L'ensemble E satisfaisant aux conditions de notre corollaire ne peut pas évidemment être de mesure nulle (le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle contenant un sous-ensemble parfait). Or, il résulte aussi des conditions de notre corollaire que l'ensemble E ne contient aucun sous-ensemble parfait (puisque dans le cas contraire, tout ensemble superposable avec E, donc, à plus forte raison, l'ensemble $E_1+E_2+E_3+\dots$, contiendrait un sous-ensemble parfait). Il en résulte donc que l'ensemble E ne peut pas être de mesure intérieure positive. Comme il n'est pas de mesure nulle, il est donc non mesurable (L). Or, l'ensemble $E_1+E_2+E_3+\dots$, comme dépourvu de sous-ensemble parfait, est de mesure intérieure nulle. Le problème de M. Szpilrajn est ainsi résolu affirmativement.

Sur l'extension de la mesure lebesguienne *).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Introduction. La mesure linéaire $m(E)$ de M. Lebesgue satisfait aux conditions suivantes [1]):

I. *Deux ensembles superposables ont même mesure;*

II. *La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures;*

III. *La mesure de l'intervalle* $[0, 1]$ *est* 1.

Cette mesure est définie pour les ensembles dits *mesurables* (L) et on sait, d'après le résultat bien connu de M. Vitali, qu'il n'existe aucune fonction satisfaisant à ces conditions, définie pour *tous* les ensembles linéaires [2]).

La note présente est consacrée à diverses *extensions* de la mesure lebesguienne. On sait qu'il existe une extension de cette mesure qui est une fonction complètement additive [3]) sur un corps d'ensembles contenant certains ensembles non mesurables (L) [4]). Pour obtenir une telle extension il suffit p. ex. de considérer un ensemble Z non mesurable (L) de mesure lebesguienne intérieure nulle et de poser $\mu(E)=m(M)$ pour chaque ensemble E de la

*) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) le 4. I. 1935.

[1]) Voir H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration*, Paris 1927, p. 110.

[2]) Voir p. ex. F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401.

[3]) c.-à-d. qui satisfait à la condition II.

[4]) Cf. O. Nikodym: *Sur les fonctions d'ensembles*. C. R. du I Congrès Slave, Varsovie 1929, p. 310.

forme $E = M - N_1 + N_2$, où l'ensemble M est mesurable (L) et $N_1 + N_2 \subset Z$. Evidemment la fonction μ est l'extension demandée.

Dans cette note nous considérons des extensions „parfaites" de la mesure lebesguienne: notamment nous appelons *parfaite* chaque extension (de cette mesure) satisfaisant aux conditions I—III, définie sur un corps **M** d'ensembles qui contient tout ensemble superposable à un ensemble arbitraire appartenant à **M** (voir § 1). L'idée de l'extension parfaite est due à M-me Jankowska-Wiatr qui a montré (en 1928) l'existence d'une extension parfaite à l'aide de l'hypothèse du continu (voir § 2). Plus tard, j'ai obtenu ce résultat sans l'aide de cette hypothèse, mais seulement pour l'espace cartésien à un nombre $\geqslant 2$ de dimensions (voir § 2). Le résultat récent de M. Sierpiński[1]) entraîne directement l'existence des diverses extensions parfaites de la mesure lebesguienne (§ 3) dans l'espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions.

Les §§ 4—7 sont consacrées à divers problèmes concernant les fonctions additives d'ensemble et — en particulier — les extensions parfaites de la mesure lebesguienne.

Termes et notations. Je considère les sous-ensembles d'un espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions. Dans tous les cas exceptionnels j'énonce explicitement les prémisses sur l'espace.

E étant un sous-ensemble de l'espace cartésien, CE désigne son complémentaire.

I désigne le cube fondamental de l'espace considéré, c.-à-d. l'ensemble des points dont tous les coordonnées sont $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$ (faute d'autre indication).

Deux sous-ensembles E_1 et E_2 de l'espace sont dits superposables (en symboles: $E_1 \simeq E_2$), lorsqu'il existe une transformation isométrique ψ de tout l'espace en lui-même, telle que $\psi(E_1) = E_2$.

$m(E)$, $m_e(E)$, $m_i(E)$ désigne la mesure lebesguienne, la mesure lebesguienne extérieure et la mesure lebesguienne intérieure.

L désigne la classe des ensembles mesurables (L).

§ 1. Soit $\mu(M)$ une fonction non négative (qui peut admettre aussi la valeur $+\infty$), définie pour tout ensemble M appartenant à une classe fixe **M**. Supposons les conditions suivantes[2]) satisfaites:

[1]) *Un théorème de la théorie générale des ensembles*, ce volume, p. 546.

[2]) Cf. W. Sierpiński: *Sur une définition axiomatique des ensembles mesurables* (L), Bull. Acad. Cracovie 1918 p. 174.

1° Si $M \in \mathbf{M}$, on a $CM \in \mathbf{M}$

2° Si $M_1, M_2 \ldots \in \mathbf{M}$ et $M = M_1 + M_2 + \ldots$, on a $M \in \mathbf{M}$, si — en outre — $M_i M_j = 0$ pour $i \neq j$, on a $\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2) + \ldots$

3° On a: $I \in \mathbf{M}$ et $\mu(I) = 1$.

4° Si $N_1 \in \mathbf{M}$, $N_2 \subset N_1$ et $\mu(N_1) = 0$, on a $N_2 \in \mathbf{M}$ [donc de même $\mu(N_2) = 0$].

5° Si $M \in \mathbf{M}$ et $K \simeq M$, on a $K \in \mathbf{M}$ et $\mu(K) = \mu(M)$.

Or, la mesure lebesguienne $m(L)$ et la classe **L** des ensembles mesurables (L) satisfont à ces conditions. D'autre part, on démontre aisément que chaque fonction μ (définie sur la classe **M** d'ensembles), satisfaisant aux conditions 1°—5° est une extension de la mesure lebesguienne (en d'autres mots: $\mathbf{M} \supset \mathbf{L}$ et on a $\mu(L) = m(L)$ pour tout $L \in \mathbf{M}$)[1]). Nous appelons chaque fonction μ satisfaisant aux conditions 1°—5° et à la condition:

6°. La classe **M** contient un ensemble non mesurable (L); une extension parfaite de la mesure lebesguienne. (abrégé: une EP).

§ 2. Considérons les conditions suivantes pour une classe **N** d'ensembles:

1'. Si $N_1, N_2, \ldots \in \mathbf{N}$, on a $N_1 + N_2 + \ldots \in \mathbf{N}$;

2'. Si $N_1 \in \mathbf{N}$ et $N_2 \subset N_1$, on a $N_2 \in \mathbf{N}$;

3'. Si $N_1 \in \mathbf{N}$, $N_1 \simeq N_2$, on a $N_2 \in \mathbf{N}$;

4'. On a $m_i(N) = 0$ pour tout $N \in \mathbf{N}$.

5'. La classe **N** contient un ensemble non mesurable (L).

Désignons par $\mathbf{M}(\mathbf{N})$ la classe des ensembles de la forme

$$(*) \qquad M = L - N_1 + N_2, \quad \text{où} \quad L \in \mathbf{L},\ N_1 \in \mathbf{N},\ N_2 \in \mathbf{N}.$$

Evidemment on peut supposer, sans nuire à la généralité, que $N_1 \subset L$ et $N_2 L = 0$.

Remarquons d'abord que la relation

$$L - N_1 + N_2 = L^* - N_1^* + N_2^*$$

(où $L \in \mathbf{L}$; $L^* \in \mathbf{L}$; $N_1, N_2, N_1^*, N_2^* \in \mathbf{N}$) entraîne

$$(L - L^*) + (L^* - L) \subset N_1 + N_2 + N_1^* + N_2^*,$$

donc il résulte de 1' et 4' que

$$m[(L - L^*) + (L^* - L)] = 0$$

et par conséquent $m(L) = m(L^*)$.

[1]) Cf. Sierpiński l. c.

En s'appuyant sur cette remarque, posons

$$\mu^{\mathbf{N}}(M) = m(L)$$

pour chaque ensemble $M \epsilon \mathbf{M}(\mathbf{N})$, c.-à-d. de la forme (*).

Evidemment pour chaque classe $\mathbf{N}$ satisfaisant aux conditions $1'$—$5'$, la fonction $\mu^{\mathbf{N}}(M)$ est une EP.

La classe $\mathbf{S}$ des ensembles, dont aucun ne possède aucun sous-ensemble indénombrable de mesure lebesguienne nulle, satisfait évidemment aux conditions $1'$—$4'$. M. Sierpiński a démontré à l'aide de l'hypothèse du continu que cette classe contient un ensemble indénombrable [1]), donc non mesurable (L). Par conséquent la classe $\mathbf{S}$ satisfait à la condition $5'$; donc si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la fonction $\mu^{\mathbf{S}}(M)$ est une EP [2]).

Soit à présent $\mathbf{T}$ la classe des ensembles plans qui possèdent avec chaque droite un ensemble au plus dénombrable des points communs. On démontre aisément que la classe $\mathbf{T}$ possède les propriétés $1'$—$4'$ et, d'après un résultat de M. Sierpiński, elle possède de même la propriété $5'$ [3]). Par conséquent la fonction $\mu^{\mathbf{T}}$ est une EP. L'existence d'une EP est donc démontrée pour le cas du plan; pour l'espace cartésien à un nombre > 2 de dimensions la construction est analogue.

§ 3. Des classes $\mathbf{N}$ satisfaisant aux conditions $1'$—$5'$ peuvent être obtenues en particulier de la façon suivante: Soit E un ensemble tel que

$1''$. Pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles dont chacun est superposable à E, on a $m_i(E_1 + E_2 + \ldots) = 0$.

$2''$. $m_e(E) > 0$.

Soit à présent $\mathbf{N}(E)$ la classe de tous les ensembles de la forme $Z_1 + Z_2 + \ldots$, où chaque ensemble Z_n est superposable à un sous-ensemble de E. Evidemment, si E satisfait aux conditions $1''$ et $2''$, la classe $\mathbf{N}(E)$ satisfait aux conditios $1'$—$5'$ et par conséquent la fonction $\mu^{\mathbf{N}(E)}(M)$ est une EP.

Or, M. Sierpiński a démontré récemment [4]) l'existence d'un ensemble E satisfaisant avec son complémentaire aux conditions $1''$

[1]) Cf. W. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne **4**, Warszawa—Lwów 1934, p. 80, ou bien Fund. Math. **5**, p. 184.

[2]) le résultat de M-me Jankowska-Wiatr: cf. l'Introduction.

[3]) Fund. Math. **1**, p. 114.

[4]) Cf. p. 552 [1]).

et $2''$ et cela dans l'espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions. L'existence d'une EP est donc démontrée complètement.

§ 4. Le problème s'impose, s'il existe „la meilleure" EP, c.-à-d. telle que la classe correspondante $\mathbf{M}$ d'ensembles contient chaque classe qui correspond à une EP arbitraire. Nous allons démontrer qu'une telle EP n'existe pas.

Supposons donc qu'une fonction $\varphi(F)$, définie sur une classe $\mathbf{F}$ d'ensembles est „la meilleure" EP. Soit à présent l'ensemble E de M. Sierpiński tel que les ensembles E et CE satisfont aux conditions $1''$ et $2''$. Désignons les fonctions $\mu^{\mathbf{N}(E)}(M)$ et $\mu^{\mathbf{N}(CE)}(M)$ respectivement par μ_1 et μ_2. On a donc $\mu_1(Z) = 0$ pour tout $Z \subset E$ et $\mu_2(Z) = 0$ pour tout $Z \subset CE$.

La fonction φ étant „la meilleure" EP, on a $Z \epsilon \mathbf{F}$ pour chaque $Z \subset E$ et pour chaque $Z \subset CE$. En vertu de la condition 2^0 la classe $\mathbf{F}$ contient tous les sous ensembles de l'espace. Nous arrivons ainsi à une contradiction avec le résultat de M. Vitali (cf. l'Introduction).

Le problème suivant de M. Sierpiński reste ouvert: peut-on prolonger toute EP en une EP nouvelle? En d'autres mots: Existe-t-il pour toute fonction $\mu(M)$ (définie sur une classe $\mathbf{M}$), qui est une EP, une EP nouvelle $\mu^*(M)$ (définie sur une classe $\mathbf{M}^*$) telle que $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}^* \supset \mathbf{M}$ et $\mu(M) = \mu^*(M)$ pour tout $M \epsilon \mathbf{M}$?

§ 5. Considérons la proposition suivante:

(t) Il existe une classe $\mathbf{K}$ de puissance du continu d'ensembles de mesure nulle telle que chaque ensemble de mesure nulle est contenu dans un ensemble appartenant à $\mathbf{K}$.

Cette proposition est vraie pour la mesure lebesguienne: c'est notamment la classe des ensembles G_δ de mesure nulle qui joue le rôle de $\mathbf{K}$. Or, nous allons démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu que la proposition (t) n'est pas vraie pour une certaine EP.

M. Sierpiński a démontré à l'aide de cette hypothèse que la classe $\mathbf{S}$ (cf. § 2) contient un ensemble indénombrable. En suivant le raisonnement de M. Sierpiński, on démontre d'une façon complètement analogue le lemme suivant:

Soit $\mu(M)$ une fonction définie pour une classe $\mathbf{M}$ de sous-ensembles d'un ensemble I de puissance du continu, satisfaisant aux conditions 1^0—4^0 et (t). Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble indénombrable Z qui ne contient aucun ensemble indénombrable $Z^* \epsilon \mathbf{M}$ tel que $\mu(Z^*) = 0$.

Nous allons démontrer en nous appuyant sur ce lemme que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la fonction $\mu^{\mathbf{S}}$ ne satisfait pas à la contition (t).

Supposons pour la démonstration que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et que la fonction $\mu^{\mathbf{S}}$ satisfait à la condition (t).

Remarquons que l'égalité $\mu^{\mathbf{S}}(M) = 0$ est satisfaite pour les ensembles M de la forme:

$$(*) \qquad M = N + S \quad \text{où} \quad m N = 0 \quad \text{et} \quad S \in \mathbf{S}.$$

Désignons par $\mathbf{E}$ la classe de ces ensembles et par $\mathbf{N}$ la classe des ensembles de mesure lebesguienne nulle.

Il résulte de notre lemme qu'il existe un ensemble indénombrable Z qui ne possède aucun sous-ensemble indénombrable appartenant à $\mathbf{E}$.

On a $\mathbf{N} \subset \mathbf{E}$ et par conséquent l'ensemble Z ne contient aucun sous-ensemble indénombrable appartenant à $\mathbf{N}$; donc $Z \in \mathbf{S}$.

D'autre part $\mathbf{S} \subset \mathbf{E}$ et par conséquent l'ensemble Z ne contient aucun sous-ensemble indénombrable appartenant à $\mathbf{S}$; donc $Z \bar{\in} \mathbf{S}$. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

§ 6. Le problème s'impose si chaque EP est de la forme $\mu^{\mathbf{N}}$ (§ 2). En d'autres termes: $\mu(M)$ étant une EP définie sur une classe $\mathbf{M}$, un ensemble arbitraire appartenant à $\mathbf{M}$ peut être présenté dans la forme $L - N_1 + N_2$, où $L \in \mathbf{L}$ et $\mu(N_1 + N_2) = 0$? Nous allons donner — à l'aide de l'hypothèse du continu — une réponse négative à cette question.

Nous nous appuyons sur le théorème suivant: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une décomposition de l'espace en deux ensembles totalement imparfaits* U *et* $\mathrm{C}\,U$ *tels que pour tout ensemble* U^* *superposable à* U *l'ensemble* $(U - U^*) + (U^* - U)$ *est au plus dénombrable* [par conséquent pour tout ensemble V^* superposable à $\mathrm{C}U$ l'ensemble $(\mathrm{C}U - V^*) + (V^* - \mathrm{C}U)$ est de même au plus dénombrable] [1].

Désignons par $\mathbf{M}^*$ la classe des ensembles M de la forme

$$(*) \qquad M = L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}U, \quad \text{où} \quad L_1 \in \mathbf{L} \quad \text{et} \quad L_2 \in \mathbf{L}$$

et remarquons qu'on a pour tout $L_1, L_2, L_1^*, L_2^* \in \mathbf{L}$:

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{C}(L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}\,U) = \mathrm{C}\,L_1 \cdot U + \mathrm{C}\,L_2 \cdot \mathrm{C}U.$$

[1] Cf. W. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, pp. 133—135. M. Sierpiński considère seulement les *translations* de U, mais l'extension demandée du théorème ne présente aucune difficulté.

$$\text{(ii)} \qquad \text{Si} \quad L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}\,U \subset L_1^*\,U + L_2^* \cdot \mathrm{C}\,U, \quad \text{on a} \quad m[(L_1 - L_1^*) + (L_2 - L_2^*)] = 0$$

$$\text{(iii)} \qquad \text{Si} \quad (L_1\,U + L_2\,\mathrm{C}\,U)(L_1^*\,U + L_2^*\,\mathrm{C}\,U) = 0, \quad \text{on a} \quad m(L_1\,L_1^* + L_2\,L_2^*) = 0.$$

La proposition (ii) résulte du fait que les ensembles U et $\mathrm{C}\,U$ sont totalement imparfaits (chacun d'eux possède donc certains points communs avec chaque ensemble mesurable (L) de mesure positive); les propositions (i) et (ii) entraînent (iii).

Il résulte de (ii) que l'égalité

$$L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}U = L_1^* \cdot U + L_2^* \cdot \mathrm{C}U \quad (\text{où } L_1, L_2, L_1^*, L_2^* \in \mathbf{L})$$

entraîne les égalités: $m\,L_1 = m\,L_1^*$ et $m L_2 = m\,L_2^*$.

Posons donc pour tout ensemble $M \in \mathbf{M}^*$, donc de la forme (*):

$$(\divideontimes) \qquad \mu^*(M) = \tfrac{1}{2}\,|m(L_1) + m(L_2)|.$$

Nous allons démontrer que μ^* est l'EP demandée. Il résulte aisément de la définition de la fonction μ^* est des propositions (i), (ii) et (iii) qu'elle satisfait aux conditions 1^0—4^0 et 6^0. Démontrons qu'elle remplit de même la condition 5^0.

Supposons donc qu'on a $M = L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}\,U$ (où $L_1 \in \mathbf{L}$ et $L_2 \in \mathbf{L}$) et $K \cong M$. Il existe donc une transformation isométrique f de l'espace en lui-même, telle que $f(M) = K$. On a donc

$$K = f(M) = f(L \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}\,U) = f(L_1) \cdot f(U) + f(L_2) \cdot f(\mathrm{C}\,U).$$

Les ensembles $f(L_1)$ et $f(L_2)$ sont évidemment mesurables (L) et les ensembles $f(U)$ et $f(\mathrm{C}\,U)$ sont égaux respectivement à U et à $\mathrm{C}U$, à deux ensembles au plus dénombrables près. Par conséquent on a

$$K = L_1^* \cdot U + L_2^* \cdot \mathrm{C}\,U$$

où

$$m(L_1^*) = m(L_1) \quad \text{et} \quad m(L_2^*) = m(L_2).$$

On a donc $K \in \mathbf{M}^*$ et $\mu^*(K) = \mu(M)$.

La fonction μ^* possède donc la propriété 5^0 et par conséquent elle est une EP.

D'autre part, on voit que l'ensemble U ne peut pas être présenté dans la forme $U = L - N_1 + N_2$, où $L \in \mathbf{L}$, et $\mu^*(N_1 + N_2) = 0$. Remarquons d'abord qu'il résulte de la définition $(\divideontimes)$ que la relation $\mu^*(Z) = 0$ entraîne: $Z \in \mathbf{L}$ et $m(Z) = 0$. Par conséquent l'égalité

$M = L - N_1 + N_2$ [où $L \in \mathbf{L}$ et $\mu(N_1 + N_2) = 0$] entraîne la mesurabilité (L) de l'ensemble M, tandis que l'ensemble U est non mesurable (L).

§ 7. Soit $\mu(M)$ une fonction non négative d'ensemble définie sur une classe $\mathbf{M}$ de sous-ensembles d'un ensemble I de puissance du continu, satisfaisant aux condition 1^0—3^0.

Divisons la classe $\mathbf{M}$ en classes de façon que deux ensembles $M_1 \in \mathbf{M}$, $M_2 \in \mathbf{M}$ appartiennent à une même classe lorsqu'on a

$$\mu[(M_1 - M_2) + (M_2 - M_1)] = 0$$

et seulement dans ce cas. La famille $\mathfrak{M}$ des classes ainsi obtenue sera considérée comme un espace métrique[1]). Posons notamment pour $\mathbf{M}_1 \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{M}_2 \in \mathfrak{M}$:

$$\varrho(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mu[(M_1 - M_2) + (M_2 - M_1)] \quad \text{où} \quad M_1 \in \mathbf{M}_1,\ M_2 \in \mathbf{M}_2.$$

(Il est évident que le nombre ϱ ne dépend pas du choix des ensembles M_1 et M_2).

M. Nikodym a démontré que l'espace $\mathfrak{M}$ est toujours complet[2]).

Pour la mesure lebesguienne (des sous-ensembles d'intervalle I) cet espace est séparable. Le problème si l'espace $\mathfrak{M}$ est séparable dans le cas général, ou bien pour les E P (considérées aussi seulement sur l'intervalle I) reste ouvert. Nous ne savons de même si cet espace doit être toujours de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$.

Désignons par $\mathfrak{M}^0$ resp. par $\mathfrak{M}^{\mathbf{N}}$ l'espace $\mathfrak{M}$ correspondant à la mesure lebesguienne resp. à une EP de la forme $\mu^{\mathbf{N}}$ [§ 2]. Il est évident qu'il existe dans chaque classe appartenant à $\mathfrak{M}^{\mathbf{N}}$ un ensemble mesurable (L), d'où il résulte aisément que les espaces $\mathfrak{M}^{\mathbf{N}}$ et $\mathfrak{M}^0$ sont isométriques.

Il est enfin à remarquer que l'espace $\mathfrak{M}^*$, correspondant à la fonction μ^* [cf. § 6] est aussi isométrique à $\mathfrak{M}^0$. Soient: $\mathbf{K} \in \mathfrak{M}^*$ et $M \in \mathbf{K}$. On a donc $M = L_1 \cdot U + L_2 \cdot \mathrm{C}\,U$ (où $L_1 \in \mathbf{L}$ et $L_2 \in \mathbf{L}$). Posons pour tout point $p = (x_1, x_2, \dots x_n)$ de l'espace:

$$f_1(p) = (\tfrac{1}{2}x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$
$$f_2(p) = (\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}, x_2, x_3, \dots x_n).$$

Posons ensuite $L_1^* = f_1(L_1)$ et $L_2^* = f_2(L_2)$. L'ensemble $L_1^* + L_2^*$ appartient à une classe $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}^0$. Désignons donc la classe $\mathbf{M}$ par $\psi(\mathbf{K})$. On démontre aisément que la transformation ψ est une isométrie.

[1]) Cf. p. ex. O. Nikodym l. c. p. 307.
[2]) l. c.

Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible *).

Par

N. Lusin et P. Novikoff (Moskwa).

La méthode de cette détermination a été proposée par M. P. Novikoff; nous exposons ici la rédaction simplifiée de M. N. Lusin.

1. Soit E un complémentaire analytique *non nul* situé dans l'intervalle $(0 < x < 1)$. Nous supposons que E est défini au moyen d'un crible C formé d'une infinité d'intervalles

(1) $$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \dots,\ \delta_n, \dots$$

parallèles à l'axe OX dont les projections, proj. δ_n, sur cet axe sont des intervalles de Baire. Nous désignons par C_n la partie de C située rigoureusement au-dessous de δ_n.

Soit

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_\omega + \dots + E_\alpha \dots / \Omega$$

le développement de E en une infinité transfinie de constituantes défini par C. Soit E_γ la première constituante *non nulle*, $0 \leqslant \gamma < \Omega$; nous la désignons par $E^{(0)}$, $E_\gamma = E^{(0)}$.

2. Voici maintenant le procédé cherché.

Premier pas. Soit δ_{n_1} le premier intervalle dans la suite (1) tel que l'ensemble-produit $H_1 = \text{proj.}\, \delta_{n_1} \times E^{(0)} \neq 0$. Si x est un point de H_1, la perpendiculaire P_x en x à l'axe OX coupe le crible C_{n_1} en un ensemble bien ordonné; soit γ_1 le type minimum lorsque x parcourt H_1. Nous désignons par $E^{(1)}$ l'ensemble des points de H_1 qui correspondent à γ_1.

*) Communication faite par M. N. Lusin à l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. le 8 sept. 1935.