(T) \subset Q$.*

Pour démontrer le théorème I (par voie apagogique, mais sans utiliser les nombres transfinis) il suffit de modifier légèrement la démonstration (basée sur une idée de M. Lusin) du théorème de Souslin publiée p. 265—267 du vol. XXI des *Fund. Math.*

Une autre démonstration (constructive, mais utilisant les nombres transfinis) peut être obtenue comme il suit.

[1]) Pour les définitions de ces notions voir p. ex. *Fund. Math.* XXI, p. 250 ou bien *Fund. Math.* VIII, p. 362.

En partant des ensembles $E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ et $H_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ respectivement formons (pour $\alpha<\Omega$) les ensembles S^α et T^α tout comme nous avons formé dans *Fund. Math.* VIII, p. 363 les ensembles S^α en partant des intervalles $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Tout comme l. c. p. 366 (formule (19)) nous obtenons les formules

$$(1)\qquad N(S)=\prod_{\alpha<\Omega} S^\alpha \quad \text{et} \quad N(T)=\prod_{\alpha<\Omega} T^\alpha.$$

Je dis que si les systèmes S et T sont en relation R, il existe un nombre ordinal μ, tel que $S^\mu T^\mu=0$.

Admettons qu'il n'en est pas ainsi: on a donc $S^\alpha T^\alpha \neq 0$ pour $\alpha<\Omega$. Il résulte donc de la définition des ensembles S^α et T^α qu'il existe, pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$, deux indices p_1^α et q_1^α tels que

$$E^\alpha_{p_1^\alpha} H^\alpha_{q_1^\alpha} \neq 0.$$

L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ étant indénombrable et l'ensemble de tous les systèmes de deux nombres naturels étant dénombrable, il en résulte qu'il existe deux indices p_1 et q_1 indépendants de α tels qu'on a

$$E^\alpha_{p_1} H^\alpha_{q_1} \neq 0$$

pour une infinité non dénombrable de nombres $\alpha<\Omega$, donc pour tous les $\alpha<\Omega$, puisque $E^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \subset E^\beta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ et $H^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \subset H^\beta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ pour $\alpha\geqslant\beta$ (cf. *Fund. Math.* VIII, p. 363, formule (6)). Or, on a

$$E^{\alpha+1}_{p_1}=E^\alpha_{p_1}\sum_{n=1}^{\infty} E^\alpha_{p_1,n} \quad \text{et} \quad H^{\alpha+1}_{q_1}=H^\alpha_{q_1}\sum_{n=1}^{\infty} H^\alpha_{q_1,n}$$

(l. c. formule (2)) et on en conclut, comme plus haut, qu'il existe deux indices p_2 et q_2 tels que

$$E^\alpha_{p_1,p_2} H^\alpha_{q_1,q_2} \neq 0 \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

En raisonnant ainsi de suite (et en faisant appel aux définitions des ensembles $E^{\alpha+1}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ et $H^{\alpha+1}_{q_1,q_2,\ldots,q_k}$), on arrive à deux suites infinies d'indices $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et $q_1, q_2, q_3, \ldots$ telles que

$$(2)\qquad E^\alpha_{p_1,p_2,\ldots,p_k} H^\alpha_{q_1,q_2,\ldots,q_k} \neq 0 \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega, \quad k=1,2,3,\ldots$$

Or, on a $E^\alpha_{p_1,p_2,\ldots,p_k} \subset E^0_{p_1,p_2,\ldots,p_k}=E_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ et $H^\alpha_{p_1,p_2,\ldots,p_k} \subset H_{q_1,q_2,\ldots,q_k}$: la formule (2) donne donc

$$E_{p_1,p_2,\ldots,p_k} H_{q_1,q_2,\ldots,q_k} \neq 0 \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots,$$

ce qui est impossible, les systèmes S et T étant en relation R.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un nombre ordinal $\mu<\Omega$ tel que

$$S^\mu T^\mu=0,$$

et il en résulte, d'après (1) et d'après la définitiou des ensembles S^α et T^α que les ensembles $P=S^\mu$ et $Q=T^\mu$ satisfont aux conditions de la thèse du théorème I, qui est ainsi démontré [1]).

Il est à remarquer que la structure de l'ensemble P, bien qu'il ne soit formé que des ensembles du système S (à l'aide d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'additions et des multiplications), dépend du système T (notamment du plus petit nombre ordinal μ, tel que $S^\mu T^\mu=0$).

Pour voir que le théorème de Souslin [2]) (dans l'énoncé de M. Lusin [3])) est un cas particulier de notre théorème, il suffit de remarquer que si S et T sont des systèmes déterminants réguliers formés d'ensembles fermés d'un espace topologique compact et si leurs noyaux $N(S)$ et $N(T)$ sont disjoints, les systèmes S et T sont (d'après le *Durchschnitts*satz de Cantor) en relation R et satisfont aux conditions de notre théorème.

Nous allons maintenant généraliser le théorème I au cas d'une infinité dénombrable de systèmes déterminants.

$S^i\{E^i_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ étant une suite infinie de systèmes déterminants, nous dirons qu'ils *satisfont à la condition C*, s'il existe pour toute suite infinie double de nombres naturels p^i_j $(i,j=1,2,3,\ldots)$ un nombre naturel s, tel que

$$\prod_{i=1}^{s} E^i_{p^i_1,p^i_2,\ldots,p^i_s}=0.$$

[1]) Il est à remarquer que les ensembles

$$P_1=\sum_{\alpha<\Omega}(S^\alpha-T^\alpha) \quad \text{et} \quad Q_1=\sum_{\alpha<\Omega}(T^\alpha-S^\alpha)$$

sont disjoints et contiennent respectivement $N(S)$ et $N(T)$. Mais, en général, on n'a pas $P_1 \in \mathfrak{B}(S)$ et $Q_1 \in \mathfrak{B}(T)$.

[2]) *C. R. Paris*, note du 8 janvier 1917.

[3]) Voir p. e. N. Lusin *Fund. Math.* t. X, p. 52.

En modifiant un peu la démonstration du théorème de Novikoff-Liapounoff donnée par M. Novikoff[1]) ou bien celle donnée par M. Liapounoff[2]), nous obtenons ce

Théorème II: *Si* $S^i\{E^i_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ *est une suite infinie de systèmes déterminants* (donnés quelconques) *satisfaisant à la condition* C *et tels que* $\prod_{i=1}^{\infty} N(S^i)=0$, *il existe une suite infinie d'ensembles* $P^i\,\epsilon\,\mathfrak{B}(S^i)$ $(i=1,2,3,\dots)$, *tels que* $N(S^i)\subset P^i$ *pour* $i=1,2,3,\dots$ *et que* $\prod_{i=1}^{\infty} P^i=0$.

[1]) *C. R. Ac. Sc. URSS* t. III (1934), p. 145—148.
[2]) l. c., t. II, p. 276—280.

Les groupes de Betti d'un complexe infini.

Par

Eduard Čech (Brno).

1. Soit un complexe infini K. Pour $n=0,1,2,\dots$, désignons par σ_i^n $(i=1,2,3,\dots)$ les n-simplexes de K, ces simplexes étant orientés d'une manière quelconque, mais fixe.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abélien donné. La loi de composition dans $\mathfrak{G}$ (et dans tous les autres groupes envisagés dans cette Note, qui sont tous abéliens) sera considérée comme *addition*. Appelons $(n,\mathfrak{G})$-*chaîne* chaque forme linéaire

$$C^n=\sum_i g_i\,\sigma_i^n,\qquad g_i\,\epsilon\,\mathfrak{G} \tag{1}$$

n'ayant qu'un nombre fini de coefficients g_i différents de zéro [1]).

En posant

$$\sum_i g_i\,\sigma_i^n+\sum_i g_i'\,\sigma_i^n=\sum_i (g_i+g_i')\,\sigma_i^n,$$

les $(n,\mathfrak{G})$-chaînes constituent un groupe abélien qui soit désigné par $\boldsymbol{C}^n$.

La lettre $\mathfrak{E}$ désigne le groupe abélien additif de tous les nombres entiers rationnels. Posons $\boldsymbol{C}^n(\mathfrak{E})=\boldsymbol{C}^n$. Si $C^n=\sum_i a_i\,\sigma_i^n$ est une $(n,\mathfrak{E})$-chaîne et si $g\,\epsilon\,\mathfrak{G}$, alors $\sum_i a_i\,g\cdot\sigma_i^n$ est une $(n,\mathfrak{G})$-chaîne désignée par $g\,C^n$.

La *frontière* $F\,C^0$ d'une $(0,\mathfrak{G})$-chaîne est égale à zéro. Pour $n>0$, la *frontière* $F\sigma_i^n$ du n-simplexe σ_i^n est une $(n-1,\mathfrak{E})$-chaîne

$$F\,\sigma_i^n=\sum_k \eta_{ik}^n\,\sigma_k^{n-1}.$$

[1]) En général, chaque somme considérée dans cette Note n'a qu'un nombre fini de termes différents de zéro.