Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans la note précédente [1]), M. Montgomery a étendu à l'aide d'une méthode très intéressante plusieurs théorèmes qui n'étaient établis jusqu'à présent que pour les espaces séparables aux espaces métriques les plus généraux: séparables ou non. Dans le même ordre d'idées je vais établir quelques résultats nouveaux et je vais démontrer, en me servant des symboles logiques, plusieurs énoncés de M. Montgomery d'une façon qui me paraît bien simple. En outre, je vais étudier de plus près quelques problèmes non résolus concernant les espaces non-séparables. A cette occasion je vais démontrer que tout espace métrique borné se laisse prolonger en un espace vectoriel normé et complet (ce qui implique — du moins pour les espaces bornés — le théorème bien connu de M. Hausdorff sur le prolongement des espaces métriques en espaces complets).

1. L'opération $\mathcal{M}$, considérée par M. Montgomery.

Soit $\{G_\xi\}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ (l'espace), l'indice ξ parcourant un ensemble ordonné Ξ. Posons, pour abréger

(1) $$K_\xi = G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta,$$

d'où

(2) $$K_\xi K_\eta = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta.$$

[1]) *Non-separable metric spaces*, ce vol., p. 527.

Etant donnée une famille d'ensembles $X_\xi \subset \mathcal{X}$, avec $\xi \in \Xi$, appelons *résultat de l'opération $\mathcal{M}$, effectuée sur les ensembles X_ξ*, la somme

$$S = \sum_\xi X_\xi K_\xi$$

(la famille G_ξ étant considérée comme fixe).

Théorème. *L'opération $\mathcal{M}$ est additive, multiplicative et, dans le cas où $\mathcal{X} = \sum_\xi K_\xi$, soustractive.*

Démonstration. L'additivité de l'opération $\mathcal{M}$ est immédiate: elle signifie que l'égalité $X_\xi = \sum_\alpha X_\xi^\alpha$ (où α parcourt un ensemble d'indices arbitraire) entraîne

(3) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi \sum_\alpha X_\xi^\alpha K_\xi = \sum_\alpha \sum_\xi X_\xi^\alpha K_\xi.$$

Pour démontrer que l'opération $\mathcal{M}$ est multiplicative, posons $X_\xi = \prod_\alpha X_\xi^\alpha$. Il vient [1]), en vertu de (2)

(4) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi \prod_\alpha X_\xi^\alpha K_\xi = \prod_\alpha \sum_\xi X_\xi^\alpha K_\xi.$$

Enfin, en posant $X_\xi = \mathcal{X} - X'_\xi$, il vient

(5) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi (K_\xi - X'_\xi) = \sum_\xi K_\xi - \sum_\xi K_\xi X'_\xi,$$

car, d'une part

$$K_\xi = K_\xi X_\xi + K_\xi X'_\xi, \quad \text{d'où} \quad \sum_\xi K_\xi = \sum_\xi K_\xi X_\xi + \sum_\xi K_\xi X'_\xi$$

et d'autre part, selon (2)

$$(K_\xi X_\xi)\cdot(K_\eta X'_\eta) = 0, \quad \text{d'où} \quad \Big(\sum_\xi K_\xi X_\xi\Big)\cdot\Big(\sum_\xi K_\xi X'_\xi\Big) = 0.$$

[1]) d'après la règle générale suivante: si quels que soient α, β et $\eta \neq \xi$, on a $A_{\xi,\alpha}\cdot A_{\eta,\beta} = 0$, alors $\sum_\xi \prod_\alpha A_{\xi,\alpha} = \prod_\alpha \sum_\xi A_{\xi,\alpha}$.

En effet, si $p \in \prod_\alpha \sum_\xi A_{\xi,\alpha}$, à chaque α correspond un ξ_α tel que $p \in A_{\xi_\alpha,\alpha}$. Par hypothèse, tous les ξ_α ont une valeur commune ξ (pour p fixe) et il vient $p \in \prod_\alpha A_{\xi,\alpha} \subset \sum_\xi \prod_\alpha A_{\xi,\alpha}$.

Les formules (4) et (5) impliquent la soustractivité de l'opération $\mathcal{M}$ (dans le cas où $\mathcal{X}=\sum_\xi K_\xi$).

L'opération $\mathcal{M}$ étant ainsi distributive par rapport aux opérations de l'addition et de la multiplication, *il en est de même de son rapport aux opérations de Hausdorff* [1]) (et, en particulier, à l'opération $\mathcal{A}$ de Souslin-Lusin). Plus précisément, si X_ξ s'obtient des ensembles $X_\xi^1, X_\xi^2, \dots$ à l'aide de l'opération de Hausdorff à base $\mathcal{B}$, et si S s'obtient des ensembles X_ξ à l'aide de l'opération $\mathcal{M}$, on parvient au même résultat en effectuant d'abord l'opération $\mathcal{M}$ sur chaque famille $\{X_\xi^n\}$, avec n fixe, et puis en effectuant sur les ensembles ainsi obtenus l'opération de Hausdorff à base $\mathcal{B}$.

On a, en effet, $X_\xi = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n X_\xi^{\mathfrak{z}^n}$ où $\mathfrak{z}\in\mathcal{B}$. Il vient

$$(6)\qquad \sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n X_\xi^{\mathfrak{z}^n}\cdot K_\xi = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n \Big\{ \sum_\xi X_\xi^{\mathfrak{z}^n}\cdot K_\xi \Big\}$$

en vertu des formules (3) et (4).

2. Applications topologiques. Admettons, à présent, que $\mathcal{X}$ soit un espace métrique et que les ensembles G_ξ soient ouverts. Posons avec M. Montgomery

$$X_\xi^n = X_\xi \cdot K_\xi \cdot \underset{x}{E}\,[\varrho(x, \mathcal{X}-G_\xi) \geqslant 1/n]\ ^{2)}.$$

Il vient

$$X_\xi \cdot K_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} X_\xi^n, \quad \text{d'où} \quad S = \sum_\xi X_\xi \cdot K_\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_\xi X_\xi^n,$$

et

$$\varrho(X_\eta^n, X_\xi^n) \geqslant 1/n \quad \text{pour} \quad \eta \neq \xi,$$

ce qui implique que l'ensemble X_ξ^n est simultanément fermé et ouvert relativement à la somme $\sum_\xi X_\xi^n$.

[1]) Etant donnés un ensemble $\mathcal{B}$ de suites infinies d'entiers positifs et une suite d'ensembles $X^1, X^2, \dots$, on dit que l'ensemble X s'obtient de cette suite d'ensembles à l'aide de l'opération de Hausdorff à base $\mathcal{B}$, lorsque

$$X = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n X^{\mathfrak{z}^n},$$

où $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots \mathfrak{z}^n, \dots]$ désigne une suite variable parcourant l'ensemble $\mathcal{B}$.

[2]) $\varphi(x)$ étant une fonction propositionnelle, $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ désigne l'ensemble de tous les x qui lui satisfont.

$\varrho(X, Y)$ = borne inférieure des distances $|x-y|$ où $x\in X$ et $y\in Y$.

On constate aussitôt que, *si X_ξ est fermé*, il en est de même de X_ξ^n et de $\sum_\xi X_\xi^n$; donc *S est un F_σ* (c. à d. somme dénombrable d'ensembles fermés).

D'une façon analogue, *si X_ξ est non-dense*, $\sum_\xi X_\xi^n$ l'est également comme somme d'ensembles non-denses et ouverts par rapport à elle [1]). *L'ensemble S est dans ce cas de 1^{re} catégorie* (c à d. somme dénombrable d'ensembles non-denses).

En tenant compte du fait que l'opération $\mathcal{M}$ est additive et multiplicative, on en conclut que *les propriétés suivantes sont des invariants de l'opération $\mathcal{M}$:*

1° *d'être un ensemble borelien de classe F_α* [2]) *avec $\alpha>0$ (F_σ, $F_{\sigma\delta}$ etc.)*,
2° *d'être de 1^{re} catégorie*,
3° *propriété de Baire au sens large* [3]).

En ce qui concerne les classes G_α, on voit d'abord que dans le cas où X_ξ est un G_δ, la somme S est, en vertu de la soustractivité de l'opération $\mathcal{M}$, un G_δ par rapport à l'ensemble $\sum_\xi K_\xi$. Ce dernier étant un F_σ (selon 1°), S est donc la partie commune d'un G_δ et d'un F_σ.

Pour $\alpha>1$ on constate aussitôt que la propriété

4° *d'être de classe G_α ($G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$ etc.)*

est un invariant de l'opération $\mathcal{M}$.

D'une façon analogue, en s'appuyant sur la form. (6), on conclut que *la propriété d'être le résultat d'une opération de Hausdorff effectuée sur des ensembles F_σ est invariante par rapport à l'opération $\mathcal{M}$*. Il en est ainsi en particulier des *ensembles $\mathcal{A}$* de Souslin-Lusin (ainsi que de leurs complémentaires).

[1]) Voir ma *Topologie I* (Monogr. Matem. 3, Varsovie 1933), p. 32.

[2]) Les ensembles fermés sont dits des F_0. Les F_α pour α impair (pair), sont des sommes (produits) dénombrables d'ensembles F_ξ, avec $\xi<\alpha$. Les G_α sont des complémentaires des F_α.

[3]) Un ensemble E est dit *à propriété de Baire au sens large* s'il est somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de première catégorie. Si pour chaque ensemble X, l'ensemble EX jouit de cette propriété relativement à X, il est dit à propriété de Baire *au sens restreint*.

On constate facilement que le théorème considéré reste valable pour la propriété de Baire au sens restreint.

2 a. Cas où l'ensemble Ξ est bien ordonné. *Dans ce cas la propriété d'être un G_δ est un invariant de l'opération $\mathcal{M}$.*

En effet, les ensembles K_ξ, définis par la formule (1), satisfont alors à l'égalité

$$(7)\qquad \sum_\xi K_\xi = \sum_\xi G_\xi, \quad \text{d'où} \quad \sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi G_\xi - \sum_\xi X'_\xi K_\xi,$$

en vertu de (5). L'ensemble $\sum_\xi X'_\xi K_\xi$ étant un F_σ (cf. N° 2, 1°), l'ensemble $S = \sum_\xi X_\xi K$ est un G_δ.

Remarque. *L'hypothèse du bon ordre est essentielle.*

Soient, en effet, $X_\xi = \mathcal{X} =$ l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, Ξ l'ensemble non-dense de Cantor, G_ξ l'intervalle $0 \leqslant x < \xi$. On voit aussitôt que, lorsque ξ n'est pas une extrémité droite d'un intervalle contigu, l'ensemble $K_\xi = G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta$ est vide, tandis que, dans le cas contraire, il coïncide avec cet intervalle contigu (ouvert) augmenté de son extrémité gauche. L'ensemble S est donc somme de tous les intervalles contigus (ouverts) et de leurs extrémités gauches. Evidemment S n'est pas un G_δ (puisque les extrémités gauches ne constituent pas un G_δ)

La formule (7) conduit à une application intéressante concernant la *localisation* des propriétés invariantes relativement à l'opération $\mathcal{M}$ (l'ensemble Ξ étant supposé bien ordonné). Soit notamment $\boldsymbol{P}$ une propriété de ce genre et désignons par E_p l'ensemble des points x de E pour lesquels il existe un ensemble ouvert $G(x)$ contenant x et tel que $E \cdot G(x)$ jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$. *L'ensemble E_p jouit alors de la propriété $\boldsymbol{P}$* [1]).

En effet, rangeons tous les ensembles $G(x)$ en une suite transfinie $G_1, G_2, \ldots, G_\xi, \ldots$ et posons $X_\xi = E\, G_\xi$. Il vient

$$E_p = \sum_\xi E\, G_\xi = \sum_\xi E\, K_\xi = \sum_\xi X_\xi K_\xi.$$

L'ensemble X_ξ jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$, l'invariance de cette propriété par rapport à l'opération $\mathcal{M}$ implique que E_p en jouit également.

[1]) Cf. Montgomery, l. cit. et S. Banach, Fund. Math. 16, p. 395 (localisation de la notion de première catégorie).

3. Un théorème sur les fonctions propositionnelles de deux variables. Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique arbitraire. Imaginons le bien ordonné en une suite transfinie $p_1, p_2, \ldots, p_\xi, \ldots$ Soit $G_1, G_2, \ldots, G_\xi \ldots$ une suite d'ensembles ouverts tels que $\mathcal{X} = \sum_\xi G_\xi$. A chaque point x de l'espace faisons correspondre l'indice minimum $\xi(x)$ tel que $x \in G_{\xi(x)}$. Posons $w(x) = p_{\xi(x)}$. On a donc l'équivalence:

$$(8)\qquad \{p_\xi = w(x)\} \equiv \Big\{x \in G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta\Big\} \equiv \{x \in K_\xi\}.$$

Soit $\boldsymbol{P}$ une propriété d'ensembles invariante par rapport à l'opération $\mathcal{M}$ (l'ensemble Ξ étant supposé bien ordonné) et par rapport à la multiplication cartésienne [1]) par l'espace $\mathcal{X}$ [2]). Les applications à la Théorie des fonctions faites par M. Montgomery de sa méthode reposent, au fond, sur le théorème suivant:

Théorème. *Etant donnée une fonction propositionnelle $\varphi(x,y)$ de deux variables (parcourant l'espace $\mathcal{X}$), si quel que soit x, l'ensemble $\underset{y}{\boldsymbol{E}}\, \varphi(x,y)$ jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$, l'ensemble $\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, \varphi[w(x),y]$ en jouit également.*

Démonstration. En employant, comme d'habitude, l'opérateur logique $\sum_\xi$ dans le sens: „il existe un ξ tel que...", on a les équivalences:

$$\varphi[w(x),y] \equiv \sum_\xi \varphi(p_\xi, y)\, [p_\xi = w(x)] \equiv \sum_\xi \varphi(p_\xi, y) \Big[x \in \Big(G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta\Big)\Big].$$

Il vient [3])

$$\begin{aligned} \underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, \varphi[w(x), y] &= \underset{xy}{\boldsymbol{E}} \sum_\xi \varphi(p_\xi, y) \Big[x \in \Big(G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta\Big)\Big] = \\ &= \sum_\xi \Big\{\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, \varphi(p_\xi, y) \cdot \underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, x \in \Big(G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta\Big)\Big\} = \\ &= \sum_\xi \Big\{\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, \varphi(p_\xi, y) \cdot \underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, (x \in G_\xi) - \sum_{\eta<\xi} \underset{xy}{\boldsymbol{E}}\, x \in G_\eta\Big\}. \end{aligned}$$

[1]) Le „produit cartésien" $A \times B$ des ensembles A et B se compose par définition des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$. Voir par ex. *Topologie I*, p. 7.

[2]) Telles sont en particulier les propriétés 1°—4° du N 2 (cf. l. cit. p. 140, III et 161). Cependant la propriété de Baire *au sens restreint* n'est pas invariante par rapport à la multiplication cartésienne par l'espace (du moins si l'on admet l'hypothèse du continu). Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 22, p. 54.

[3]) Pour les règles du calcul avec l'opérateur Σ, d'ailleurs très simples, voir par ex. *Topologie I*, §§ 1 et 2.

Posons $\underset{xy}{E}\,\varphi(p_\xi, y) = X_\xi$ et $\underset{xy}{E}\, x \in G_\xi = G_\xi^*$.

Par conséquent $X_\xi = \mathcal{X} \times \underset{y}{E}\,\varphi(p_\xi, y)$ et $G_\xi^* = \mathcal{X} \times G_\xi$, d'où on conclut que G_ξ^* est un ensemble ouvert (dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$) et que X_ξ jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$.

Il vient, en même temps,

$$\underset{xy}{E}\,\varphi[w(x), y] = \sum_\xi \Big(X_\xi G_\xi^* - \sum_{\eta<\xi} G_\eta^*\Big)$$

et la propriété $\boldsymbol{P}$ étant invariante par rapport à l'opération $\mathcal{M}$, elle appartient à l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi[w(x), y]$.

4. Applications à la Théorie des fonctions. Considérons, à présent, le cas où G_ξ est la sphère (ouverte) de centre p_ξ et de rayon $^1/_n$. Désignons par $w_n(x)$ la fonction $w(x)$ de la formule (8). On a évidemment

(9) $$|w_n(x) - x| < {}^1/_n, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} w_n(x) = x.$$

Nous établirons, à présent, les deux théorèmes de M. Montgomery.

1) *Toute fonction de deux variables $f(x,y)$, continue par rapport à x et de classe $\alpha > 0$* [1]) *par rapport à y* [2]), *est de classe $\alpha+1$ (par rapport à x,y).*

Il s'agit de démontrer que, F étant un ensemble fermé, l'ensemble $\underset{xy}{E}\{f(x,y)\in F\}$ est de classe $\alpha+1$ multiplicative.

Or, désignons par S_n la sphère ouverte de centre F et de rayon $^1/_n$.

D'une façon générale, si la suite $z_1, z_2, \ldots$ converge vers z, on a l'équivalence [3])

$$\{z \in F\} \equiv \prod_n \sum_k z_{n+k} \in S_n.$$

Donc, en posant $z = f(x,y)$ et $z_n = f[w_n(x), y]$ et en tenant compte de l'égalité $\lim_{n=\infty} f[w_n(x), y] = f[\lim_{n=\infty} w_n(x), y] = f(x,y)$, qui résulte de la

[1]) Pour $\alpha = 0$, voir *Topologie I*, p. 181.

[2]) Une fonction $y = f(x)$ est dite de classe α, lorsque l'ensemble $\underset{x}{E}f(x)\in F$ est de classe α multiplicative (c. à d. F_α ou G_α suivant que α est pair ou impair), quel que soit l'ensemble fermé F situé dans l'espace des y.

[3]) Ibid., p. 184 (i).

continuité de la fonction f par rapport à x et de l'égalité (9), — il vient

$$\{f(x,y) \in F\} \equiv \prod_n \sum_k f[w_{n+k}(x), y] \in S_n,$$

d'où

$$\underset{xy}{E}\{f(x,y)\in F\} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underset{xy}{E}\{f[w_{n+k}(x), y] \in S_n\}.$$

Posons dans le théorème du N° 3

$$\varphi(x,y) \equiv \{f(x,y) \in S_n\}.$$

L'ensemble $\underset{y}{E}\,\varphi(x,y)$ étant, pour chaque x, de classe α additive (puisque la fonction f est de classe α par rapport à y), il en est de même de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi[w_{n+k}(x), y]$. L'ensemble $\underset{xy}{E}\{f(x,y)\in F\}$ est donc de classe $\alpha+1$ multiplicative, c. q. f. d.

D'une façon analogue, *toute fonction de deux variables, continue par rapport à une et jouissant de la propriété de Baire (au sens large)* [1]) *par rapport à l'autre, jouit de la propriété de Baire.*

2) *La fonction $f(x)$ étant de classe α, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ est de classe α multiplicative.*

En effet, l'inégalité (9) entraîne l'équivalence

$$\{a = b\} \equiv \prod_n |w_n(a) - b| \leqslant {}^1/_n,$$

d'où

$$\{y = f(x)\} \equiv \prod_n |w_n(y) - f(x)| \leqslant {}^1/_n,$$

et

$$I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\} = \prod_{n=1}^{\infty} \underset{xy}{E}\{|w_n(y) - f(x)| \leqslant {}^1/_n\}.$$

Posons dans le théorème du N° 3

$$\varphi(x,y) = \{|y - f(x)| \leqslant {}^1/_n\}.$$

L'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x,y)$ étant, pour chaque y, de classe α multi-

[1]) Une fonction f jouit de la propriété de Baire, lorsque, pour chaque F fermé, l'ensemble $\underset{x}{E}f(x)\in F$ jouit de cette propriété.

plicative (puisque f est de classe α), il en est de même [1]) de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi[x, w_n(y)] = \underset{xy}{E}\{|w_n(y) - f(x)| \leqslant 1/n\}$.

L'ensemble I est donc de classe α multiplicative.

D'une façon analogue, *si f jouit de la propriété de Baire au sens large, I en jouit également.*

5. ***Problème de la représentation analytique.*** *Etant donnée une fonction $f(x)$ de I^re^ classe [2]) qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}$, existe-t-il un espace $\mathcal{Y}^*$ qui contient topologiquement $\mathcal{Y}$ et une suite de fonctions continues $f_n(x)$ dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}^*$ telles que $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$?*

Ce problème n'est résolu jusqu'à présent que dans l'hypothèse que l'espace $\mathcal{Y}$ est séparable: dans ce cas on peut admettre pour $\mathcal{Y}^*$ l'espace de Hilbert [3]). Si la solution du problème est positive, on pourra en déduire que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de I^re^ classe est de I^re^ catégorie [4]), théorème qui n'est établi que pour $\mathcal{Y}$ séparable [5]).

Il est, peut-être, intéressant de remarquer que le problème considéré se laisse réduire au suivant: étant donnée une fonction $f(x)$ de I^re^ classe qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un espace $\mathcal{Y}$ vectoriel normé et complet [6]), existe-t-il une suite de fonctions continues $f_n(x)$ dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$ et telles que $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$?

Cette réduction du problème repose sur le théorème du N^o^ suivant.

6. Prolongement d'espace métrique en espace vectoriel.

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques arbitraires, on désigne par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ l'espace de toutes les fonctions continues bornées qui transforment $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$; la distance entre deux fonctions f et g est donnée par la formule:

$$|f - g| = \text{borne supérieure de } |f(x) - g(x)|.$$

Si $\mathcal{Y}$ est *complet*, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ l'est également [7]). De plus, si $\mathcal{Y} = \mathcal{E} =$

[1]) Nous admettons que $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 0$ la démonstration est immédiate.

[2]) Bien entendu, le même problème peut être formulé pour une classe α arbitraire.

[3]) Cf. *Topologie I*, p. 187, IX.

[4]) Ibid., p. 189.

[5]) Ce qui impliquerait la solution positive du problème posé par M. Montgomery à la fin de sa Note.

[6]) Pour la définition, voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Matem. 1 (1932), p. 53.

[7]) Voir *Topologie I*, p. 199.

l'ensemble des nombres réels, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est *vectoriel et normé* (avec les définitions habituelles de somme de deux fonctions et de multiplication par un coefficient réel).

Théorème. *Tout espace borné $\mathcal{X}$ est isométrique à un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$.*

Il s'agit de faire correspondre à chaque élément p de x une fonction f_p, à valeurs réelles, continue et bornée de façon que l'on ait

$$|p - q| = |f_p - f_q|. \tag{10}$$

Or, posons $f_p(x) = |x - p|$.

Il vient, d'après la „règle du triangle":

$|f_p(x) - f_q(x)| = ||x - p| - |x - q|| \leqslant |p - q|$, d'où $|f_p - f_q| \leqslant |p - q|$ et, d'autre part, $|f_p(p) - f_q(p)| = |p - q|$, d'où la formule (10).

Chaque espace métrique étant homéomorphe à un espace borné, on a le

Corollaire. *Tout espace métrique est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé et complet.*

7. Fonctions ponctuellement discontinues sur tout ensemble fermé [1]).

$y = f(x)$ étant une fonction de ce genre et F un ensemble fermé et ouvert (dans l'espace des y), l'ensemble $E = \underset{x}{E}\{f(x) \in F\}$ est développable en une série alternée (transfinie) d'ensembles [2]) fermés décroissants.

Notre théorème sera démontré dès que nous aurons établi que, pour chaque ensemble fermé X, l'égalité $X = \overline{XE} \cdot \overline{X - E}$ entraîne $X = 0$ [3]).

Or, supposons que $X \neq 0$. Il existe alors, par hypothèse, un point de continuité p de la fonction partielle $g = f/X$. Par conséquent l'inclusion $X \subset \overline{XE}$ implique que $g(p) \in F$, donc que $f(p) \in F$.

[1]) Une fonction f est dite *ponctuellement discontinue sur l'ensemble A*, lorsque les points de continuité de la fonction partielle f/A (c. à d. de la fonction f dont les arguments sont restreints à l'ensemble A) constituent un ensemble dense dans A.

[2]) c. à d. en un ensemble de la forme $A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2\xi} - A_{2\xi+1} + \ldots$

[3]) Voir *Topologie I*, p. 61, V, 1^o^.

Par raison de symétrie, on conclut que l'inclusion $X \subset \overline{X-E}$ implique que $f(p) \epsilon \overline{\mathcal{Y}-F}$ et, comme F est ouvert, il en résulte que $f(p) \epsilon \mathcal{Y}-F$, ce qui est incompatible avec $f(p) \epsilon F$.

Le théorème que nous venons d'établir se rattache au *problème de l'invariance de la séparabilité*. Nous en déduirons, notamment que *la séparabilité de l'espace est invariante par rapport aux transformations f ponctuellement discontinues sur tout ensemble G_δ* [1]).

Supposons, en effet, que l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ ne soit pas séparable. Il contient alors un ensemble $\mathcal{Y}^*$ fermé, isolé et de puissance $\aleph_1$: $y_1, y_2, \dots y_\xi, \dots$ $(\xi < \Omega)$ [2]).

Posons

$$\mathcal{X}^* = \underset{x}{E} f(x) \epsilon \mathcal{Y}^* \quad \text{et} \quad F_\xi = (y_1, y_2, \dots y_\xi).$$

L'ensemble $\mathcal{X}^*$ étant un G_δ (puisque f est de Ire classe) [3]), la fonction partielle $f^* = f/\mathcal{X}^*$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé (dans $\mathcal{X}^*$, même sur tout G_δ). L'ensemble F_ξ étant fermé et ouvert dans $\mathcal{Y}^*$, on conclut du théorème précédent que l'ensemble $A_\xi = \underset{x}{E} f^*(x) \epsilon F_\xi$ est développable en une série d'ensembles décroissants fermés (dans $\mathcal{X}^*$). On parvient ainsi, en faisant varier l'indice ξ, à une famille bien ordonnée et indénombrable d'ensembles A_ξ développables croissants. $\mathcal{X}^*$ ne peut donc être séparable [4]); il en est de même de $\mathcal{X}$, c. q. f. d.

Le problème s'impose *d'étendre le théorème précédent aux fonctions de classe* $\alpha \geqslant 1$.

Or la solution est positive s'il en est ainsi de la solution du problème de la représentation analytique (du N° 5). En effet, la condition $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$ entraîne l'inclusion $f(\mathcal{X}) \subset \overline{\sum_n f_n(\mathcal{X})}$. Donc, si $f_n(\mathcal{X})$ est séparable, il en est de même de $\overline{\sum_n f_n(\mathcal{X})}$ et de $f(\mathcal{X})$. De plus, si f_n est continue, $f_n(\mathcal{X})$ est séparable.

Il est aussi à remarquer que l'on obtiendrait la solution positive du problème considéré, si l'on savait démontrer que *chaque espace séparable indénombrable contient un ensemble non-borelien* [5]). Considérons, en effet, l'ensemble $\mathcal{Y}^* = (y_1, y_2, \dots y_\xi \dots)$

[1]) Si l'espace $\mathcal{X}$ est complet et $\mathcal{Y}$ séparable, ces transformations coïncident avec les fonctions de Ire classe, donc avec les fonctions ponctuellement discontinues sur tout ensemble fermé.

[2]) Voir *Topologie I*, p. 254, 3.

[3]) Cf. Montgomery, p. 533.

[4]) d'après un théorème de M. Zalcwasser, Fund. Math. 3 (1922), p. 44. Cf. *Topologie I*, p. 207.

[5]) Cette dernière proposition résulte facilement de l'hypothèse du continu. Sans restreindre la généralité on peut admettre que *l'espace est contenu dans l'intervalle*, puisque chaque espace séparable est une image continue d'un sous-ensemble de l'intervalle. On rapprochera ce dernier problème de celui de M. Hausdorff: étant donné un ensemble E de puissance $\aleph_1$, démontrer que, pour chaque suite infinie d'ensembles $A_1, A_2, \dots$, il existe un sous-ensemble de E qui n'est pas la limite supérieure d'une suite extraite de la suite donnée (Fund. Math. 20, p. 286).

de la démonstration précédente et faisons correspondre à chaque ξ un x_ξ tel que $f(x_\xi) = y_\xi$. L'ensembe $A = (x_1, x_2, \dots x_\xi, \dots)$ est donc indénombrable. S'il contient un ensemble non-borelien (relativement à lui), la fonction f ne peut être de classe α, car, autrement — chaque sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ étant fermé — chaque sous-ensemble de A serait borelien (de classe α).

8. *Autres problèmes non résolus.*

1) Une fonction f de classe α est-elle limite d'une suite uniformément convergente de fonctions f_n de classe α telles que l'ensemble des valeurs de la fonction f_n soit isolé?

2) Etant données deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de classe α (resp. à propriété de Baire), la fonction $z(t)$, où $z=(x, y)$, est-elle de classe α (resp. à propriété de Baire)?

3) Etant donnée une fonction f jouissant de la propriété de Baire sur l'espace $\mathcal{X}$, existe-t-il un ensemble P de Ire catégorie tel que la fonction partielle $f(x/X-P)$ soit continue?

Tous ces problèmes se laissent résoudre positivement dans l'hypothèse que les espaces considérés sont séparables [1]).

[1]) Cf. *Topologie I*, pp. 186, 182, 194 et 192.