le carré fondamental. Pour simplifier le langage, nous conservons pour ces nouveaux cribles leurs anciennes notations. Soit $V_{C_n}$ l'ensemble des points où l'indice du crible $C_n$ est inférieur à tous les indices des cribles $C_m$, $m \neq n$. D'après le lemme fondamental, tous les ensembles $V_{C_n}$ sont des ensembles $A_2$. Il est évident que ces ensembles sont sans point commun deux à deux et que leur somme est le domaine fondamental tout entier. Donc tous ces ensembles sont des ensembles $B_2$. On aperçoit immédiatement que l'ensemble $CV_{C_n}$ renferme $E_n$, quel que soit $n$, et que $\prod_{n=1}^{\infty} CN_{C_n} = 0$, c. q. f. d.

***Théorème VII.*** *Si l'on supprime d'une infinité d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ du type $CA_2$ leur partie commune, les parties restantes sont toujours multiplement séparables au moyen d'ensembles $A_2$.*

Démonstration: Nous allons conserver les notations du théorème précédent, ainsi que l'hypothèse, que les cribles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ sont sans indices communs deux à deux. Soit $U_{C_n}$ l'ensemble des points où l'indice du crible $C_n$ est supérieur (égalité étant exclue) à l'indice de l'un au moins des cribles $C_m$ $(m \neq n)$. D'après le lemme fondamental, $U_{C_n}$ est un ensemble $A_2$. Evidemment

$$E_n - \prod_{n=1}^{\infty} E_n \subset U_{C_n} \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} U_{C_n} = 0.$$

---

# Homotopie, Homologie und lokaler Zusammenhang.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Dem Andenken meines Lehrers Hans Hahn in dankbarer Verehrung gewidmet.

In der topologischen Forschung der letzten Zeit spielt eine ausserordentlich wichtige Rolle der Begriff des höherstufigen lokalen Zusammenhanges — eine Verallgemeinerung der klassischen Begriffsbildung von Hahn und Mazurkiewicz.

Man kann den höherstufigen lokalen Zusammenhang auf zweierlei Weise einführen, je nachdem man vom mengentheoretischen Begriff der *Homotopie* oder vom kombinatorischen Begriff der *Homologie* ausgeht.

Auf den ersten Standpunkt stellt sich Lefschetz[1]) und definiert einen Raum $R$ als *lokal zusammenhängend bis zur n-ten Ordnung* ($n = 0, 1, 2, \ldots$), wenn es zu jedem Punkt $p$ von $R$ und zu jeder Umgebung $U$ von $p$ eine Umgebung $V$ von $p$ gibt, so dass jedes in $V$ liegende stetige Bild der $m$-Sphäre ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$) sich in $U$ in einen Punkt zusammenziehen lässt.

Dem zweiten Standpunkt entspricht die Definition von Alexandroff[2]) und Čech[2a]), die aus der Lefschetz'schen entsteht, wenn man Sphärenbilder durch Zykeln und Homotopien durch Homologien ersetzt[2b]).

[1]) *Topology* (1920), p. 91, Vgl. auch Ann. of Math. 35, p. 119 und C. Kuratowski, Fund. Math. 24, p. 269.

[2]) Ann. of Math. 36, p. 1 [vgl. auch Ann. of Math. 30 (1928), p. 81, Fussnote [63])].

[2a]) Vgl. Comp. Math. 2, p. 1—25.

[2b]) Wie ich erfahre, waren beide Begriffe des lokalen Zusammenhanges Alexander bekannt.

Im Folgenden wird das Verhältnis zwischen diesen Begriffsbildungen geklärt. Es wird sich überraschenderweise herausstellen, dass für Räume, die lokal zusammenhängend *von der Ordnung* 1 im Lefschetz'schen Sinne sind, die Letschetz'sche Definition des lokalen Zusammenhanges höherer Ordnung gleichwertig der Alexandroff-Čech'schen ist [3]).

**Theorem I.** *Damit ein kompakter Raum $R$ lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n$ im Lefschetzschen Sinne sei* ($n \geqq 1$), *ist notwendig und hinreichend, dass es zu jedem Punkt $p$ von $R$ und zu jeder Umgebung $U(p)$ eine Umgebung $V(p)$ gebe, so dass erstens jeder in $V$ verlaufende geschlossene Weg* [3a]) *sich in $U$ in einen Punkt zusammenziehen lässt und zweitens jede in $V$ liegende Fundamentalfolge* [4]) *von $m$-dimensionalen Zykeln* ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$) *in $U$ homolog* 0 *sei* [4a]).

Man darf im Wortlaut des Theorems (worauf wir hier nicht näher eingehen wollen) die stetigen Wege durch die Vietoris'schen Fundamentalfolgen von $\varepsilon$-Wegen [5]) ersetzen, wobei natürlich auch die Zusammenziehbarkeit im Vietoris'schen Sinne [5]) zu deuten ist. Betrachtet man mit Vietoris die Homologiegruppen und die Fundamentalgruppen eines metrischen Raumes als topologische Gruppen, so kann man (wie sich's zeigen lässt) dem Theorem I auch die folgende Formulierung geben:

**Theorem II.** *Damit der kompakte Raum $R$ lokal zusammenhängend (im Lefschetz'schen Sinne) bis zur Ordnung $n$ sei, ist notwendig und hinreichend dass für jede offene Menge $G$ von $R$ die Homologiegruppen (die Bettischen Gruppen) von $G$ von den Dimensionen* $0, 1, 2, \ldots, n$ *und die Fundamentalgruppen von $G$ in jedem Punkt (man kann auch sagen: die Fundamentalgruppe jeder Komponente von $G$) diskrete Gruppen seien.*

Man darf hier das Wort „Fundamentalgruppe" durch „Kommutatorgruppe der Fundamentalgruppe" ersetzen, denn die Faktorgruppe der Fundamentalgruppe nach der Kommuntatorgruppe ist, wie man leicht zeigen kann, der ersten Homologiegruppe isomorph. Auf Grund dieser Bemerkung kann man zeigen, dass für lokal kompakte topologische Gruppen die beiden oben erwähnten Definitionen des lokalen Zusammenhanges *völlig* gleichwertig sind.

Dass die Bedingung des Theorems I notwendig ist, ist ziemlich trivial (siehe unten). Der Nachdruck des Theorems liegt auf der Tatsache, dass die Bedingung *hinreichend* ist. Dadurch wird „im Kleinen" derselbe Sachverhalt zum Ausdruck gebracht, den wir „im Grossen" bereits früher festgestellt haben [6]), und der mir von prinzipieller Wichtigkeit zu sein scheint: Die Homologiestruktur eines topologischen Gebildes in Verbindung mit seinen *eindimensionalen* Homotopieeigenschaften (Aussagen über die Fundamentalgruppe) gestattet weitgehende Schlüsse auf die *höherdimensionalen* Homotopieeigenschaften. Dieser Umstand lässt die grosse Tragweite der klassischen Begriffe der Analysis Situs (Fundamentalgruppe, Homologieinvarianten) erkennen.

Die *Beweisführung* beruht auf der Übertragung „ins Kleine" der Beweismethoden, die „im Grossen" in der oben zitierten Arbeit [7]) angewendet wurden. Nur sind diesmal erheblich kompliziertere Überlegungen erforderlich. Der Begriff der *Homotopiegruppe*

[3]) Dabei muss man in der Alexandroff'schen und Čech'schen Definition (vgl. a. a. O.) Zykeln mit ganzzahligen Koeffizienten benützen. Dass man die Forderung des lokalen Zusammenhanges von der Ordnung 1 nicht entbehren kann, ist an Beispielen leicht zu zeigen.

[3a]) „Geschlossener Weg" ist gleichbedeutend mit „stetige Abbildung der Kreislinie".

[4]) Vgl. Vietoris, Math. Ann. 97, pp. 454—472. (Als Koeffizientenbereich wird überall im Folgenden, wie bei Vietoris, der Bereich der ganzen Zahlen verwendet). Der Ausdruck „in $V$ liegende Fundamentalfolge" ist hier in dem Sinn gemeint, dass die einzelnen Zykeln der Folge in $V$ liegen, und für jedes $\varepsilon > 0$ von einem bestimmten Zykel an einander in $V$ (nicht nur in $R$!) $\varepsilon$-homolog sind. Allerdings bleibt der Satz richtig, wenn man nur die Homologie in $R$ verlangt, aber dadurch wird die interessantere Hälfte der Theorems abgeschwächt und sie wird noch mehr abgeschwächt, wenn man das Wort „Fundamentalfolge" durch „wahrer Zykel" im Sinne von Alexandroff (Math. Ann. 106, p. 178) ersetzt (wodurch die Richtigkeit des Theorems nicht beeinträchtigt wird).

[4a]) Es ist sehr leicht den Beweis auf *lokal kompakte* Räume zu übertragen. Wahrscheinlich gilt der Satz auch für *vollständige* Räume bei geeigneter Definition der Homologien (vgl. Hurewicz, Proc. Ac. Amst. 38, p. 521).

[5]) Vgl. Vietoris, a. a. O.

[6]) Vgl. meine Noten in Amst. Proceedings 38, pp. 112—119 und insbesondre pp. 521—529. Weitere drei Noten erscheinen demnächst in den Amst. Proceedings (alle Noten haben den gemeinsamen Tittel *„Beiträge zur Topologie der Deformationen"*).

[7]) Vgl. Amst. Proc. 38, pp. 521—529. In dieser Arbeit wurde der betrachtete Raum als lokal zusammenziehbar im Sinne von Borsuk vorausgesetzt. In Wirklichkeit wurde aber nur die schwächere Annahme benützt, dass der Raum lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n$ ist. Kombinieren wir die dortigen Resultate mit denen der vorliegenden Arbeit, so können wir den Satz aussprechen: Damit ein kompakter Raum $R$ „Peanosch in den Dimensionen $k \leqq n$" im Sinne von Kuratowski (vgl. a. a. O.) sei, ist notwendig und hinreichend, dass die ersten $n$ Homologiegruppen und die Fundamentalgruppe von $R$ sowohl integral als lokal verschwinden. Das lokale Verschwinden ist dabei im Sinne des Theorems I gemeint. Ein Spezialfall dieses Satzes besagt, dass unter den kompakten endlichdimensionalen Räumen die absoluten Retrakte von Borsuk durch *das integrale und lokale Verschwinden der Fundamentalgruppe und sämtlicher Homologiegruppen charakterisiert sind.*

spielt auch bei der jetzigen Fragestellung die entscheidende Rolle. Die §§ 1—4 sind der Vorbereitung des Beweises gewidmet. Die Sätze des § 1 sind teilweise bekannt.

1. **Erweiterung und Deformation von Abbildungen.** Der Ausdruck „lokal zusammenhängend" ist im Folgenden überall im Lefschetz'schen Sinne gemeint. Alle auftretenden Räume werden als metrisch (bzw. metrisierbar) vorausgesetzt. Sind $A$ und $B$ irgendwelche Räume, so bezeichnen wir, wie üblich, mit $B^A$ die als metrischen Raum aufgefasste Menge der stetigen Abbildungen von $A$ in $B$ [7a]). Zwei Abbildungen, die sich in $B^A$ durch einen stetigen Weg (einen Jordan'schen Bogen) verbinden lassen, heissen ineinander deformierbar oder einander *homotop*. Verläuft der Verbindungsbogen in einer Teilmenge $M^A$ ($M \subset B$), so sprechen wir von Deformierbarkeit (oder Homotopie) *in M*. Eine Abbildung, die einer Konstante (d. h. einer Abbildung, deren Wertmenge aus einem einzelnen Punkt besteht) homotop ist, wird auch „homotop 0" genannt.

***Satz 1.*** *Ist der Raum $R$ kompakt und lokal zusammenhängend bis zur $n$-ten Ordnung, so gelten die Aussagen:*

1a) *Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $P$ ein höchstens $(n+1)$-dimensionales Polyeder* (in einer bestimmten simplizialen Zerlegung) *und $Q$ ein Teilpolyeder von $P$, das sämtliche Eckpunkte von $P$ enthält, so lässt sich jede Abbildung $f \epsilon R^Q$, die je zwei demselben Simplex von $P$ angehörende Punkte von $Q$ in Punkte mit Abstand $< \eta_1$ überführt, zu einer Abbildung $F \epsilon R^P$ erweitern, die jedes Simplex von $P$ in eine Menge mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ überführt.*

1b) *Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\eta_2 = \eta_2(\varepsilon) > 0$, so dass für jedes höchstens $n$-dimensionale Polyeder $P$ je zwei Elemente von $R^P$, die eine Entfernung $< \eta_2$ voneinander haben, sich in $R^P$ durch einen Bogen mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ verbinden lassen.*

1c) *Zu jedem Punkt $a$ von $R$ und zu jeder Umgebung $U(a)$ gibt es eine Umgebung $U_1(a)$, so dass für jedes höchstens $n$-dimensionale Polyeder $P$ alle Abbildungen $F \epsilon U_1{}^P$ homotop 0 in $U$ sind.*

[7a]) Abbildung von $A$ *in* $B$ bedeutet: Abbildung von $A$ auf eine Teilmenge von $B$.



Wegen des Beweises von 1a) sei auf Lefschetz [8]) verwiesen. 1b) ist eine Folgerung aus 1a) [9]). Setzen wir nämlich $\eta_2 = \eta_1(\varepsilon/4)$, und sei

$$f_0 \epsilon R^P, \quad f_1 \epsilon R^P, \quad \varrho(f_0 f_1) = \max_{x \epsilon P} (f_0(x), f_1(x)) < \eta_2.$$

Die Zahl $\delta > 0$ sei so klein gewählt, dass für je zwei Punkte von $P$ mit $\varrho(x, y) < \delta$

$$\varrho(f_0(x), f_0(y)) < \eta_2, \quad \varrho(f_1(x), f_1(y)) < \eta_2, \quad \varrho(f_0(x), f_1(y)) < \eta_2$$

gilt. Das Cartesische Produkt $P'$ aus $P$ und der Einheitsstrecke (d. h. der Raum der Punktepaare $(x, t)$, wo $x \epsilon P$, $0 \leqq t \leqq 1$) sei in Simplizes derart zerlegt, dass für je zwei Punkte $(x_1, t_1)$ und $(x_2, t_2)$, die einem gemeinsamen Simplex angehören, $\varrho(x_1, x_2) < \delta$ gilt und dass die $t$-Koordinate jedes Eckpunktes entweder den Wert 0 oder den Wert 1 hat (die Existenz einer derartigen Zerlegung ist leicht einzusehen).

Setzen wir $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$, so haben wir eine Abbildung eines Teilpolyeders von $P'$, die (in Bezug auf die Zahl $\eta_1(\varepsilon/4)$) der Voraussetzung von 1a) genügt und sich infolgedessen zu einer stetigen Abbildung $F$ des ganzen $(n+1)$-dimensionalen Polyeders $P'$ fortsetzen lässt, so dass die Bildmenge eines jeden Simplexes einen Durchmesser $< \varepsilon/4$ bekommt. Sei $(x, t)$ irgend ein Punkt von $P'$ und $(y, 0)$ ein Eckpunkt des (bzw. eines der) $(x, t)$ enthaltenden $(n+1)$-Simplizes; dann haben wir $\varrho[F(x, t), F(y, 0)] < \varepsilon/4$ und anderseits (wegen $\varrho(x, y) < \delta$) $\varrho[F(x, 0), F(y, 0)] < \eta_1(\varepsilon/4) \leqq \varepsilon/4$, also

$$\varrho[F(x, t), F(x, 0)] < \varepsilon/2, \quad (x \epsilon P, \ 0 \leqq t \leqq 1);$$

folglich hat der durch die Funktion $F(x, t)$ in $R^P$ definierte Verbindungsweg zwischen $f_0$ und $f_1$ einen Durchmesser $< \varepsilon$.

1c) ist eine fast unmittelbare Folgerung aus 1b) [10]).

[8]) Ann. of Math. 35, p. 120.

[9]) 1b) enthält die Aussage, dass ($R$ als lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n$ vorausgesetzt) für jedes $n$-dimensionale Polyeder $P$ der Raum $R^P$ *lokal zusammenhängend* von der Ordnung 0 ist. Nach Kuratowski gilt dies auch dann, wenn $P$ ein beliebiger kompakter höchstens $n$-dimensionaler Raum ist (vgl. Kuratowski, a. a. O. p. 285). Dasselbe bezieht sich auf die Behauptungen 1a) und 1c).

[10]) Der Satz findet sich auch bei Lefschetz, a. a. O.

***Satz* 2**[11]. *Sei $R$ ein beliebiger topologischer Raum, sei $P$ ein Polyeder und $Q$ ein Teilpolyeder von $P$. In $R^Q$ sei ein stetiger Bogen $f_t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ gegeben. Ist dann die Abbildung $F_0 \in R^P$ eine Erweiterung von $f_0$, so gibt es in $R^P$ einen von $F_0$ ausgehenden Bogen $F_t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, so dass für jedes $t$ $F_t$ eine Erweiterung ist von $f_t$. Dabei kann man, wenn $\varepsilon$ irgendwelche positive Zahl ist, die Abbildungen $F_t$ derart wählen, dass die von $f_t$, bzw. $F_t$ durchlaufene Bögen sich in ihren Durchmessern um höchstens $\varepsilon$ unterscheiden. In Formeln:*

$$(*) \qquad \operatorname*{Max}_{x \in P,\, 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq 1} \varrho[F_{t_1}(x), F_{t_2}(x)] \leqq \operatorname*{Max}_{x \in Q,\, 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq 1} \varrho[f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)] + \varepsilon.$$

Nehmen wir zunächst für $P$ die $n$-dimensionale Vollkugel $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1$ und für $Q$ die Randsphäre $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Setzen wir zur Abkürzung für jeden Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Cartesischen $R_n$ und für jede reelle Zahl $r$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \qquad r\,x = (r x_1, r x_2, \ldots, r x_n).$$

Sei ferner $c \geqq 1$ eine (vorläufig beliebige) Konstante; setzen wir für $0 \leqq t \leqq 1$:

$$F_t(x) = F_0\left(\frac{c\,x}{c-t}\right) \quad \text{für } |x| \leqq 1 - \frac{t}{c}$$

$$F_t(x) = f_{t-c(1-|x|)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{für } 1 - \frac{t}{c} < |x| \leqq 1.$$

Man bestätigt sofort $F_t(x) = f_t(x)$ $(x \in Q,\ 0 \leqq t \leqq 1)$ und man zeigt leicht, dass bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Relation $(*)$ erfüllt ist, sobald $c$ hinreichend gross gewählt ist.

Seien jetzt $P$ und $Q \subset P$ beliebige Polyeder. Wir definieren zuerst für alle ausserhalb von $Q$ liegende Eckpunkte von $P$: $F_t(x) = F_0(x)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Angenommen, die Bildpunkte $F_t(x)$ seien bereits für alle $x$ erklärt, die einem höchstens $m$-dimensionalen Simplex von $P$ angehören. Ist dann $T$ ein nicht zu $Q$ gehörendes $(m+1)$-Simplex von $P$, so sind in seinen Randpunkten die Abbildungen $F_t$ bereits definiert und lassen sich, wie eben gezeigt wurde, ins Innere von $T$ fortsetzen (so dass wieder eine stetige Schar entsteht); schliesslich wird also $F_t(x)$ für alle Punkte $x$ definiert, und aus diesem Beweis geht auch hervor, dass man die $F_t$ gemäss der Bedingung $(*)$ bestimmen kann (indem man bei jedem einzelnen Schritt die Konstante $c$ hinreichend gross wählt).

[11]) Die erste Hälfte des Satzes 2 findet sich in meiner sub [7]) zitierten Arbeit, p. 525.



Aus Satz 2 folgt:

***Satz* 3.** *Die Zahl $\eta_2$ des Satzes 1b hat die folgende Eigenschaft: Ist $P$ ein Polyeder von einer beliebigen Dimension, $Q$ ein höchstens $n$-dimensionales Teilpolyeder von $P$, und ist*

$$f_0 \in R^P, \quad f_1 \in R^P, \quad \varrho(f_0, f_1) < \eta_2(\varepsilon),$$

*so gibt es eine Abbildung $f_0' \in R^P$, die auf $Q$ mit $f_0$ übereinstimmt und sich mit $f_1$ durch einen Bogen von einem Durchmesser $< \varepsilon$ in $R^P$ verbinden lässt.*

2. **$\varepsilon$-Homotopien.** Unter einer *$\varepsilon$-Kette* $(\varepsilon > 0)$ in einem metrischen Raum, verstehen wir wie üblich eine endliche Punktfolge, in der je zwei aufeinanderfolgende Punkte einen Abstand $< \varepsilon$ haben.

***Definitionen.*** Zwei Abbildungen $f_1 \in B^A$, $f_2 \in B^A$ heissen *$\varepsilon$-homotop*[12]), wenn sie sich in $B^A$ durch eine *$\varepsilon$-Kette* verbinden lassen. Schreibweise:

$$f_1 \underset{\varepsilon}{=} f_2$$

Ist $M \subset A$, und stimmen die Abbildungen $f_1, f_2$ auf $M$ überein, so heissen sie *$\varepsilon$-homotop relativ zu $M$*:

$$f_1 \underset{\varepsilon}{=} f_2 \ (\text{rel } M),$$

wenn sie sich durch eine $\varepsilon$-Kette von Abbildungen verbinden lassen, die alle auf $M$ übereinstimmen.

Zwei Abbildungen, die einer dritten $\varepsilon$-homotop (in Bezug auf $M$) sind, sind auch untereinander $\varepsilon$-homotop (in Bezug auf $M$). Zwei Abbildungen, die einander homotop sind (bzw. homotop in Bezug auf $M$, d. h. ineinander deformierbar unter Festhaltung der Bilder der Punkte von $M$), sind für jedes $\varepsilon > 0$ $\varepsilon$-homotop (bzw. $\varepsilon$-homotop rel $M$). Abbildungen, die einer Konstante $\varepsilon$-homotop sind, werden auch „$\varepsilon$-homotop 0" genannt.

$R$ bedeutet im Folgenden einen ganz beliebigen metrischen Raum. Den Ausdruck „Weg in $R^u$" gebrauchen wir immer als Synonym für „stetige Abbildung der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ in $R^u$". Homotopie

[12]) Anschaulicher: Zwei Abbildungen heissen $\varepsilon$-homotop, wenn man von einer zur anderen durch eine endliche Folge von $\varepsilon$-Abänderungen gelangen kann, d. h. Abänderungen, bei denen die Bildpunkte jedesmal höchstens um den Abstand $\varepsilon$ verschoben werden.

der Wege ist immer in Bezug auf die aus den Endpunkten $t = 0$, $t = 1$ bestehende Menge gemeint (nie absolut!). Zu jedem Weg $W$ gehört der inverse Weg $-W$. Zu je zwei Wegen $W_1$ und $W_2$ gehört, falls der Endpunkt von $W_1$ mit dem Anfangspunkt von $W_2$ zusammenfällt, der Summenweg $W_1 + W_2$. Bei unserer Auffassung sind die Wege $W_1 + (W_2 + W_3)$ und $(W_1 + W_2) + W_3$ nicht identisch, wohl aber ineinander (unter Festhaltung des Anfangs- und Endpunktes) deformierbar.

Aus $W_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} W_2$ folgt offenbar $W_1 + W_3 \underset{\varepsilon}{\equiv} W_2 + W_3$ (falls diese Ausdrücke einen Sinn haben). Daraus erschliesst man, dass *die Beziehungen* $W_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} W_2$ *und* $W_1 - W_2 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$ *gleichwertig sind.*

Sei $E_n$ die $n$-dimensionale Vollkugel $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1$ und sei $F \epsilon R^{E_n}$. Sei $S_{n-1}$ die Einheitssphäre $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Betrachten wir die Schar der Sphären, die $S_{n-1}$ im Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ von innen tangieren:

$$(\dagger) \qquad (x_1 - 1 + t)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = t^2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Für $t = 0$ artet die Sphäre $(\dagger)$ in den Punkt $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ aus, für $t = 1$ fällt sie mit $S_{n-1}$ zusammen. Die durch $F$ vermittelten Abbildungen der Sphären $(\dagger)$ können offenbar *zu einem Weg im Funktionalraum* $R^{S_{n-1}}$ *zusammengefasst* werden. Explizite Darstellung:

$$f_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(1 - t + t x_1, t x_2, \ldots, t x_n) \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1;\ 0 \leqq t \leqq 1\Big).$$

Dieser Weg beginnt mit der Konstante $y_0 = F(x_0)$, und es gilt ferner $f_t(x_0) = F(x_0) = \text{const.}$ für $0 \leqq t \leqq 1$. Umgekehrt kann jeder Weg in $R^{S_{n-1}}$, der diese Eigenschaften besitzt, in der angeführten Weise aus einer (und nur einer) Abbildung $F \epsilon R^{E_n}$ erhalten werden (dies folgt einfach daraus, dass durch jeden Punkt von $E_n$ mit Ausnahme des Punktes $x_0$ eine und nur eine Sphäre der Schar $(\dagger)$ hindurchgeht). Bezeichnen wir für $y_0 \epsilon R$ mit $\mathfrak{F}_n(R, y_0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ die Teilmenge von $R^{S_n}$, bestehend aus den Abbildungen $f$ mit $f(x_0) = f(1, 0, \ldots, 0) = y_0$, so können wir sagen: *Die von der Konstante $y_0$ ausgehenden Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ stehen in ein-eindeutiger Beziehung zu den Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$ mit $F(x_0) = y_0$.* Man sieht dabei fast unmittelbar, dass die *ε-Homotopie der Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ mit der ε-Homotopie der entsprechenden Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$ (rel $S_{n-1}$) gleichbedeutend ist.*



Den von $y_0$ ausgehenden *geschlossenen* Wegen in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ entsprechen die Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$, bei denen die Randsphäre $S_{n-1}$ auf den Punkt $y_0$ abgebildet ist. Solche Abbildungen können offenbar auch als Abbildungen der Sphäre $S_n$ gedeutet werden, die den Punkt $x_0$ in $y_0$ überführen. Es besteht somit eine *ein-eindeutige Zuordnung zwischen den von $y_0$ ausgehenden geschlossenen Wegen in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ und den Abbildungen $F \epsilon \mathfrak{F}_n(R, y_0)$*, eine Tatsache, die wir bereits früher in einer etwas anderer Weise festgestellt haben[13]), und die für die Theorie der Homotopiegruppen von fundamentaler Bedeutung ist. ε-Homotopie der geschlossenen (von der Konstante ausgehenden) Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ drückt sich dabei in der ε-Homotopie der Abbildungen $F$ relativ zu $x_0$ aus.

**Satz 4**[14]). *Ist $M$ eine Teilmenge von $R$, so sind bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

1) *Je zwei Abbildungen $f_1 \epsilon M^{E_n}$, $f_2 \epsilon M^{E_n}$ mit $f_1|S_{n-1} = f_2|S_{n-1}$*[15]) *sind in $R$ relativ zu $S_{n-1}$ ε-homotop.*

2) *Jede Abbildung $F \epsilon M^{S_n}$ ist in $R$ relativ zu dem Punkt $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ ε-homotop* 0.

Die erste Aussage ist nämlich damit gleichbedeutend, dass für jedes $y_0 \epsilon M$ je zwei Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}(M, y_0)$, die von $y_0$ ausgehen und dasselbe Endelement haben, einander ε-homotop in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ sind. Die zweite Aussage bedeutet, dass jeder von $y_0$ ausgehende geschlossene Weg in $\mathfrak{F}_{n-1}(M, y_0)$ ε-homotop 0 in $\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0)$ ist. Satz 4 folgt danach aus der trivialen Äquivalenz der Beziehungen $W_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} W_2$ und $W_1 - W_2 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$. Für Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$ werden im Folgenden die ε-Homotopien *immer relativ zu $S_{n-1}$ gemeint*[16]) (und auch

[13]) Vgl. Proc. Ac. Amst., 38, pp. 523—524.

[14]) Satz 4 ist eine Folgerung aus dem folgenden mit gleichen Mitteln beweisbaren Satz: *Damit die Abbildungen $f_1 \epsilon R^{E_n}$, $f_2 \epsilon R^{E_n}$, die auf $S_{n-1}$ übereinstimmen, in Bezug auf $S_{n-1}$ ε-homotop seien, ist notwendig und hinreichend, dass die Abbildung*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \begin{cases} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{für} \quad x_{n+1} \geqq 0 \\ = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{für} \quad x_{n+1} < 0 \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$$

*in Bezug auf $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ ε-homotop sei.*

[15]) Mit $f|M$ bezeichnen wir üblicherweise die partielle Abbildung, die aus $f$ entsteht, wenn statt $R$ nur die Menge $M$ als Definitionsbereich von $f$ betrachtet wird.

[16]) Die absoluten Homotopien der Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$ sind uninteressant, denn *alle* Abbildungen $F \epsilon R^{E_n}$ sind einander im absoluten Sinn homotop.

in der Formeldarstellung wird der Zusatz „rel $S_{n-1}$" weggelassen). Von grosser Bedeutung für die späteren Überlegungen ist der

**Satz 5.** *Ist die Abbildung $f \epsilon R^{S_n}$ $\varepsilon$-homotop 0 in Bezug auf den Punkt $x_0$, so hat diese Eigenschaft auch jede Abbildung, die aus $f$ durch Deformation entsteht.* (Das Bild von $x_0$ darf sich bei der Deformation ändern).

Statt der Abbildungen $f \epsilon R^{S_n}$ betrachten wir, was auf dasselbe hinauskommt, Abbildungen $f \epsilon R^{E_n}$, die auf der Randsphäre $S_{n-1}$ konstant sind. Sei $f_t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ eine stetige Schar von solchen Abbildungen, und sei

$$f_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0.$$

Wir wollen zeigen, dass auch $f_0 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$ ist. Sei $p(t) = f_t(S_{n-1})$ Nach Annahme besteht $p(t)$ aus einem einzelnen Punkt. Wir definieren eine Schar von Abbildungen $F_t \epsilon R^{E_n}$:

$$\left.\begin{aligned} F_t(x) &= f_t((1+t)\,x) && \text{für } |x| \leqq \frac{1}{1+t}, \\ F_t(x) &= p(|x|^{-1}-1) && \text{für } \frac{1}{1+t} < |x| \leqq 1, \end{aligned}\right\} \quad (x \epsilon E_n;\quad 0 \leqq t \leqq 1).$$

Wir haben $F_t(S_{n-1}) = p(0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ und folglich

$$({}^0) \qquad f_0 = F_0 \underset{\varepsilon}{\equiv} F_1.$$

Aus der Voraussetzung $f_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$ folgt, dass $F_1$ der folgenden Abbildung $\varepsilon$-homotop ist:

$$\Phi(x) = p(1) \quad (|x| \leqq \tfrac{1}{2}), \qquad \Phi(x) = p(|x|^{-1}-1) \quad (\tfrac{1}{2} \leqq |x| \leqq 1)$$

Man sieht sofort, dass die letztere Abbildung unter Festhaltung des Randbildes in eine Konstante deformierbar ist (man setze etwa $\Phi_t(x) = p(1-t)$ für $|x| \leqq \frac{1}{2}$ und $\Phi_t(x) = p[(1-t)\cdot(|x|^{-1}-1)]$ für $|x| > 1/2$). Also ist $F_1 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$, und nach $({}^0)$ folgt daraus $f_0 \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$.

Aus dem Bewiesenen folgt u. a., dass eine Abbildung $F \epsilon R^{S_n}$, die relativ zu *einem* Punkt $x_0$ $\varepsilon$-homotop 0 ist, auch relativ zu *jedem anderen Punkt* $\bar{x}$ $\varepsilon$-homotop 0 ist; um dies einzusehen, braucht man nur die $S_n$ in sich derart zu deformieren (etwa durch Rotation), dass $\bar{x}$ zur Deckung mit $x_0$ gebracht wird, wodurch $F$ in eine relativ zu $\bar{x}$ $\varepsilon$-nullhomotope Abbildung deformiert wird.



**3** [17]. **$\varepsilon$-Homotopien und Homotopiegruppen.** Sei $R$ ein beliebiger Raum, und sei $y_0 \epsilon R$. Die Homotopieklassen der geschlossenen Wege mit $y_0$ als Ausgangspunkt bilden die *Fundamentalgruppe* von $R$ in Bezug auf den Punkt $y_0$. Wir bezeichnen sie mit $\pi(R, y_0)$. Diejenigen Elemente von $\pi(R, y_0)$, die durch Wege $W$ mit $W \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$ (bei festem $\varepsilon$) dargestellt werden, bilden, wie aus den Bemerkungen am Anfang des § 2 hervorgeht, eine *Untergruppe* (sogar einen Normalteiler) von $\pi(R, y_0)$; wir bezeichnen sie mit $\pi_\varepsilon(R, y_0)$.

Die *n-te Homotopiegruppe* $\pi_n(R, y_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wird durch die Gleichung:

$$\pi_n(R, y_0) = \pi[\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0), y_0]$$

definiert, wo $y_0$ an der zweiten Stelle rechts als Symbol für die konstante Abbildung $f(S_{n-1}) = y_0$ gebraucht wird. Es gilt, wie man leicht sieht, $\pi_1(R, y) = \pi(R, y)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ definieren wir die Untergruppe von $\pi_n(R, y_0)$:

$$\pi_{n\varepsilon}(R, y_0) = \pi_\varepsilon[\mathfrak{F}_{n-1}(R, y_0), y_0].$$

Aus den Überlegungen auf S. 474 geht hervor, dass man die Elemente von $\pi_n(R, y_0)$ auch als Homotopieklassen (rel $x_0$) der Abbildungen $F \epsilon \mathfrak{F}_n(R, y_0)$ deuten kann. *Elemente von $\pi_n(R, y_0)$, die durch Abbildungen $F \epsilon \mathfrak{F}_n(R, y) \subset R^{S_n}$ mit $F \underset{\varepsilon}{\equiv} 0$ (rel $x_0$) dargestellt sind, und nur solche, gehören der Gruppe $\pi_{n\varepsilon}(R, y)$ an.*

Der Satz 5 hat die folgende Bedeutung: Sind zwei Punkte $y_0$ und $z_0$ in $R$ durch einen Weg $W$ verbunden, so wird dadurch, ähnlich wie bei den Fundamentalgruppen, ein Isomorphismus [18]) zwischen den Gruppen $\pi_n(R, y_0)$ und $\pi_n(R, z_0)$ definiert. Der Satz 5 besagt nun, dass *bei diesem Isomorphismus die Gruppe $\pi_{n\varepsilon}(R, y_0)$ in die Gruppe $\pi_{n\varepsilon}(R, z_0)$ übergeht.* Im Falle eines stetig zusammenhängenden Raumes $R$ (d. h. eines Raumes, in dem je zwei Punkte durch einen Bogen verbindbar sind) kann man also $y_0$ in der Bezeichnung weglassen und einfach von den Gruppen $\pi_{n\varepsilon}(R)$ sprechen. Ist $\pi'_n(R)$ die Faktorgruppe von $\pi_n(R)$ nach dem Durchschnitt aller Gruppen $\pi_{n\varepsilon}(R)$, so ist es vielfach zweckmässiger die Gruppe $\pi'_n(R)$ statt der Gruppe $\pi_n(R)$ als die $n$-te Homotopiegruppe zu definieren, denn $\pi'_n(R)$ kann in naheliegender Weise als *topologische* Gruppe gedeutet werden.

[17]) Für diesen Paragraphen vgl. die erste der sub [6]) zitierten Noten und die pp. 523–524 der zweiten Note. In diesen beiden Noten wurden Homotopiegruppen nur für lokal zusammenziehbare Räume betrachtet. Die Definitionen und die Sätze II und III der ersten Note übertragen sich aber auf beliebige Räume.

[18]) Dieser Isomorphismus hängt nur von der Homotopieklasse des Weges $W$ ab. Falls $y = z$, hat man einen Automorphismus der Homotopiegruppe.

Erinnern wir daran, dass für $n \geqq 2$ die Gruppen $\pi_n(R, y)$ *Abelsch* sind [19]).

4. **$\varepsilon$-Homotopien und lokaler Zusammenhang.** Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der Tatsache, dass man bei der Definition des lokalen Zusammenhanges die stetigen Homotopien durch $\varepsilon$-Homotopien ersetzen kann.

***Satz 6.*** *Damit der kompakte Raum $R$ lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n$ sei $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ist notwendig und hinreichend, dass es zu jedem Punkt $p$ von $R$ und zu jeder Umgebung $U(p)$ eine Umgebung $V(p)$ gebe, so dass für jedes noch so kleine $\varepsilon$ jede Abbildung $f \in V^{S_m}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ in $U$ $\varepsilon$-homotop 0 rel $x_0$ sei (wo $x_0$ einen beliebigen Punkt der $S_m$ bedeutet).*

Dass die Bedingung notwendig ist, ist trivial. Für $n = 0$ ist sie auch hinreichend, denn in diesem Fall besagt die Bedingung, dass bei vorgegebenem $U$ und bei genügend kleinem $V$ je zwei Punkte von $V$ durch ein Kontinuum in $U$ verbindbar sind, d. h. $R$ ist im üblichen mengentheoretischen Sinn (Hahn-Mazurkiewicz) lokal zusammenhängend, was bekanntlich für kompakte Räume mit dem Lefschetz'schen lokalen Zusammenhang von nullter Ordnung (Verbindbarkeit benachbarter Punkte durch kleine Bögen) gleichbedeutend ist. Um die Behauptung für $n > 0$ zu beweisen, bringen wir sie in die folgende Gestalt:

6'. *Ist der kompakte Raum $R$ lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n-1$, und ist die Bedingung des Satzes 6 für $m = n$ erfüllt, so ist $R$ lokal zusammenhängend von der Ordnung $n$.*

Mit Rücksicht auf Satz 4 können wir die Bedingung des Satzes 6 (für $m = n$) auch so aussprechen: Zu jeder Umgebung $U$ eines Punktes $p$ gibt es eine Umgebung $V$, so dass je zwei Abbildungen

[19]) Vgl. a. a. O., S. 114, wo der Satz ohne Beweis ausgesprochen ist. Der einfachste Beweis: Man stelle die Elemente $c_1$ bzw. $c_2$ von $\pi_n(R, y_0)$ durch Abbildungen $f_1 \in R^{E_1}$, bzw. $f_2 \in R^{E_2}$ $(f_1(S_{n-1}) = f_2(S_{n-1}) = y_0)$ dar. Das Produkt $c_1 \times c_2$ wird dann durch die Abbildung $F \in R^{S_n}$ dargestellt, die mann erhält, indem man $S$ in zwei Halbsphären zerlegt und die eine dieser Halbsphären gemäss $f_1$ die andere gemäss $f_2$ abbildet (dabei ist auf die richtige Orientierung zu achten). Durch Drehung von $S_n$ um einen festen Punkt $x_0$ werden die beiden Halbsphären vertauscht und man gelangt zur Abbildung, die das Produkt $c_2 \times c_1$ darstellt, und der Abbildung $F$ relativ zu $x_0$ homotop ist.



$f_1 \in V^{E_n}$, $f_2 \in V^{E_n}$, mit $f_1 | S_{n-1} = f_2 | S_{n-1}$ für jedes $\varepsilon > 0$ einander $\varepsilon$-homotop in $U$ sind.

Unter Benützung des Borelschen Satzes lässt sich dieser Sachverhalt metrisch formulieren: Zu jeder Zahl $\omega > 0$ gibt es eine Zahl $\eta_3 = \eta_3(\omega) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Gilt

$$f_1 \in R^{E_n}, \quad f_2 \in R^{E_n}, \quad f_1 | S_{n-1} = f_2 | S_{n-1}, \quad \delta[f_1(E_n)] < \eta_3, \quad \delta[f_2(E_n)] < \eta_3,$$

so sind die Abbildungen $f_1$ und $f_2$ für jedes $\varepsilon > 0$ einander $\varepsilon$-homotop in einer Menge $A \subset R$ mit $\delta(A) < \omega$. Bezeichnen wir für zwei Punkte $p$ und $q$ eines metrischen Raumes mit $\mu(p, q)$ die untere Grenze aller Zahlen $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $p$ mit $q$ verbindende $\varepsilon$-Kette gibt, deren sämtliche Punkte *untereinander Abstände* $< \delta$ *haben.* Ich behaupte:

(a) *Unter den Voraussetzungen von 6' gibt es zu jeder Zahl $\omega > 0$ eine Zahl $\eta_4 = \eta_4(\omega) > 0$, so dass für $f_1 \in R^{S_n}$, $f \in R^{S_n}$ aus*

$$\varrho(f_1, f_2) < \eta_4 \tag{1}$$

*folgt:*

$$\mu(f_1, f_2) < \omega. \tag{†}$$

Setzen wir

$$\eta_4 = \eta_4(\omega) = \eta_2\left(\frac{\eta_3(\omega/2)}{3}\right),$$

wo $\eta_3$ die eben angegebene Bedeutung und $\eta_2$ die Bedeutung des Satzes 1b hat (in dem $n$ durch $n-1$ zu ersetzen ist). Die Relation (1) sei erfüllt. Wir zerlegen die $S_n$ in so kleine Simplizes, dass für jedes Simplex $T$

$$\delta[f_1(T)] < \eta_3(\omega/2), \tag{2}$$

$$\delta[f_2(T)] < \frac{\eta_3(\omega/2)}{3} \tag{3}$$

gilt. Sei $P$ das von allen $(n-1)$-Simplizes der betrachteten Zerlegung gebildete Polyeder. Nach Satz 3 gibt es eine Abbildung $f'_1 \in R^{S^n}$, so dass

$$f'_1 | P_{n-1} = f_1 | P_{n-1}, \tag{4}$$

gilt und so dass es in $R^{S_n}$ einen Verbindungsbogen von einem

Durchmesser $< \frac{\eta_3(\omega/2)}{3}$ zwischen $f_2$ und $f_1'$ gibt. Aus dem letzteren folgt

(5) $$\mu(f_2, f_1') < \frac{\eta_3(\omega/2)}{3} < \omega/2.$$

Erst recht gilt

(6) $$\varrho(f_2, f_1') < \frac{\eta_3(\omega/2)}{3}.$$

Aus (3) und (6) folgt:

(7) $$\delta[f_1'(T)] < \eta_3(\omega/2).$$

Seien $T_1, T_2, \dots, T_r$ sämtliche $n$-Simplizes der zugrundegelegten Zerlegung von $S_n$. Bezeichnen wir mit $\varphi_i$ bzw. $\varphi_i'$ $(i=1,2,\dots,r)$ die partielle Abbildung $f_1|T_i$, bzw. $f_1'|T_i$. Die Abbildungen $\varphi_i$ und $\varphi_i'$ stimmen nach (4) am Rande von $T_i$ überein, und aus (2) und (7) ergibt sich nach der Bedeutung der Zahl $\eta_3$, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\varepsilon$-Kette $\varphi_i = \varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{im} = \varphi_i'$ mit den folgenden Eigenschaften gibt: alle Bildmengen $\varphi_{i\nu}(T_i)$ $(\nu=1, 2,\dots, m)$ liegen in einer gemeinsamen Menge von einem Durchmesser $< \omega/2$ und alle $\varphi_{i\nu}$ stimmen am Rande von $T_i$ überein. Setzt man für $x \in T_i$ $F_\nu(x) = \varphi_{i\nu}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, r;\ \nu = 1, 2, \dots, n)$, so erhält man eine $\varepsilon$-Kette zwischen $f_1$ und $f_1'$, deren Glieder untereinander Abstände $< \omega/2$ haben. Also gilt

(8) $$\mu(f_1, f_1') < \omega/2.$$

Aus (5) und (8) folgt die gewünschte Beziehung (†).

Berücksichtigen wir jetzt, dass $R$ ein *vollständiger*[19a]) Raum ist, so folgern wir leicht aus (a):

(b) *Ist $f_1 \in R^{S_n}, f_2 \in R^{S_n}$, und $\varrho(f_1, f_2) < \eta_4(\omega/2)$, so gibt es in $R^{S_n}$ einen Verbindungsbogen zwischen $f_1$ und $f_2$ von einem Durchmesser $<\omega$.*

Sei $\delta_m = \eta_4(\omega/2^m)$ $(m = 1, 2, \dots)$. $L_m$ sei eine $f_1$ und $f_2$ verbindende $\delta_m$-Kette und $L_{m+1}$ enstehe aus $L_m$ dadurch, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern von $L_m$ eine $\delta_{m+1}$-Kette vom Durchmesser $< \omega/2^m$ eingeschaltet wird. Die Kette $L_1$ bestehe nur aus den Abbildungen $f_1$ und $f_2$. Sei $M$ die Vereinigung der Mengen $L_m$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ und $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle von $M$ in $R^{S_n}$. Aus der Konstruktion der $L_m$ geht hervor, dass $M$ und daher auch $\overline{M}$ *metrisch zusammenhängend* ist in

[19a]) Vgl. etwa meine Arbeit in den Berichten der Preuss. Ak. 24, p. 756.



dem Sinne, dass zwischen je zwei Elementen von $\overline{M}$ für jedes $\delta > 0$ eine $\varepsilon$-Kette in $\overline{M}$ eingeschaltet werden kann. Weiter ist deutlich, dass $\overline{M}$ für jedes $\delta > 0$ als Vereinigung von endlichvielen metrisch zusammenhängenden Mengen von Durchmessern $< \delta$ dargestellt werden kann, wobei man diese Mengen natürlich als abgeschlossen annehmen darf. Nun gilt aber bekanntlich [20]): 1) Eine abgeschlossene Menge in einem vollständigen Raum, die Vereinigung ist von endlich vielen Mengen mit beliebig kleinen Durchmessern, ist (in sich) *kompakt* 2) Eine kompakte metrisch zusammenhängende Menge ist ein Kontinuum. Wir sehen also, dass $\overline{M}$ ein (kompaktes) *Kontinuum* ist, und als *Vereinigung von beliebig kleinen Teilkontinua dargestellt werden kann*, d. h. (nach dem klassischen Satz von Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński) *$\overline{M}$ ist ein stetiges Streckenbild.* Aus der Konstruktion von $M$ schliesst man noch leicht: $\delta(M) < \sum_{n=\omega}^{\infty} \omega/2^n = \omega$. Damit ist (b) bewiesen.

Aus dem Bewiesenen folgt insbesondere, dass für jeden Punkt $p \in R$ jede Abbildung $f \in R^{S_n}$, für die $f(S_n) \subset U[p, \eta_4(\omega/2)]$ gilt, mit der Konstante $p$ durch einen Bogen vom Durchmesser $< \omega$ verbindbar ist, und folglich homotop 0 in $U(p, \omega)$ ist. Damit ist gezeigt, dass $R$ lokal zusammenhängend von der Ordnung $n$ ist.

5. **Beweis des Theorems I.** Für $n = 0$ und $n = 1$ ist das Theorem sicher richtig, denn die Bedingung des Theorems für $n = 0$ besagt, dass $R$ im mengentheoretischen Sinne lokal zusammenhängend ist, was, wie wir bereits oben bemerkt haben, mit dem lokalen Zusammenhang von der Ordnung 0 im Lefschetz'schen Sinne gleichbedeutend ist. Für $n \geqq 2$ bringen wir das Theorem in die folgende Gestalt:

***Theorem I'.*** *Der kompakte Raum $R$ sei lokal zusammenhängend bis zur Ordnung $n-1$ $(n \geqq 2)$. Damit $R$ auch von der Ordnung $n$ lokal zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, dass es zu jedem Punkt $p$ von $R$ und zu jeder Umgebung $U(p)$ eine Umgebung $V(p)$ gebe, so dass jede in $V$ liegende Fundamentalfolge von $n$-dimensionalen Zykeln in $U$ homolog 0 sei.*

***Die Bedingung ist notwendig:*** Sei $U$ eine beliebige Umgebung von $p$. Die Umgebung $U_1$ sei gemäss Satz 1c gewählt. Die Zahl $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon)$ habe die Bedeutung des Satzes 1a. Sei $V$ eine Umgebung von $p$ mit $V \subset U_1$. Ich behaupte: *Jeder in $V$ liegende $n$-di-*

[20]) Vgl. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 108.

*mensionale* $\eta_1$-*Zykel ist in* $U$ $\varepsilon$-*homolog* 0, vorausgesetzt, dass $\varepsilon$ genügend klein ist. Daraus folgt natürlich, dass jede Fundamentalfolge von in $V$ liegenden $n$-dimensionalen Zykeln homolog 0 in $U$ ist. Sei $C$ ein $\eta_1$-Zykel in $V$, und sei $C'$ ein polyedraler Zykel mit demselben Inzidenzschema (die geometrische Realisation von $C$). Die Eckpunkte von $C'$ sind eindeutig auf die Eckpunkte von $C$ abgebildet, und aus der Bedeutung der Zahl $\eta_1$ ergibt sich, dass man diese Abbildung zu einer stetigen Abbildung $f$ des ganzen (als Punktmenge aufgefassten) Zykels $C'$ in $R$ erweitern kann, so dass jedes Simplex von $C'$ auf eine Menge mit einem Durchmesser $<\varepsilon$ abgebildet ist (man drückt dies öfters so aus: Der „diskrete" Zykel $C$ ist in einen „stetigen" $\varepsilon$-Zykel eingebettet). Wenn $\varepsilon$ hinreichend klein ist (nämlich kleiner als der Abstand zwischen $V$ und $R-U_1$), ist die Bildmenge $f(C')$ in $U_1$ erhalten.

Man betrachte eine Folge von unendlich fein werdenden simplizialen Unterteilungen von $C'$. Die Bilder der Eckpunkte der $m$-ten Unterteilung liefern einen Zykel $C_m$ in $U$. Alle diese Zykeln sind, wie man leicht zeigt, dem Zykel $C=C_1$ $\varepsilon$-homolog. Zusammen bilden die $C_m$ eine Fundamentalfolge in $U$. Ändert man die Abbildung $f$ stetig ab, so dass die Bildmenge immer in $U$ bleibt, so ändert sich die Homologieklasse der Folge $\{C_m\}$ in $U$ nicht [21]. Nun ist aber nach der Definition von $U_1$ die Abbildung $f$ homotop 0 in $U$, also ist die Fundamentalfolge $\{C_m\}$ homolog 0 in $U$. Für hinreichend grosses $m$ ist daher $C_m$ $\varepsilon$-homolog 0 in $U$ und folglich ist auch $C$ $\varepsilon$-homolog 0 in $U$.

***Die Bedingung ist hinreichend:*** Der Punkt $p\in R$ und die Umgebung $U$ seien beliebig gewählt. Die Umgebung $U_1(p)$ erfülle die Bedingung von 1c) bezüglich der $(n-1)$-dimensionalen Polyeder. Wir nehmen noh eine Umgebung $U_2(p)$, wo $\overline{U}_2\subset U_1$, und bestimmen schliesslich eine Umgebung $V$, so dass jede in $V$ definierte Fundamentalfolge von $n$-dimensionalen Zykeln homolog 0 in $U_2$ ist. Nach Satz 6 genügt es zu zeigen:

*Jede Abbildung* $f\in V^{S_n}$ *ist für ein beliebiges* $\varepsilon>0$ *in* $U$ $\varepsilon$-*homotop* 0 *rel* $x_0$ (dabei ist $x_0\in S_n$ beliebig).

[21]) Als bekannt setzen wir die Tatsache voraus, dass eine Abbildung $F\in B^A$ einen Homomorphismus der $n$-ten Homologiegruppe von $A$ in die $n$-te Homologiegruppe von $B$ definiert, der sich bei stetiger Deformation der Abbildung nicht ändert.



Sei $\varepsilon>0$ irgendwie gegeben. Die Zahl $\eta_1=\eta_1(\varepsilon/2)$ erfülle die Bedingung von 1a) in Bezug auf die $n$-dimensionalen Polyeder. Jeder simplizialen Zerlegung $Z$ von $S_n$ wird durch $f$ ein bestimmter Zykel in $V$ zugeordnet (dessen Eckpunkte Bilder der Eckpunkte von $Z$ sind). Lässt man $Z$ eine Folge von unendlich fein werdenden Zerlegungen durchlaufen, so erhält man in $V$ eine Fundamentalfolge von Zykeln, die nach Annahme homolog 0 in $U_2$ ist; man kann daher die simpliziale Zerlegung $Z$ so fein wählen, dass der ihr zugeordnete Zykel in $V$ Rand eines in $U_2$ gelegenen $\eta_1$-Komplexes ist. Diesen Sachverhalt können wir (wenn wir statt der Komplexe in $R$ ihre geometrische Realisationen in Gestalt polyedraler Komplexe betrachten) auch folgendermassen ausdrücken:

Die Sphäre $S_n$ (in der simplizialen Zerlegung $Z$) kann in ein $(n+1)$-dimensionales Polyeder $P$ mit den folgenden Eigenschaften eingebettet werden: 1) $S_n$ (als algebraischer Zykel betrachtet) ist homolog 0 in $P$, 2) Ist $P_0$ die (endliche) Menge der Eckpunkte von $P$, so gibt es eine Abbildung $\varphi$ von $P_0$ in $U_2$, die je zwei Eckpunkten desselben Simplexes Punkte in einer Entfernung $<\eta_1$ zuordnet und in den Punkten des Durchschnittes $P_0\cdot S_n$ mit der Abbildung $f$ übereinstimmt.

Setzen wir noch für jeden Punkt $x\in S_n$ $\varphi(x)=f(x)$, so ist $\varphi$ als Erweiterung von $f$ auf der Menge $P_0+S_n$ definiert. Wir wollen annehmen, die Zerlegung $Z$ sei so fein, dass für jedes $n$-Simplex $T\subset S$ $\delta[f(T)]<\eta_1$ ist. Seien $P_n$ bzw. $P_{n-1}$ die von den $n$-dimensionalen bzw. $(n-1)$-dimensionalen Simplizes von $P$ gebildeten Polyeder.

Wendet man Satz 1a auf das Polyeder $P_n$, das Teilpolyeder $P_0+S_n$ und die Abbildung $\varphi$ an, so sieht man, dass $\varphi$ sich zu einer Abbildung $F\in R^{P_n}$ erweitern lässt, so dass für jedes Simplex $T\subset P_n$

$$\delta[F(T)]<\varepsilon/2 \tag{1}$$

gilt. Für hinreichend kleines $\varepsilon$ hat (1) wegen $\varphi(P_2)\subset U_2$ zur Folge:

$$F(P_n)\subset U_1. \tag{2}$$

Nach der Bedeutung von $U_1$ folgt aus (2), dass die partielle Abbildung $F|P_{n-1}$ homotop 0 in $U$ ist, und daraus schliessen wir unter Berufung auf Satz 2 (nur die erste Hälfte!), dass $F$ in $U$ einer Abbildung $F_1$ mit der Eigenschaft

$$F_1(P_{n-1})=y_0=\text{const.} \tag{3}$$

homotop ist.

Jetzt kommen wir zum entscheidenden Punkt des Beweises [22]) (und der ganzen Arbeit!). Sind $T_1, T_2, \ldots, T_r$ die $n$-dimensionalen Simplizes von $P$ (oder, was dasselbe ist, von $P_n$), jedes in einer bestimmten Orientierung, so definiert für $i=1, 2, \ldots, r$ die partielle Abbildung $F_1|T_i$ (die nach (3) auf dem Rand von $T_i$ konstant ist) eindeutig ein Element $c_i$ der $n$-ten Homotopiegruppe $\pi_n = \pi_n(U, y_0)$. Ordnen wir jedem algebraischen Komplex

$$K = \sum_{i=1}^{r} e_i T_i,$$

wo $e_i$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, das Element

$$p(K) = \sum_{i=1}^{r} e_i c_i \text{ [22a])}$$

zu, so ist $p$ ein *Homomorphismus der Gruppe der $n$-dimensionalen Komplexe von $P$ in die Gruppe $\pi_n$*. Ich behaupte, dass *für jeden Komplex $K$, der in $P$ homolog 0 ist,*

$$p(K) \in \pi_{n\varepsilon} \text{ [22b])}$$

*gilt.* Es genügt dies für den Fall zu beweisen, dass $K$ der Rand eines $(n+1)$-dimensionalen Simplexes von $P$ ist. Dann ist aber $p(K)$ gerade jenes Element von $\pi_n$, das nach § 3 die Abbildung $F_1|K$ bestimmt [23]) (wobei die Rolle des Anfangspunktes $x_0$ irgend ein in einem $(n-1)$-dimensionalen Simplex von $K$ gelegener Punkt übernimmt). Nun entsteht die Abbildung $F_1|K$ durch Deformation in $U$ aus der Abbildung $F|K$. Aus (1) gewinnt man leicht $\delta[F(K)] < \varepsilon$. Also ist $F|K$ trivialerweise $\varepsilon$-homotop 0 rel $x_0$ in $U$, und nach Satz 5 ist auch die Abbildung $F_1|K$ in $U$ $\varepsilon$-homotop 0 (rel $x_0$), d. h.

$$p(K) \in \pi_{n\varepsilon}.$$

[22]) Der nun folgende Teil des Beweises verläuft ganz ähnlich dem Beweis Proc. Ac. Amst., pp. 527—528. Man könnte die lokalen Homotopiegruppen einführen und beweisen, dass dieselben im Falle eines bis zur $(n-1)$-ter Ordnung lokal zusammenhängenden Raumes mit den lokalen Homologiegruppen von der Ordnung $n$ übereinstimmen.

[22a]) $\pi_{n\varepsilon}$ schreiben wir zur Abkürzung statt $\pi_{n\varepsilon}(U, y_0)$.

[22b]) Wir verwenden die additive Schreibweise für die Abelsche Gruppe $\pi_n$.

[23]) Vgl. l. c. p. 527.



Insbesondre ist $S_n$ homolog 0 in $P$ (so war $P$ bestimmt); folglich, nach dem eben bewiesenen:

$$(4) \qquad p(S_n) \in \pi_{n\varepsilon}.$$

Nun ist $p(S_n)$ wieder jenes Element von $\pi_n$, da durch die partielle Abbildung $F_1|S_n$ bestimmt ist (wobei irgend ein Punkt $x_0 \in P_{n-1} \cdot S_n$ als Anfangspunkt ausgezeichnet ist), und (4) bedeutet, dass die Abbildung $F_1|S_n$ $\varepsilon$-homotop 0 rel $x_0$ in $U$ ist. Nach Satz 5 muss dasselbe für die aus $F_1|S_n$ durch Deformation in $U$ hervorgehende Abbildung $F|S_n = f$ [24]) gelten:

$$f \underset{\varepsilon}{\equiv} 0 \quad (rel\ x_0) \quad in\ U,$$

was zu beweisen war.

[24]) $F$ ist definitionsgemäss eine Erweiterung von $\varphi$ und $\varphi$ eine Erweiterung von $f$.