Un continu irréductible à décomposition continue en tranches.

Par

Bronisław Knaster (Warszawa).

1. Problème. Comme on sait [1]), tout continu C irréductible entre deux points a et b présente une structure stratifiée, à savoir admet une *décomposition semicontinue linéaire* en sous-continus, dits *tranches*, et cette décomposition est univoquement déterminée comme „la plus fine“ [2]). Quand C n'admet pas de sous-continus indécomposables (sauf, tout au plus, qui y sont non-denses), toutes les tranches de C sont des sous-continus non-denses dans C *saturés*, et leur ensemble, en y considérant comme *tranche-limite* d'une suite des autres celle qui en contient le Lim sup, constitue un espace (dit *hyperespace* de cette décomposition) homéomorphe au segment de droite. De tels continus irréductibles C s'appellent *de type* λ; ils sont les seuls dont il sera question ici. En désignant leurs tranches par T_x où $0 \leqslant x \leqslant 1$, on peut écrire $C = \sum_{0\leqslant x\leqslant 1} T_x$ où $a \in T_0$, $b \in T_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ entraîne $\operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} T_{x_n} \subset T_{x_0}$. La dernière formule exprime la semi-continuité de la décomposition de C en tranches T_x [3]). Lorsque, au lieu de cette formule, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ entraîne $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_{x_n} = T_{x_0}$, la tranche T_{x_0} est dite *de continuité*. En d'autres termes [4]), les sous-ensembles fermés de C étant considérés comme des éléments de l'espace métrique (on le désigne par 2^C) qui s'en obtient, lorsqu'on assigne à tout couple d'ensembles leur ainsi dite *distance de Hausdorff* (c. à d. la borne supérieure des distances de tout point de l'un au point le plus proche de l'autre), le point x_0 est un *point de continuité* de la fonction T_x de x, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et transformant ce segment en une partie de 2^C.

Si toutes les tranches d'une décomposition semi-continue sont des tranches de continuité, la décomposition s'appelle *continue* [5]). Le cas le plus simple est celui de la décomposition du segment rectiligne $[a, b]$, où chaque tranche est une tranche de continuité et se réduit à un point. Mais on connait des continus C où les ensembles les plus variés de tranches ou même *toutes* les tranches sont des continus au sens strict (c. à d. composés de plus d'un point [6])), cependant leur décomposition en tranches n'est alors que semi-continue

La question s'impose donc: *existe-t-il un continu irréductible entre deux points, décomposable d'une manière continue en tranches dont aucune ne se réduit à un point?* [7]).

La réponse est positive. L'exemple $\mathcal{N}_S$, qui va être construit, aura pour point de départ celui désigné par $\mathcal{N}_V$, cité au renvoi [6]).

[1]) C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles II*, Fund. Math. X, p. 225—275. Pour les définitions des termes et notations de cette note voir aussi du même auteur *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwów 1933.

[2]) l. c. Fund. Math. X, p. 259.

[3]) Toute décomposition semi-continue d'un ensemble arbitraire C peut être considérée aussi comme opération inverse à la transformation de C par une fonction continue φ ayant pour l'ensemble des valeurs l'hyperespace de cette décomposition (dans notre cas le segment $[0, 1]$, parcouru par x). Notamment, T_x, considéré comme fonction de x, fait correspondre à toute valeur x de φ l'ensemble des $p \in C$ tels que $\varphi(p) = x$. Voir p. ex. C. Kuratowski, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XI, p. 169—185. Les valeurs de la fonction T_x sont évidemment des sous-ensembles fermés de C.

[4]) Cf. le renvoi précédent.

[5]) Il est à noter que la décomposition continue signifie aussi que la fonction φ, dont elle est l'inverse (voir le renvoi [3])), est une *transformation intérieure*, c. à d. qu'elle transforme des ensembles ouverts en ensembles ouverts (cf. S. Eilenberg, *Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. XXIV, p. 174, lemme).

[6]) Voir l. c. Fund. Math. X, p. 259 [3]) et 260, exemple C (il sera désigné ici par $\mathcal{N}_V$); cf. aussi W. A. Wilson, Amer. Journ. of Math. XLVIII (1926), p. 167, et P. Urysohn, Verhandl. Akad. Amsterdam XIII (1928), p. 99—103 (avec figure).

[7]) Ce problème a été posé aussi, bien qu'en termes différents, p. M. W. A. Wilson, l. c., p. 68, et je lui ai fait part en 1926 de la solution qui suit (cf. aussi Fund. Math. X, p. 260 et XI, p. 180, remarque II). Il l'estimait d'intérêt pour l'étude de la structure des continus en général (cf. à ce sujet plus loin p. 577, remarques); aujourd'hui elle semble aussi être en rapport avec certaines questions ouvertes sur les transformations intérieures (cf. renvoi [5])) et j'espère y revenir ailleurs.

2. Le continu $\mathfrak{N}_V$. Soient sur le plan cartésien Q le carré à sommets opposés $(0, 0)$ et $(1, 1)$, T_i et H_i $(i = 0, 1)$ respectivement ses cotés verticaux d'abscisse i et horizontaux d'ordonnée i. Soit N_i l'ensemble parfait non-dense des points de H_i dont les abscisses peuvent être écrites dans le système de numération à base 4 sans le chiffre $i+1$. Le continu $\mathfrak{N}_V$ peut être alors défini comme la somme des segments rectilignes unissant tout point p de N_i avec le seul ou les deux seuls points qui lui *correspondent* dans N_{1-i}, c. à d. dont l'abscisse s'obtient de celle de p en remplaçant dans son développement $(2-i)$ par $(i+1)$. On montre que $\mathfrak{N}_V$ est un continu irréductible à tranches terminales T_0 et T_1, c. à d. (irréductible entre tout couple de points a, b où $a \epsilon T_0$ et $b \epsilon T_1$) composé de deux familles de tranches:

1⁰ une famille dénombrable (dense) composée de deux suites (denses) de tranches $\{V_0^{(n)}\}$ et $\{V_1^{(n)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, en forme de Λ et V respectivement, dont les bouts gauche $g_i^{(n)}$ et droit $d_i^{(n)}$ $(i = 0, 1)$ sont des extrémités (gauche et droite) d'intervalles contigus à N_i (à savoir, l'abscisse de $g_i^{(n)}$ n'admettant sans chiffre $i+1$ que le développement quaternaire infini et celle de $d_i^{(n)}$ fini), tandis que leur sommet $s_i^{(n)}$ est un point de N_{1-i} (dont l'abscisse admet les deux développements sans chiffre $2-i$, à savoir les développements qui s'obtiennent de ceux de $g_i^{(n)}$ et $d_i^{(n)}$ en y remplaçant $2-i$ par $i+1$). J'appellerai *rationnelles* les tranches de cette famille (elles sont représentées sur la figure à gauche p. 575).

2⁰ $\mathfrak{c}$ tranches, limites des précédentes, en forme des segments rectilignes qui unissent des points de H_i dont l'abscisse n'admet qu'un seul développement quaternaire aux points correspondants de H_{1-i} (évidemment de même propriété). Je les appellerai *tranches irrationnelles*.

On peut supposer l'indice x de tranches T_x de $\mathfrak{N}_V$ parcourir le segment $[0, 1] = H_0$ dans l'ordre de succession de leurs points sur H_0.

Notamment, étant donnée une fonction continue $x = f(\xi)$, analogue à la fonction „en escalier" de M. Lebesgue, et qui transforme l'ensemble parfait N_0 en segment $[0, 1]$ par l'identification des extrémités de chaque intervalle contigu à N_0, on peut assigner à toute tranche de $\mathfrak{N}_V$ l'indice $x = f(\xi)$ où ξ désigne le point (quelconque) de cette tranche sur N_0.

Il est aisé alors de voir que toute tranche irrationnelle T_x de $\mathfrak{N}_V$ (en forme de segment) en est une tranche de continuité, comme ensemble-limite de toutes les suites T_{x_k} où $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, aussi bien de celles situées dans la partie gauche que de celles situées dans la partie droite, en lesquelles le segment T_x coupe le carré Q.

Par contre, *toute tranche rationnelle de $\mathfrak{N}_V$* (en forme de V ou Λ) *en est une tranche de discontinuité*, car elle coupe Q en trois parties, dont la moyenne est dépourvue des points de $\mathfrak{N}_V$, tandis que les deux latérales (les seules en lesquelles se décompose $\mathfrak{N}_V$) n'ont chacune pour ensemble-limite que la *moitié* correspondante de cette tranche — et non pas la tranche entière, comme c'était le cas des tranches irrationnelles.

3. La courbe τ_r. La construction de $\mathfrak{N}_S$ consistera précisément à remplacer chaque tranche rationnelle $T_r = V_i^{(n)}$ = *ligne brisée* $[g_i^{(n)}, s_i^{(n)}, d_i^{(n)}]$ par un continu τ_r qui, tout en coupant le carré Q en trois parties disposées dans lui comme les précédentes, serait *en sa totalité* l'ensemble-limite des tranches de $\mathfrak{N}_S$ aussi bien du côté gauche que du côté droit. Un tel continu τ_r est fourni p. ex. par un transformé homéomorphe de la courbe $y = \sin\frac{\pi}{x}$, $0 < x \leqslant 1$ complétée de son continu de condensation $-1 \leqslant y \leqslant +1$, $x = 0$, et supposé placé de manière que l'image de ce dernier dans τ_r soit, pareillement à $V_i^{(n)}$, une ligne polygonale finie $L_i^{(n)} = [\gamma_i^{(n)}, \ldots, \lambda_i^{(n)}, \ldots, \delta_i^{(n)}]$ unissant à travers l'intérieur de Q deux extrémités $\gamma_i^{(n)}$ et $\delta_i^{(n)}$ d'un intervalle contigu de l'ensemble parfait non-dense $\mathfrak{N}_S \cdot H_i$, pendant que la place de $s_i^{(n)}$ sera occupée par un point $\sigma_i^{(n)}$ de H_{1-i}, initial d'une ligne polygonale infinie (image de $y = \sin\frac{\pi}{x}$ pour $0 < x \leqslant 1$) ayant $L_i^{(n)}$ pour continu de condensation. Tout comme les tranches T_r rationnelles $V_i^{(n)}$ de $\mathfrak{N}_V$, un tel continu τ_r n'aura donc avec le contour de Q que les trois points $\gamma_i^{(n)}$, $\delta_i^{(n)}$ et $\sigma_i^{(n)}$ en commun et il coupera Q en trois parties: gauche, moyenne et droite; mais, contrairement à T_r, la frontière de la première, de même que celle de la troisième, contiendra le continu τ_r en entier, ce qui permettra de l'approcher en entier par toutes les suites $\{\tau_{x_n}\}$ (où $r = \lim_{n\to\infty} x_n$) de continus analogues, aussi bien pour $x_n < r$ que pour $x_n > r$. Or, c'est là une condition équivalente à la continuité d'une tranche.

4. Lemmes. Il y a cependant deux précautions à prendre:

1) la *distance* au sens de Hausdorff (voir plus haut, p. 569) de deux tranches rationnelles de cette forme devra tendre vers 0 uniformément avec la différence de leurs indices,

2) les lignes polygonales finies $L_i^{(n)}$ de chacune de ces tranches et, par suite, les régions $\Delta_i^{(n)}$ qu'elles délimitent avec le côté H_i de Q (régions moyennes) devront s'insinuer vers le côté H_{1-i} de façon que *l'écart* entre elles et ce dernier (c. à d. la borne inférieure des distances entre un point de $L_i^{(n)}$ et un point de H_{1-i}) tende vers 0 à mesure de la croissance de n.

La signification de ces conditions s'explique par deux lemmes qui suivent.

I. *Soit R un ensemble arbitraire dense dans le segment* $[0, 1]$. *Etant donnée dans un espace complet E une famille dénombrable d'ensembles fermés $\{T_r\}$ où $r \epsilon R$, assujettis aux conditions:*

(a) T_r (regardé comme fonction de r) *est une fonction uniformément continue sur R* (à savoir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que $|r - s| < \eta$ entraîne $\operatorname{dist}(T_r, T_s) < \varepsilon$, quel que soit le couple d'indices r, s),

(b) $\overline{\sum_{s<r} T_s} \cdot \overline{\sum_{s>r} T_s} \subset T_r$,

(c) $T_r \cdot T_s = 0$ *pour* $r \neq s$,

il existe pour tout x réel $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ *un ensemble* (nécessairement *fermé*) T_x *satisfaisant aux conditions:*

(α) *la décomposition de l'ensemble $\sum_x T_x$ en ensembles T_x est continue,*

(β) $\sum_x T_x = \overline{\sum_r T_r}$,

(γ) $T_{x'} \cdot T_{x''} = 0$ *pour* $x' \neq x''$.

Démonstration[8]). La fonction T_r, comme uniformément continue sur R selon (a) et dont les valeurs appartiennent à l'espace 2^E qui est complet[9]), s'y laisse prolonger, comme on sait, en une fonction continue définie sur l'ensemble $\overline{R}$, c. à d. sur le segment $[0, 1]$ tout entier. On n'a, en effet, qu'à poser pour les x irrationnels

[8]) d'après M. Kuratowski.

[9]) H. Hahn, *Reelle Funktionen*, Leipzig 1932, p. 124. En particulier, l'espace $E = Q$ (et l'on a dans nos constructions $T_x \epsilon 2^Q$) est compact, donc complet.

$T_x = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_{r_n}$ où $\{r_n\}$ est une suite arbitraire telle que $x = \lim_{n\to\infty} r_n$, et ce prolongement est univoque[10]). La condition (α) est ainsi établie. (β) en résulte aussitôt d'après la définition de T_x.

Soit enfin $x' < r_n < r < s < s_n < x''$ où $x' = \lim_{n\to\infty} r_n$ et $x'' = \lim_{n\to\infty} s_n$. On a donc par définition

$$T_{x'} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_{r_n} \quad \text{et} \quad T_{x''} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_{s_n},$$

d'où

$$T_{x'} \subset \overline{\sum_{v<r} T_v} \subset \overline{\sum_{v<s} T_v} \quad \text{et} \quad T_{x''} \subset \overline{\sum_{v>s} T_v} \subset \overline{\sum_{v>r} T_v}$$

(avec $v \epsilon R$). En multipliant les deux formules membre à membre, on obtient

$$T_{x'} \cdot T_{x''} \subset \overline{\sum_{v<r} T_v} \cdot \overline{\sum_{v>r} T_v} \quad \text{et} \quad T_{x'} \cdot T_{x''} \subset \overline{\sum_{v<s} T_v} \cdot \overline{\sum_{v>s} T_v},$$

d'où, en vertu de (b) et (c), $T_{x'} \cdot T_{x''} \subset T_r \cdot T_s = 0$, c. à d. la condition ($\gamma$).

II. *Etant données dans le carré Q deux suites $\{\Delta_i^{(n)}\}$* $(i = 0, 1;$ $n = 1, 2, \ldots)$ *de régions relatives* (c. à d. d'ensembles connexes ouverts *dans* Q) *telles que:*

(d) $Q - \sum_n \Delta_i^{(n)} \subset \overline{\sum_n \Delta_{1-i}^{(n)}}$,

(e) *aucun $\Delta_i^{(n)}$ ne coupe Q et pour chacun d'eux* $\overline{\Delta_i^{(n)}} \cdot \mathrm{Fr}(Q) = \Delta_i^{(n)} \cdot \mathrm{Fr}(Q)$ *est un segment de* $H_i - (T_0 + T_1)$,

(f) *les continus $\overline{\Delta_i^{(n)}}$ sont deux à deux disjoints,*

l'ensemble

(*) $$C = Q - \sum_{\substack{n=1,2,\ldots \\ i=0,1}} \Delta_i^{(n)}$$

est un continu irréductible entre T_0 et T_1.

[10]) Voir p. ex. C. Kuratowski, l. c. *Topologie I*, p. 210, où il est démontré qu'une telle fonction se laisse prolonger d'une façon continue sur un ensemble G_δ, à savoir *sur le G_δ composé de tous les points où l'oscillation de la fonction donnée s'annule.* Or, l'hypothèse de la continuité uniforme sur R implique évidemment la nullité de l'oscillation sur $\overline{R}$.

Démonstration. Soient K un sous-ensemble fermé de C tel que

$$(\ast\ast)\qquad K\cdot T_0 \neq 0 \neq K\cdot T_1$$

et a un point de $C-K$. En vertu de (d) et (*) l'intérieur J du cercle de centre a et d'un rayon $<\operatorname{dist}(a, K)$ contient donc un point d'un $R_0=\operatorname{Int}(\Delta_0^{(n)})$ et un point d'un $R_1=\operatorname{Int}(\Delta_1^{(m)})$, de sorte qu'un arc arbitraire qui les unit dans J (sans passer par T_0 et T_1), complété au besoin par des arcs qui les unissent respectivement à travers R_0 et R_1 aux segments $H_0\cdot R_0$ et $H_1\cdot R_1$ (voir (e)), constitue un continu disjoint de K et qui coupe Q entre T_0 et T_1. En vertu de ($\ast\ast$), K ne peut donc être un continu, c. à d. C ne peut être un continu réductible entre T_0 et T_1.

Quant à la connexité de C, elle résulte 1° de celle de tout $Q-[\Delta_0^{(1)}+\Delta_1^{(1)}+\Delta_0^{(2)}+\Delta_1^{(2)}+\ldots+\Delta_i^{(n)}]$ pour n fini (car, d'après (e) aucun $\Delta_i^{(n)}$, donc, par suite de (f), aucune somme finie de ces ensembles ne coupe Q) et 2° de la forme $C=\prod\limits_{\substack{n=1,2,\ldots\\ i=0,1}}[Q-\Delta_i^{(n)}]$ de (*).

5. Le continu $\mathfrak{N}_S$. Sa construction se ramène à présent à celle de la suite de ses tranches rationnelles τ_r qui satisfassent aux conditions des lemmes I et II. Nous allons la définir par l'induction, en même temps qu'une suite auxiliaire de nombres naturels $\{u_l\}$.

Soit $\tau_{r_0}=\tau_0=T_0$, $u_0=0$ et $\tau_{r_1}=\tau_1=T_1$, $u_1=0$. Passons à la construction de τ_{r_2} pour $r_2=\frac{1}{2}$. Soient:

$$\gamma_{r_2}=(\tfrac{1}{4},0),\qquad \lambda_{r_2}=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\qquad \delta_{r_2}=(\tfrac{3}{4},0)$$

et L_{r_2} la ligne brisée $[\gamma_{r_2},\lambda_{r_2},\delta_{r_2}]$. Désignons par S_{r_2} la ligne polygonale infinie $[\sigma_{r_2},\gamma_{r_2}^{[1]},\lambda_{r_2}^{[2]},\delta_{r_2}^{[1]},\ldots\gamma_{r_2}^{[j]},\lambda_{r_2}^{[j+1]},\delta_{r_2}^{[j]},\ldots]$ où $\sigma_{r_2}=\lambda_{r_2}^{[1]}$ (voir figure) et les points $\gamma_{r_2}^{[j]}$, $\lambda_{r_2}^{[j]}$ et $\delta_{r_2}^{[j]}$ ne diffèrent respectivement des points γ_{r_2}, λ_{r_2} et δ_{r_2} que par leur ordonnée augmentée de 2^{-j} (de sorte que l'on a $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_{r_2}^{[j]}=\gamma_{r_2}$, etc. et par suite $\overline{S}_{r_2}=S_{r_2}+L_{r_2}$).

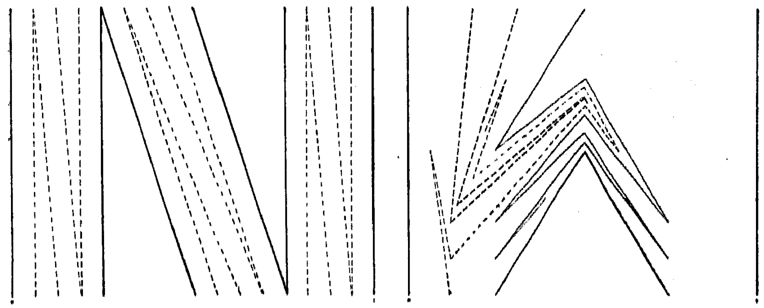
Posons $\tau_{r_2}=\tau_{\frac{1}{2}}=\overline{S}_{r_2}$ et $u_2=1$. Remarquons que

(a$_2$) $\qquad\operatorname{dist}(\tau_{r_2},\tau_0)=\operatorname{dist}(\tau_{r_2},\tau_1)<1,$

(c$_2$) τ_{r_0}, τ_{r_1} *et* τ_{r_2} *sont disjoints,*

(d$_2$) *la région moyenne de* τ_{r_2} *appartient à la suite* $\{\Delta_0^{(n)}\}$, c.-à-d. que sa fermeture est disjointe de H_1; *de plus son écart de* H_1 *est* $\leqslant\frac{1}{2}$.

(e$_2$) $Q-(\tau_{r_0}+\tau_{r_1}+\tau_{r_2})$ *se compose de deux régions dont les frontières contiennent* τ_{r_2} *et d'une seule région moyenne qui ne coupe pas* Q *et dont la frontière se compose de* L_{r_2} *et du segment* $[\gamma_r,\delta_{r_2}]$ *de* H_0.



Cette figure représente quelques tranches de $\mathfrak{N}_\nu$ et de $\mathfrak{N}_s$ (de ce dernier une seule des u_3 tranches de la 3-ième approximation). Les tranches de deux premières approximations sont en trait continu et celles de la troisième en trait interrompu.

Admettons à présent que u_k pour $k\leqslant l$ et τ_{r_m} pour $m\leqslant n=\sum\limits_{k=1}^{l}u_k$ (tranches des l premières approximations) soient définis d'une manière qu'en les numérotant selon les valeurs croissantes de leurs indices on ait

(a$_l$) dist $(\tau_{r_m},\tau_{r_{m+1}})<1/l$,

(c$_l$) $\tau_{m'}\cdot\tau_{m''}=0$ *pour* $0\leqslant m'<m''<n$

(d$_l$) *les régions moyennes des* u_{l-1} *tranches de la* $(l-1)$*-ème approximation appartiennent à la suite* $\{\Delta_i^{(n)}\}$ *où* $i=l$ (mod 2); *leur écart de* H_{1-l} *est* $<1/l$.

(e$_l$) $Q-(\tau_{r_0}+\tau_{r_1}+\ldots+\tau_{r_n})$ *se compose de* n *régions* D_m $(0\leqslant m<n)$, *à savoir pour lesquelles* $(\tau_{r_m}+\tau_{r_{m+1}})\subset\operatorname{Fr}(D_m)$, *et de* $(n-1)$ *régions moyennes* $\Delta_i^{(m)}$ *qui ne coupent pas* Q *et dont la frontière se compose de* L_{r_m} *et du segment* $[\gamma_{r_m},\delta_{r_m}]$ *de* H_l,

Pour en obtenir la définition du nombre u_{l+1} et de la suite

$$(1)\qquad \tau_{r_{u_l+1}},\ \tau_{r_{u_l+2}},\ \ldots,\ \tau_{r_{u_{l+1}}},$$

nous allons inscrire successivement dans chaque D_m un nombre fini (dépendant de m) de tranches. A ce but, remplaçons d'abord dans

$\mathrm{Fr}(D_m)$ de gauche et de droite τ_{r_m} et $\tau_{r_{m+1}}$ par deux lignes polygonales ordinaires P_m et P_{m+1} unissant respectivement σ_m à δ_m et σ_{m+1} à γ_{m+1} et telles que

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{dist}\,(\tau_{r_m}, P_m) < 1/4\,l > \mathrm{dist}\,(P_{m+1}, \tau_{r_{m+1}}),$$

$$\text{(3)} \qquad P_m + P_{m+1} \subset \overline{D}_m.$$

Il suffit p. ex. de prendre dans τ_{r_m} la partie initiale de la ligne polygonale infinie $S_{r_{m-1}}$, soit $I_m = [\sigma_{r_m}, \gamma_{r_m}^{[1]}, \lambda_{r_m}^{[2]}, \ldots, \delta_{r_m}^{[j]}]$, avec un j assez grand pour que $\mathrm{dist}\,(I_m, L_{r_m}) < 1/4l$, d'en joindre par un segment de droite J_m le bout $\delta_{r_m}^{[j]}$ de I_m au bout δ_{r_m} de L_{r_m} et de poser $P_m = I_m + J_m$. La définition de P_{m+1} est symétrique, avec γ au lieu de δ, pour satisfaire à (3).

Or, par suite de l'homotopie entre les lignes P_m et P_{m+1}, réalisable à travers la partie Π_m de D_m comprise entre ces lignes, d'une manière que leurs positions restent deux à deux disjointes et que leurs bouts glissent le long des segments correspondants des H_i sur lesquels ils sont situés, on peut interposer entre P_m et P_{m+1} une suite finie de continus, donc aussi de lignes polygonales ordinaires, reliant H_0 à H_1 à travers Π_m, disjointes et telles que les distances entre deux voisines, y compris P_m et P_{m+1}, soit $< 1/4l$, Ces distances ne seront évidemment (en tenant compte aussi de (2)) que tout au plus redoublées et resteront par conséquent $< 1/(l+1)$, si l'on remplace ces lignes par autant de continus, toujours reliant H_0 à H_1 et situés entre elles. Leur nombre étant h_m, nous les désignerons par

$$\text{(4)} \qquad \tau_{r_m+(r_{m+1}-r_m)/h_m},\ \tau_{r_m+2(r_{m+1}-r_m)/h_m}, \ldots,\ \tau_{r_m+(h_m-1)(r_{m+1}-r_m)/h_m}$$

et poserons $u_{l+1} = \sum\limits_{m=1}^{n} h_m$. Pour avoir la suite (1) avec $r_{u_l+1} < r_{u_l+2} < \ldots$ $\ldots < r_{u_{l+1}}$, on n'a qu'à les ranger tous suivant leur ordre de succession dans Q ou, ce qui revient au même, suivant l'ordre de croissance des valeurs de leurs indices, données par (4). Ainsi, on aura p. ex. $r_{u_l+1} = 1/h_1$, etc. Le même parallélisme d'ordre subsistera évidemment, si l'on y fait entrer aussi les tranches des approximations précédentes, c. à d. si on forme la suite de tous les τ_{r_m} pour $m \leqslant \sum\limits_{k=1}^{l+1} u_k$ selon les valeurs croissantes des indices.

Remarquons que ce parallélisme a pour effet que

(5) *toute tranche coupe Q entre celles d'indices inférieurs et d'indices supérieurs.*

La condition (a_{l+1}), à savoir qui s'obtient de (a_l) en y remplaçant l par $l+1$, se trouve en même temps satisfaite par suite des relations de distance observées dans la construction des nouvelles tranches. D'autre part, comme les tranches inscrites dans chaque région D_m $(0 \leqslant m < n)$ entre P_m et P_{m+1} son disjointes l'une de l'autre et, en raison de (3), des anciennes, on a la condition (c_{l+1}). Enfin, pour réaliser les conditions (d_{l+1}) et (e_{l+1}), on n'a qu'à orienter et proportionner convenablement les u_{l+1} tranches (1) de la $(l+1)$-ème approximation: *orienter* dans le sens de placer leurs points initiaux $\sigma_{u_l+1}, \sigma_{u_l+2}, \ldots$ sur le côté $H_{l+1 (\mathrm{mod}\ 2)}$ de Q; *proportionner* dans ce sens que les sommets $\lambda_{u_l+1}, \lambda_{u_l+2}, \ldots$ des frontières de leurs régions moyennes sont à placer à une distance $< \dfrac{1}{l+1}$ du côté opposé de Q (voir figure à droite p. 575).

J'en omets les trivialités de la construction, chacune des tranches en question étant par définition homéomorphe de τ_{r_0} et située comme celle-ci entre deux lignes polygonales reliant les bases du carré.

Reste à montrer que la suite des tranches rationnelles ainsi définies satisfait aux conditions des lemmes. Or, la condition (a) résulte de (a_l) en rapport avec (4): pour $|r-s| < 1/\sum\limits_{k=1}^{l+1} u_k$ on a en effet $\mathrm{dist}(\tau_r, \tau_s) < 1/l$. La condition (b) en est une conséquence facile en vertu de (5); la condition (c_l) entraîne (c); les conditions (a) et (d_l) donnent (d); la condition (e_l) donne directement (e) et (f) résulte de (c) en vertu de (5) et de (e).

Enfin, en vertu de la définition (4), les indices de ces tranches forment dans le segment $[0, 1]$ un ensemble dense de nombres (rationnels). On peut donc le désigner par R et poser $\mathfrak{N}_S = \overline{\sum\limits_{r \varepsilon R} \tau_r}$.

6. Remarques. Le singulier dans l'exemple $\mathfrak{N}_s$, à savoir l'existence d'une décomposition continue linéaire de ce continu irréductible, peut être exprimé aussi d'une autre manière. On peut regarder ce continu comme le chemin (de dimension 1) d'un „mouvement" d'une tranche (aussi de dimension 1) tel que toutes les positions prises par elle sont disjointes deux à deux[11]). Or, on peut montrer que dans la construction qui précède il n'y a pas d'homéomorphie entre les diverses positions (les rationnelles et les irrationnelles) La question s'impose donc: *est-il possible d'associer aux propriétés mentionnées de $\mathfrak{N}_s$ celle d'homéomorphie de toutes ses tranches, en particulier leur imposer le type topologique d'arc simple?*

[11]) Cf. L. Vietoris, *Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Proceed. Akad. Amsterdam XXIX (1926), p. 443—453, où il y a une décomposition continue d'un continu plan (réductible) en sous-continus disjoints ne se réduisant pas à un point; ils sont indécomposables.