Un théorème de la théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. E. Szpilrajn a posé le problème suivant:

Peut-on démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble linéaire E non mesurable (L), tel que, quelle que soit la suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, E_3, \dots$, dont chacun est superposable (par translation ou par rotation) avec E, l'ensemble $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ est de mesure intérieure nulle? [1]).

La solution positive de ce problème était nécessaire pour résoudre un problème concernant l'extension de la famille des ensembles mesurables (L) [2]).

Je démontrerai ici, sans faire appel à l'hypothèse du continu, mais en faisant usage du théorème de M. Zermelo *(Wohlordnungssatz)* une proposition de la théorie générale des ensembles, dont la solution du problème de M. Szpilrajn résultera sans peine non seulement pour l'espace linéaire, mais pour l'espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions (et même pour les espaces plus généraux). C'est le

[1]) En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on peut démontrer sans peine l'existence d'un tel ensemble E. En effet, tel est, comme on voit sans peine, l'ensemble linéaire non dénombrable E qui a au plus un ensemble dénombrable de points communs avec tout ensemble de mesure nulle et dont l'existence j'ai déduit de l'hypothèse du continu dans *Fund. Math.*, t. V, p. 184 (Cete remaque est due à M-me Jankowska-Wiatr).

Quant aux ensembles plans, M. Szpilrajn a remarqué, que la solution de son problème est fournie par l'ensemble plan E non mesurable (L) superficiellement qui a au plus deux points communs avec toute droite du plan. La démonstration de l'existence d'un tel ensemble a été donnée par moi (à l'aide du théorème de M. Zermelo) dans *Fund. Math.* t. I, p. 114.

[2]) Voir E. Szpilrajn, *Fund. Math.* t. XXV, p. 551.

Théorème. *Soit M un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$* (formé d'éléments quelconques) *et soit Φ une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de M de puissance $2^{\aleph_0}$, et F une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ de transformations biunivoques de l'ensemble M en lui-même. Il existe alors un sous-ensemble E de M qui a au moins un élément commun avec tout ensemble Q de Φ et tel que, $f_1, f_2 f_3 \dots$ étant une suite infinie donnée quelconque de transformations appartenant à la famille F, les ensembles $f_1(E) + f_2(E) + f_3(E) + \dots$ et $f_1(M - E) + f_2(M - E) + \dots$ ne contiennent aucun ensemble de la famille Φ.*

Démonstration.

Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3, \dots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \dots\ x_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les éléments de l'ensemble M.

Les familles Φ et F étant de puissance $2^{\aleph_0}$, l'identité $2^{\aleph_0} \cdot (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ implique que l'ensemble de tous les systèmes (Q, s), où Q est un ensemble de la famille Φ et $s = (f_1, f_2, f_3, \dots)$ une suite infinie de transformations de la famille F, est aussi de puissance $2^{\aleph_0}$, et il existe une suite transfinie du type φ

$$(2) \qquad (Q^1, s^1),\quad (Q^2, s^2), \dots,\quad (Q^\omega, s^\omega), \dots,\quad (Q^\xi, s^\xi), \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous ces systèmes. Soit $s^\xi = (f_1^\xi, f_2^\xi, f_3^\xi, \dots)$.

$f(x)$ étant une transformation de la famille F, nous désignerons par $\overset{*}{f}(x)$ sa transformation inverse.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites transfinies du type φ d'éléments de M:

$$(3) \qquad p_1,\ p_2,\ p_3, \dots,\ p_\omega,\ p_{\omega+1}, \dots,\ p_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

et

$$(4) \qquad q_1,\ q_2,\ q_3, \dots,\ q_\omega,\ q_{\omega+1}, \dots,\ q_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à Q^1 et soit q_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à Q^1 et qui est distinct de chacun d'éléments $f_m^1 \overset{*}{f}{}_n^1(p_1)$, pour $m = 1, 2, 3, \dots$ et $n = 1, 2, 3, \dots$

Soit maintenant α un nombre ordinal donné > 1 et $< \varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments p_ξ et q_ξ pour $\xi < \alpha$.

L'ensemble T^α de tous les éléments $f_m^\alpha \overset{*}{f}{}_n^\xi(q_\xi)$ où $\xi<\alpha$, $m=1,2,3,\ldots$ et $n=1,2,3,\ldots$ est évidemment de puissance $\leqslant \overline{\alpha}\cdot\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (puisque $\alpha<\varphi$, d'où $\overline{\alpha}<2^{\aleph_0}$), et, l'ensemble Q^α étant de puissance $2^{\aleph_0}$ (en tant qu'un ensemble de la famille Φ), on a $Q^\alpha - T^\alpha \neq 0$. Nous définirons p_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $Q^\alpha - T^\alpha$. Nous aurons donc

(5) $p_\alpha \in Q_\alpha$ et $p_\alpha \neq f_m^\alpha \overset{*}{f}{}_n^\xi(q_\xi)$ pour $\xi<\alpha$, $m=1,2,3,\ldots$, $n=1,2,3,\ldots$

L'ensemble U^α de tous les éléments $f_m^\alpha \overset{*}{f}{}_n^\xi(p_\xi)$, où $\xi\leqslant\alpha$, $m=1,2,3,\ldots$ et $n=1,2,3,\ldots$ est, d'après $\alpha<\varphi$, de puissance $<2^{\aleph_0}$ et on a $Q^\alpha - U^\alpha \neq 0$. Nous définirons q_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $Q^\alpha - U^\alpha$. Nous aurons donc

(6) $q_\alpha \in Q^\alpha$ et $q_\alpha \neq f_m^\alpha \overset{*}{f}{}_n^\xi(p_\xi)$ pour $\xi\leqslant\alpha$, $m=1,2,3,\ldots$, $n=1,2,3\ldots$

Les suites transfinies (3) et (4) sont ainsi définies par l'induction transfinie et nous avons pour $\alpha<\varphi$ les formules (5) et (6). Soit E l'ensemble de tous les éléments $\overset{*}{f}{}_n^\xi(p_\xi)$, où $\xi<\varphi$ et $n=1,2,3,\ldots$: je dis qu'il satisfait aux conditions de notre théorème.

En effet, soit $s=(f_1,f_2,f_3,\ldots)$ une suite infinie donnée quelconque de transformations de la famille F et soit Q un ensemble donné quelconque de la famille Φ. Il résulte de la définition de la suite transfinie (2) qu'il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que $Q=Q^\mu$ et $s=s^\mu$, donc $f_n=f_n^\mu$ pour $n=1,2,3,\ldots$

D'après (5) (pour $\alpha=\mu$) on a donc $p_\mu\in Q^\mu=Q$, donc

(8) $$QE\neq 0.$$

Or, d'après (6) (pour $\alpha=\mu$):

(9) $q_\mu\in Q^\mu=Q$ et $q_\mu \neq f_m^\mu \overset{*}{f}{}_n^\xi(p_\xi)$ pour $\xi\leqslant\mu$, $m=1,2,3,\ldots$, $n=1,2,3,\ldots$

et, d'après (5):

$$p_\alpha \neq f_m^\alpha \overset{*}{f}{}_n^\mu(q_\mu) \quad \text{pour} \quad \alpha>\mu, \quad m=1,2,3,\ldots\ n=1,2,3,\ldots,$$

d'où

(10) $q_\mu \neq f_n^\mu \overset{*}{f}{}_m^\alpha(p_\alpha)$ pour $\alpha>\mu$, $m=1,2,3,\ldots$, $n=1,2,3,\ldots$

On a donc, d'après (9) et (10):

$$q_\mu\in Q \quad \text{et} \quad q_\mu \neq \overset{*}{f}{}_m^\mu f_n^\xi(p_\xi) \quad \text{pour} \quad \xi<\varphi, \quad m=1,2,3,\ldots, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

ce qui prouve que

$$q_\mu\in Q \quad \text{et} \quad q_\mu \,\overline{\in}\, f_n^\mu(E) \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

donc que

(11) $$Q-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(E)\neq 0.$$

Or, on a, d'après (5), $p_\mu\in Q^\mu=Q$ et, d'après la définition de l'ensemble E, $\overset{*}{f}{}_n^\mu(p_\mu)\in E$ pour $n=1,2,\ldots$, donc $f_n^\mu(p_\mu)\,\overline{\in}\, M-E$ et $p_\mu\,\overline{\in}\, f_n^\mu(M-E)$ pour $n=1,2,\ldots$, d'où, d'après $p_\mu\in Q$ (et, d'après $f_n^\mu=f_n$ pour $n=1,2,\ldots$)

(12) $$Q-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(M-E)\neq 0.$$

Q pouvant être un ensemble quelconque de la famille Φ, la formule (8) prouve que l'ensemble E a au moins un élément commun avec tout ensemble de la famille Φ, et les formules (11) et (12) prouvent que les ensembles $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(E)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(M-E)$ ne contiennent aucun ensemble de la famille Φ. Enfin $f_1,f_2,f_3,\ldots$ pouvant être une suite infinie quelconque de transformations de la famille F, on voit que l'ensemble E satisfait aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

Soit maintenant M l'ensemble de tous les points de l'espace à un nombre fini m de dimensions et soient Φ la famille de tous les ensembles parfaits de cet espace et F la famille de toutes les transformations isométriques de l'espace M en lui-même (c'est-à-dire de toutes les superpositions de l'ensemble M avec lui-même).

L'ensemble M et les familles Φ et F sont, comme on sait, de puissance $2^{\aleph_0}$: on leur peut donc appliquer notre théorème. Or, comme on sait, si E et H sont deux ensembles superposables, situés dans l'espace M à m dimensions, il existe une transformation isométrique de l'espace M en lui-même qui transforme E en H. Il résulte donc de notre théorème ce

Corollaire: *R_m étant l'espace à m (m fini) dimensions, il existe un ensemble E situé dans R_m ayant des points communs avec tout ensemble parfait de R_m et tel que si E_1, E_2, $E_3,\ldots$ est une suite infinie d'ensembles situés dans R_m, dont chacun est superposable (par translation, rotation ou symétrie) avec E, l'ensemble $E_1+E_2+E_3+\ldots$ ne contient aucun sous-ensemble parfait.*

L'ensemble E satisfaisant aux conditions de notre corollaire ne peut pas évidemment être de mesure nulle (le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle contenant un sous-ensemble parfait). Or, il résulte aussi des conditions de notre corollaire que l'ensemble E ne contient aucun sous-ensemble parfait (puisque dans le cas contraire, tout ensemble superposable avec E, donc, à plus forte raison, l'ensemble $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, contiendrait un sous-ensemble parfait). Il en résulte donc que l'ensemble E ne peut pas être de mesure intérieure positive. Comme il n'est pas de mesure nulle, il est donc non mesurable (L). Or, l'ensemble $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, comme dépourvu de sous-ensemble parfait, est de mesure intérieure nulle. Le problème de M. Szpilrajn est ainsi résolu affirmativement.

Sur l'extension de la mesure lebesguienne *).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Introduction. La mesure linéaire $m(E)$ de M. Lebesgue satisfait aux conditions suivantes [1]:

I. *Deux ensembles superposables ont même mesure;*

II. *La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures;*

III. *La mesure de l'intervalle* $[0, 1]$ *est* 1.

Cette mesure est définie pour les ensembles dits *mesurables* (L) et on sait, d'après le résultat bien connu de M. Vitali, qu'il n'existe aucune fonction satisfaisant à ces conditions, définie pour *tous* les ensembles linéaires [2]).

La note présente est consacrée à diverses *extensions* de la mesure lebesguienne. On sait qu'il existe une extension de cette mesure qui est une fonction complètement additive [3]) sur un corps d'ensembles contenant certains ensembles non mesurables (L) [4]). Pour obtenir une telle extension il suffit p. ex. de considérer un ensemble Z non mesurable (L) de mesure lebesguienne intérieure nulle et de poser $\mu(E) = m(M)$ pour chaque ensemble E de la

*) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) le 4. I. 1935.

[1]) Voir H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration*, Paris 1927, p. 110.

[2]) Voir p. ex. F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401.

[3]) c.-à-d. qui satisfait à la condition II.

[4]) Cf. O. Nikodym: *Sur les fonctions d'ensembles*. C. R. du I Congrès Slave, Varsovie 1929, p. 310.