Das Ergebnis ist:

Satz VIII. *Es gibt Faserungen (ohne Ausnahmefasern) der Sphären S^3, S^7, S^{15} mit folgenden Eigenschaften: die einzelnen Fasern sind Großkugeln der Dimensionen* 1, 3, 7; *die induzierten Faserräume sind Sphären der Dimensionen* 2, 4, 8; *für die Faserabbildung ist* $\gamma = 1$.

12. Die Frage nach allen Typen von Faserungen [15]) der Sphären scheint mir, auch unabhängig von Abbildungs-Problemen, Interesse zu verdienen; ihre Beantwortung würde unsere Kenntnis von der Struktur der Sphären wesentlich fördern; bisher ist aber hierüber meines Wissens nicht viel bekannt. Die Betrachtungen der vorigen Nummer führen zur Konstruktion weiterer Faserungen gewisser Sphären.

Es sei r eine der beiden Zahlen 1 und 3 und ferner k eine beliebige positive ganze Zahl. Die $k(r+1)$ cartesischen Koordinaten des $R^{k(r+1)}$ fassen wir als Komponenten von k Größen $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des Systems $\mathfrak{S}_r$ auf; wir deuten also den $R^{k(r+1)}$ als „k-dimensionalen affinen $\mathfrak{S}_r$-Raum". Unter der „$\mathfrak{S}_r$-Geraden", welche den Nullpunkt mit dem Punkt $(X_1, \ldots, X_k)$ verbindet, verstehen wir die Menge derjenigen Punkte $(X'_1, \ldots, X'_k)$, für welche es Größen T mit $X'_i = TX_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ gibt. Man zeigt leicht: je zwei dieser Geraden haben nur den Nullpunkt gemeinsam [16]).

Jede dieser „$\mathfrak{S}_r$-Geraden" ist eine $(r+1)$-dimensionale Ebene des $R^{k(r+1)}$; sie schneidet eine feste Sphäre $S^{k(r+1)-1}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt in einer r-dimensionalen Großkugel; diese Großkugeln sind paarweise zueinander fremd; sie bilden eine Faserung der $S^{k(r+1)-1}$.

Damit haben wir, wenn wir noch diejenige Faserung berücksichtigen, die in Nr. 11 durch Heranziehung des Systems $\mathfrak{S}_7$ geliefert wurde, die folgenden Typen von *Faserungen der Sphären* S^N erhalten: 1) $N = 2k - 1$, k beliebig, die Fasern sind Kreise; 2) $N = 4k - 1$, k beliebig, die Fasern sind 3-dimensionale Sphären; 3) $N = 15$, die Fasern sind 7-dimensionale Sphären.

Ich hoffe, auf die damit angeschnittenen Fragen noch näher eingehen zu können.

[15]) Es sind hier immer Faserungen ohne „Ausnahmefasern" (im Sinne von Seifert) gemeint.

[16]) Für diesen Beweis braucht man die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation in $\mathfrak{S}_r$; daher muß $r = 7$ hier ausscheiden.

Metrische Geometrie und Variationsrechnung.

Von

Karl Menger (Wien).

Einer der Haupteinwände, die gegen die Lehre von den allgemeinen Punktmengen und Raumgebilden seitens mancher Mathematiker erhoben werden, besteht darin, daß diese Theorie keine Anwendungen auf die Probleme habe, welche die Mathematiker seit Jahrhunderten beschäftigen. Völlig abseits von der Entwicklung der übrigen Mathematik und ohne Zusammenhang mit ihr untersuche man einige Absonderlichkeiten und stelle man einige Regelmäßigkeiten fest, welche angewendet auf die konkreten belangreichen Probleme der Mathematik völlig trivial sind. Verhält sich dies wirklich so? Ich will hier nicht wiederholen, was ich andern Ortes [1]) gegen diese Auffassung gesagt habe, welche meiner Überzeugung nach vor allem durch die Entwicklung der Mathematik selbst widerlegt werden wird, eine Entwicklung, welche durch die Propagierung der dargelegten Auffassung höchstens etwas hinausgeschoben, nicht aber aufgehalten werden kann. Aber ich möchte einige Punkte meiner gegenteiligen Ansicht in dem Jubiläumsbande der *Fundamenta Mathematicae*, welche ja in der Kultivierung der neuen Gedankenrichtung eines ihrer Hauptziele erblicken, präzisieren und an einigen neuesten Wiener Ergebnissen erläutern.

Von großem Interesse für den Geometer ist beispielsweise die Kenntnis der lokalen metrischen Eigenschaften von Raumgebilden. Ein ganz außerordentlich fruchtbares Mittel zur teilweisen Erreichung dieses Zieles lieferte zu Beginn der Neuzeit die Entdeckung der analytischen Geometrie im Verein mit der bald darauf ent-

[1]) z. B. in den Akten des Internat. Math. Kongresses, Zürich 1932, Bd. I.

deckten Analysis: Die Punkte des Raumes werden durch Koordinaten, die Raumgebilde durch differenzierbare Funktionen und Gleichungen definiert und den lokalen Eigenschaften der Raumgebilde Relationen zwischen diesen Funktionen und ihren Ableitungen zugeordnet. Bilden aber — rein geometrisch betrachtet! — diese Koordinatendarstellung, diese Gleichungsdarstellung, diese Differenzierbarkeitsvoraussetzungen u. s. w. den Kern des Problemes oder sind sie nicht vielmehr bloße, wenn auch höchst fruchtbare Hilfsmittel zu seiner Behandlung? Ist es ein Abirren von den großen Problemen der Geometrie, wenn man die lokalen metrischen Eigenschaften von Raumgebilden direkt untersucht (wofern dies nur gelingt!), ohne Darstellungen durch Koordinaten, durch differenzierbare Funktionen u. s. w. vorauszusetzen? Ist es nicht vielmehr eine Verwechslung eines Mittels mit dem Zweck, wenn man die Differentialgeometrie im heutigen Sinn mit der Theorie der lokalen metrischen Eigenschaften von Raumgebilden identifiziert?

Ein Beispiel möge dies erläutern. Um die Krümmung einer Fläche in einem Punkt zu definieren, geht man seit Gauss so vor, daß man die Punkte der Fläche durch Koordinaten, die Fläche selbst durch differenzierbare Funktionen darstellt und die Krümmung durch den bekannten Differentialausdruck definiert. Demgegenüber habe ich die Aufgabe formuliert [1]) einfach mit Punktequadrupeln und ihren Abstands-Sextupeln operierend die Krümmung zu definieren. Diese schwierige Aufgabe ist nun kürzlich von A. Wald [2]) in ebenso scharfsinniger, wie befriedigender Weise gelöst worden. Damit ein metrischer Raum (im Sinne von Fréchet), welcher kompakt und konvex [3]) ist, eine Gauss'sche Fläche sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Raum in jedem Punkte eine Krümmung besitze; dabei, sagt Wald, der metrische Raum besitzt im Punkte p eine Krümmung u. zw. die Krümmung $\varkappa$, wenn für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ zu je vier Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 des Raumes, welche hinlänglich kleine Abstände von p haben, eine

[1]) Vgl. meinen Bericht über metrische Geometrie im Jahresber. d. DMV., 40, ferner die Abhandlung in den Math. Annalen 103.

[2]) In einer in den Ergebnissen eines mathematischen Kolloquiums, Heft 7, Wien 1935, erscheinenden Arbeit.

[3]) Im Sinne meiner Definition in den Math. Annalen 100; vgl. auch den in [1]) zitierten Bericht.

Kugel von einem Radius ϱ mit $\left|\frac{1}{\varrho^2} - \varkappa\right| < \varepsilon$ existiert, in deren Oberfläche vier mit p_1, p_2, p_3, p_4 kongruente Punkte p_1', p_2', p_3', p_4' enthalten sind, wobei als Abstand $p_i' p_j'$ die Länge des kürzeren Großkreisbogens zwischen p_i' und p_j' betrachtet wird. Kann man auf eine naturgemäßere und einfachere Weise die Krümmung einer Fläche erklären, als auf diese weder Koordinaten, noch Gleichungen, noch Differenzierbarkeitsvoraussetzungen verwendende Art der metrischen Geometrie? Und gibt es eine erstaunlichere Tatsache der Flächentheorie als diesen Satz, daß die bloße Existenz einer Krümmung im Waldschen Sinne gewährleistet, daß ein kompakter konvexer metrischer Raum eine Gauss'sche Fläche sei? Ist es etwas anderes als eine, wenn auch durch die suggestive Wirkung der epochalen Entdeckungen von Newton und Leibniz leicht erklärliche, so doch zufällige historische Verkettung von Umständen, wenn man demgegenüber die analytischen Methoden der Differentialgeometrie mit der Lehre von den lokalen metrischen Eigenschaften des Raumes identifiziert?

Ein anderes Beispiel des überwiegenden Einflusses, welchen die Entdeckung der wundervollen Methoden der Differential- und Integralrechnung unentwegt auf die Geometrie nahm und selbst auf die Formulierung von Problemen, die in ihrem Kern rein geometrisch sind und mit Analysis nichts zu tun haben, liefert die Variationsrechnung. Zwar hat hier der Begriff des Funktionales die Formulierung der allgemeinen Frage gestattet, ob, wenn jedem Bogen gewisser Art irgendwie eine Zahl zugeordnet ist, ein Bogen der betreffenden Art existiere, dem ein kleinster oder größter Funktionalwert zugeordnet ist. Aber welche Bogenfunktionen werden in der Variationsrechnung nach wie vor fast ausschließlich untersucht? Diejenigen, welche dem durch die Funktion $y = y(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ definierten Bogen für eine gewisse Funktion F von drei Variablen die Zahl $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))\, dx$ zuordnen, oder analoge Funktionale für Bogen in Parameterdarstellung. Die Probleme der Variationsrechnung einfacher Integrale sind also fast ausschließlich Extremumsaufgaben für Bogenfunktionale besonderer Art, nämlich für Funktionale, welche bestimmte Integrale von Funktionen sind, die ihrerseits wieder von Ableitungen abhängen, also für Funktionale, welche analytisch durch zwei bestimmte (zu einander teilweise inverse)

Grenzprozesse gebildet sind. Daß im Spezialfall der Bogenlänge die von den Entdeckern der Analysis aufgestellte Definition $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ weder naturgemäß, noch allgemein ist, wurde frühzeitig erkannt. Hinsichtlich sonstiger Integrale wurde in der Variationsrechnung bloß als störend empfunden, daß (als Folge der angeführten analytischen Formulierung des Problemes) eine Beschränkung der Lösung inbezug auf die Klasse der zulässigen Vergleichskurven unentbehrlich sei. Diese Klasse wurde zwar dank den unausgesetzten Bemühungen der Mathematiker ständig erweitert, bleibt aber doch daran gebunden, daß alle Vergleichskurven irgendwie differenzierbar sein müssen, damit die Funktion $F(x, y(x), y'(x))$ in irgend einem Sinne definiert und integrierbar sei. Macht man sich hingegen von der analytischen Formulierung des Problemes frei, so besteht kein Grund, sich auf Vergleichskurven mit irgendwelchen Differenzierbarkeitseigenschaften einzuschränken.

Es war Tonelli, welcher bekanntlich das allgemeine Problem im wesentlichen gelöst hat. Und doch werden die folgenden Überlegungen, welche den geometrischen Kern der Frage in voller Reinheit herausschälen und sodann Hilberts direkte Methode im Verein mit den Verfahrensweisen der metrischen Geometrie anwenden, vielleicht nicht als überflüssig empfunden werden. Die neue metrische Methode der Variationsrechnung (welche im Folgenden zunächst verwendet wird, um die definiten quasiregulären Probleme in eine geometrische Theorie der Bogenlänge in Räumen, die noch allgemeiner als Fréchets metrische Räume sind, einzuordnen) unterwirft nämlich die Vergleichskurven buchstäblich keiner Einschränkung mehr und macht auch die letzten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über F entbehrlich. Außerdem werden die folgenden Ausführungen vielleicht auch in gleicher Weise dazu führen, einerseits die Sätze und Beweise der Variationsrechnung Schritt für Schritt geometrisch durchsichtig und überblickbar zu gestalten und andererseits einen gewissen Nutzen der metrischen Geometrie allgemeiner Räume und Raumgebilde auch für klassische Probleme zu erweisen [1]).

[1]) Den Herren A. Wald und F. Alt bin ich für ihre wertvolle Hilfe bei der Ausarbeitung der folgenden Untersuchung zu Dank verpflichtet.

Fastmetrischer Raum. So heiße eine Menge, in der je zwei Elementen (auch „Punkte" genannt) p und q eine nichtnegative Zahl pq (ein „Abstand") zugeordnet ist gemäß folgenden Bedingungen:

1) $pp = 0$ für jeden Punkt p.

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß aus $pq < \delta$ stets $qp < \varepsilon$ folgt, m. a. W. es existiert eine Funktion $\sigma(x)$, welche wir die *Symmetriefunktion* des Raumes nennen, mit $\lim\limits_{x=0} \sigma(x) = 0$, so daß $pq \leqq \sigma(qp)$ für je zwei Punkte p, q gilt.

3) Es existiert eine Funktion $\Delta(x) \geqq 0$, welche wir die *Dreiecksfunktion* des Raumes nennen, mit $\lim\limits_{x=0} \Delta(x) = 0$ und $\Delta(0) = 0$, so daß, wenn wir die kleinere bzw. die größere der Zahlen x, y mit $\operatorname{Min}(x, y)$ bzw. $\operatorname{Max}(x, y)$ bezeichnen, für je drei Punkte p, q, r des Raumes die Ungleichung gilt:

$$pr \leqq pq + qr + \operatorname{Min}(pq, qr)\,\Delta[\operatorname{Max}(pq, qr)].$$

Diese für das Folgende fundamentale Ungleichung will ich die *abgeschwächte Dreiecksungleichung* nennen. Wir haben also für je drei Punkte p, q, r:

$$pr \leqq pq + qr \cdot \{1 + \Delta[\operatorname{Max}(pq, qr)]\}$$

und

$$pr \leqq qr + pq \cdot \{1 + \Delta[\operatorname{Max}(pq, qr)]\}.$$

Ist $pq = qr = 0$, so auch $pr = 0$.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir, wie es im Folgenden stets geschehen soll, die Symmetrie- und die Dreiecksfunktion als *monoton wachsend* annehmen. Sind die Symmetrie- und die Dreiecksfunktion speziell linear, so existiert eine Konstante $\sigma > 0$ derart, daß $pq \leqq \sigma \cdot qp$, und eine Konstante $\Delta \geqq 0$, so daß $pr \leqq pq + qr + \Delta \cdot pq \cdot qr$ gilt. Ist $\sigma = 1$, also $\sigma(x) = x$, und $\Delta = 0$, also $\Delta(x) \equiv 0$, so ist der Abstand symmetrisch, die abgeschwächte Dreiecksungleichung wird zur Dreiecksungleichung und der fastmetrische Raum ist ein metrischer Raum im Sinne von Fréchet.

Stetigkeit der Metrik. *In einem fastmetrischen Raum existiert zu jedem $d > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\beta > 0$ derart, daß für je vier Punkte p, q, p', q' aus $pq < d$, $pp' < \beta$, $qq' < \beta$ stets $|pq - p'q'| < \varepsilon$ folgt.*

Wir setzen $2d + d\cdot\Delta(d) = d'$, $2d' + d'\cdot\Delta(d') = d''$, $m = \Delta(d'')$, haben dann $d < d' < d''$, $\Delta(d) \leqslant \Delta(d') \leqslant m$ und zeigen, daß die Behauptung erfüllt ist, wenn pp' und qq' so klein gewählt werden, daß die vier Zahlen pp', qq', $\sigma(pp')$, $\sigma(qq')$ erstens $< d$ und zweitens $< \frac{\varepsilon}{2(1+m)}$ sind. Wir haben dann nämlich:

$pq' \leqq pq + qq'\cdot(1+\Delta(d))$, woraus folgt,

daß $pq' < d'$ und $pq' < pq + \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

$$pq \leqq pq' + q'q\cdot(1+\Delta(d')) < pq' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$p'q' \leqq pq' + p'p\cdot(1+\Delta(d'))$,

woraus folgt $p'q' < d''$ und $p'q' < pq' + \frac{\varepsilon}{2}$.

$$pq' \leqq p'q' + pp'\cdot(1+\Delta(d'')) < p'q' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $|pq' - pq| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|pq' - p'q'| < \frac{\varepsilon}{2}$, so gilt $|pq - p'q'| < \varepsilon$, wie behauptet.

Ist M eine geordnete Teilmenge eines fastmetrischen Raumes, so bezeichnen wir als *Durchmesser* von M die obere Schranke $d(M)$ der Zahlen pq für alle Punktepaare p, q von M, für welche p in M vor q liegt. Eine endliche geordnete Menge nennen wir ein *Polygon*. Für $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}\}$ ist $d(Q)$ die größte der Zahlen $q_i q_j$ $(i < j;\ i, j = 0, 1, \ldots, n+1)$. Als *Länge* von Q bezeichnen wir die Zahl $l(Q) = \sum_{i=1}^{n+1} q_{i-1} q_i$.

Polygonungleichung. *Zu jedem $d > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für je zwei Punkte p und r, für welche $pr < \delta$ ist un für jedes Polygon $Q = \{q_0 = p, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} = r\}$, für welches $d(Q) < d$ gilt, die Ungleichung besteht $pr - l(Q) < \varepsilon\cdot pr$.*

Die Behauptung ist evident, wenn $l(Q) > pr$, denn dann ist $pr - l(Q) < 0$. Wir können also annehmen

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} q_{i-1} q_i \leqq pr.$$

Daraus folgt insbesondere $q_{i-1} q_i \leqq pr$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Wenn wir also $pr < d$ wählen, so haben wir, wenn $d(Q) < d$ und mithin auch $q_i r < d$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ gilt:

$$q_i r \leqq q_{i+1} r + q_i q_{i+1}\cdot(1+\Delta(d)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Daraus ergibt sich:

$$q_i r \leqq (1+\Delta(d))\cdot l(Q) \leqq (1+\Delta(d))\cdot pr \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Setzen wir $d' = (1+\Delta(d))\cdot pr$, so haben wir, da auch

$$q_{i-1} q_i \leqq pr < d' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

gilt:

$$pr \leqq q_0 q_1 + q_1 r + q_0 q_1\cdot\Delta(d'),$$
$$q_1 r \leqq q_1 q_2 + q_2 r + q_1 q_2\cdot\Delta(d'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{n-1} r \leqq q_{n-1} q_n + q_n r + q_{n-1} q_n\cdot\Delta(d'),$$

also $pr \leqq l(Q)\cdot(1+\Delta(d'))$ und daher wegen (*) $pr - l(Q) \leqq \Delta(d')\cdot pr$. Wählen wir pr so klein, daß $\Delta(d') < \varepsilon$, so ist die Behauptung erfüllt. Mit dem bewiesenen Satz gleichbedeutend ist folgende

Zweite Form der Polygonungleichung. *Zu jedem $d > 0$ existiert eine Funktion $\pi_d(x)$ mit $\lim_{x=0} \pi_d(x) = 0$, welche ohne Beschränkung der Allgemeinheit als monoton wachsend angenommen werden kann, so daß für je zwei Punkte p und r und für jedes Polygon $Q = \{q_0 = p, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} = r\}$, für welches $d(Q) < d$ gilt, die Ungleichung besteht:*

$$l(Q) \geqq pr\cdot(1 - \pi_d(pr)).$$

Als *Norm* $\nu(Q)$ des Polygones $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ bezeichnen wir die größte der $n-1$ Zahlen $q_1 q_2, q_2 q_3, \ldots, q_{n-1} q_n$. Sind M und M' geordnete Mengen und kann jedem Punkt p von M ein Punkt p' von M' so zugeordnet werden, daß $pp' < \beta$ und daß, wenn q in M nach p liegt, stets der q zugeordnete Punkt q' in M' nach p' liegt, dann sagen wir, M liege *geordnet in der β-Nachbarschaft* von M'. Insbesondere liegt also das Polygon $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ geordnet in der *β-Nachbarschaft* des Polygones $E' = \{p_1', p_2', \ldots, p_l'\}$ $(l \geqq k)$, wenn jedem Punkt p_j von E ein Punkt p'_{i_j} von E' so zugeordnet werden kann, daß $p_j p'_{i_j} < \beta$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ und $i_j < i_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ gilt.

Unterhalbstetigkeit der Polygonlänge. *Zu jedem $d > 0$, zu jedem Polygon E und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\beta > 0$ derart, daß für jedes Polygon E', in dessen β-Nachbarschaft E geordnet liegt, wenn $d(E) < d$ und $d(E') < d$ gilt, die Beziehung besteht:*

$$l(E') > l(E) - \varepsilon - \omega(\nu(E)), \qquad \text{wo} \quad \lim_{x=0} \omega(x) = 0.$$

Wir wählen, wenn E aus den k Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ besteht, β auf Grund der Stetigkeit der Metrik so klein, daß für je vier Punkte p, q, p', q', für welche $pq < d$, $pp' < \beta$ und $qq' < \beta$ gilt, stets

$$(*) \quad |pq - p'q'| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{und} \quad (**) \quad |pq - p'q'| < \nu(E)$$

folgt. Ist dann E' ein Polygon, in dessen β-Nachbarschaft E geordnet liegt, und ist p'_{i_j} ein Punkt von E', so daß $p_j p'_{i_j} < \beta$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ gilt, wobei $i_j < i_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$, so bezeichnen wir mit E'' das Polygon $p'_{i_1}, p'_{i_2}, \ldots, p'_{i_k}$ und haben wegen (*) bzw. (**)

$$(\dagger) \quad l(E'') > l(E) - \varepsilon \quad \text{und} \quad (\dagger\dagger) \quad p'_{i_j} p'_{i_{j+1}} < 2\nu(E).$$

Aus der letzteren Ungleichung folgt mit Rücksicht auf $d(E') < d$ nach der zweiten Form der Polygonungleichung:

$$l(E') > l(E'') \cdot [1 - \pi_d(2\nu(E))], \quad \text{wo} \quad \lim_{x=0} \pi_d(x) = 0,$$

also bei Verwendung von ($\dagger$):

$$\binom{**}{*} \quad l(E') > l(E) - \varepsilon - l(E) \cdot \pi_d(2\nu(E)), \qquad \text{q. e. d.}$$

Schleppend in der Form, aber zweckmäßig für Anwendungen ist folgendes

Korollar. *Zu jedem $d > 0$, $L > 0$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $\nu > 0$ derart, daß für jedes Polygon E, für welches $\nu(E) < \nu$, $l(E) < L$ gilt, ein $\beta > 0$ existiert derart, daß für jedes Polygon E', in dessen β-Nachbarschaft E geordnet liegt, wenn $d(E) < d$ und $d(E') < d$ gilt, die Beziehung $l(E') > l(E) - \varepsilon$ besteht.*

Wir sagen, die Teilmenge M' von M sei *ε-dicht* in M, wenn zu jedem Punkt p von M mindestens ein Punkt p' von M' in beiderseitigem Abstand $< \varepsilon$ von p existiert, d. h. so, daß $pp' < \varepsilon$ und $p'p < \varepsilon$.

Hilfssatz über Bogen. *Ist in einem fastmetrischen Raum B ein Bogen mit den Endpunkten p_0 und p_1, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\nu > 0$ derart, daß jedes Polygon $E \subset B$, für welches $\nu(E) < \nu$ gilt und das zu p_0 und zu p_1 je einen Punkt in beiderseitigem Abstand $< \nu$ enthält, ε-dicht in B ist.*

Da B ein Bogen ist, existiert eine eineindeutige beiderseits stetige, also beiderseits gleichmäßig stetige Abbildung zwischen B und dem Intervall $[0, 1]$, welche jeder Zahl t $(0 \leqq t \leqq 1)$ einen Punkt $p(t)$ von B zuordnet, wobei $p_0 = p(0)$ und $p_1 = p(1)$ angenommen werden kann. Zum gegebenen ε existiert ein $\zeta > 0$ derart, daß aus $|t_1 - t_2| < \zeta$ stets $p(t_1)\,p(t_2) < \varepsilon$ folgt. Zu diesem ζ existiert ein $\nu > 0$ derart, daß für je zwei Punkte p und p' von B, für welche $pp' < \nu$ gilt, wenn $p = p(t)$ und $p' = p(t')$ ist, stets $|t - t'| < \zeta$ folgt. Ist nun $E = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ ein Polygon $\subset B$, für welches $\nu(E) < \nu$ gilt und welches zu p_0 und zu p_1 je einen Punkt q_{i_0} bzw. q_{i_1} in einem Abstand $< \nu$ enthält, so folgt, wenn $q_i = p(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gilt, $|t_{i-1} - t_i| < \zeta$, $|t_{i_0} - 0| < \zeta$, $|t_{i_1} - 1| < \zeta$. Zu jedem t aus $[0, 1]$ gilt dann für mindestens eine der Zahlen $i = 1, 2, \ldots, k$ die Beziehung $|t - t_i| < \zeta$, also $p(t)\,p(t_i) < \varepsilon$ und $p(t_i)\,p(t) < \varepsilon$. Von jedem Punkt p von B hat mithin mindestens einer der Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_k$ von E einen Abstand $< \varepsilon$.

Als *Teilpolygon* eines orientierten Bogens B bezeichnen wir nun eine endliche Teilmenge von B, welche so geordnet ist wie B.

Fundamentalsatz über Bogenlänge. *Es seien $\{E_n\}$ und $\{E'_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.$)$ zwei Folgen von Teilpolygonen des orientierten Bogens B, für welche $\lim_{n=\infty} \nu(E_n) = 0$ und $\lim_{n=\infty} \nu(E'_n) = 0$ ist. Wenn dann von den beiden Zahlenfolgen $\{l(E_n)\}$ und $\{l(E'_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.$)$ eine konvergiert (u. zw. gegen eine endliche Zahl oder gegen ∞), so konvergiert auch die andere, u. zw. gegen den gleichen Grenzwert, welcher dann mit $l(B)$ bezeichnet und die Länge von B genannt werden soll.*

Wir nennen d den *Durchmesser* von B. Für jedes Teilpolygon E von B gilt dann $d(E) < d$. Sei $\lim_{n=\infty} l(E_n) = l$ endlich. Wegen $\lim_{n=\infty} \nu(E_n) = 0$ existiert zu $2d$ und $L = 2l$ nach dem Korollar des Satzes von der Unterhalbstetigkeit der Polygonlänge für fast alle n für das Polygon E_n zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\beta > 0$ derart, daß für jedes Teilpolygon E' von B, in dessen β-Nachbarschaft E geordnet liegt, $l(E') > l(E_n) - \varepsilon$ gilt. Sei nun E_n irgend ein bestimmtes Polygon, zu dem für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $\beta > 0$ existiert und es sei $\varepsilon > 0$ irgend eine vorgegebene Zahl. Wegen $\lim_{m=\infty} \nu(E'_m) = 0$ wird für hinreichend großes m die Zahl $\nu(E'_m)$ beliebig klein, insbesondere nach dem Hilfssatz über Bogen so klein, daß E'_m in B β-dicht liegt. Bezeichnen wir für jeden Punkt p_j von E_n

$(j=1,2,\dots,k)$ den ersten auf ihn im Bogen B folgenden Punkt von E'_m mit p'_{i_j}, so gilt $i_j < i_{j+1}$ bei hinreichend kleiner Wahl von β. Es liegt dann also E_n bei hinreichend großer Wahl von m geordnet in der β-Nachbarschaft von E'_m, so daß $l(E'_m) > l(E_n) - \varepsilon$ für alle hinreichend großen m gilt. Da die Voraussetzungen in den Folgen $\{E_n\}$ und $\{E'_m\}$ symmetrisch[1]) sind, so gilt ebenso $l(E_n) > l(E'_m) - \varepsilon$ für alle hinreichend großen m und n und beliebig kleines $\varepsilon > 0$, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. Aus ihr folgert man mühelos das

Korollar. *Zu jedem orientierten Bogen B der Länge l und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\nu > 0$ derart, daß für jedes Teilpolygon E von B, für welches $\nu(E) < \nu$ gilt, wenn l endlich ist, $|l(E) - l| < \varepsilon$ gilt, wie klein ε auch sein mag, wenn dagegen l unendlich ist, $l(E) > \varepsilon$ gilt, wie groß ε auch sein mag.*

Aus den beiden Formen der Polygonungleichung ergibt sich nun unmittelbar die

Bogenlängenungleichung. *Zu jedem $d > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für je zwei Punkte p und r, für welche $pr < \delta$ gilt, jeder Bogen B mit den Endpunkten p und r und $d(B) < d$ der Ungleichung genügt: $l(B) > pr \cdot (1 - \varepsilon)$.* Oder, was gleichbedeutend ist: *Zu jedem $d > 0$ existiert eine Funktion $\lambda_d(x)$ mit $\lim_{x=0} \lambda_d(x) = 0$, welche ohne Einschränkung der Allgemeinheit als monoton wachsend angenommen werden kann, derart, daß für je zwei Punkte p und r und für jeden sie verbindenden Bogen B von einem Durchmesser $< d$ die Beziehung $l(B) > pr \cdot (l - \lambda_d(pr))$ gilt.*

Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge. *Es sei in einem fastmetrischen Raum ein orientierter Bogen B von endlicher Länge und eine beschränkte offene Menge $U \supset B$ gegeben. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\beta > 0$ derart, daß für jeden Bogen B', der $\subset U$ ist und in dessen β-Nachbarschaft B geordnet liegt, $l(B') > l(B) - \varepsilon$ gilt.*

Dabei meinen wir mit den Worten, U sei *beschränkt*, in üblicher Weise, daß eine endliche Zahl u existiert derart, daß für je zwei Punkte p, q von U die Ungleichungen $pq < u$ und $qp < u$ gelten. Zum Beweise wählen wir zunächst eine Zahl $\nu > 0$ so klein, daß

[1]) Der Fall $\lim_{n=\infty} l(E_n) = \infty$ erledigt sich analog auf Grund der Formel $(\ast\ast)$, S. 448.

(1) für jedes Teilpolygon E von B aus $\nu(E) < \nu$ stets $l(E) > l(B) - \dfrac{\varepsilon}{3}$ folgt, was nach dem Korollar des Fundamentalsatzes möglich ist;

(2) $\lambda_u(2\nu) < \dfrac{\varepsilon}{3\, l(B)}$, wo u die Abstandsschranke von U und λ die in der Bogenungleichung auftretende Funktion ist, so daß also aus $pr < 2\nu$ für jeden in p und r endenden Bogen $B^* \subset U$ stets $l(B^*) > pr \cdot \left(l - \dfrac{\varepsilon}{3\, l(B)}\right)$ folgt.

Wir bilden hierauf ein Teilpolygon $E = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ von B mit $\nu(E) < \nu$ und wählen β so klein, daß aus $pq < d(B)$, $pp' < \beta$, $qq' < \beta$ stets folgt

$$(3)\quad |pq - p'q'| < \frac{\varepsilon}{3k} \qquad \text{und} \qquad (4)\quad p'q' < pq + \nu.$$

Ist dann B' ein Bogen $\subset U$, in dessen β-Nachbarschaft B geordnet liegt, so wählen wir zu jedem Punkt p_j von E einen Punkt p'_j von B', so daß $p_j p'_j < \beta$ $(j = 1, 2, \dots, k)$ und p'_j in B' vor p'_{j+1} liegt. Mit E' bezeichnen wir das Polygon $p'_1, p'_2, \dots, p'_k$. Aus (3) folgt

$$(5)\qquad l(E') > l(E) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen (4) gilt mit Rücksicht auf (2)

$$(6)\qquad l(B') > l(E') \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{3\, l(B)}\right).$$

(1), (5), (6) ergeben zusammengenommen die Behauptung $l(B') > l(B) - \varepsilon$.

Ist B irgend ein Teilbogen eines fastmetrischen Raumes, so können wir eine Folge $\{E_n\}$ von Teilpolygonen von B bilden mit $\lim_{n=\infty} \delta(E_n) = 0$. Ist die Zahlenfolge $\{l(E_n)\}$ $(n = 1, 2, \dots, \text{ad inf.})$ beschränkt, so enthält sie eine konvergente Teilfolge und $l(B)$ ist nach dem Fundamentalsatz über Bogenlänge eine endliche Zahl. Ist die Zahlenfolge $\{l(E_n)\}$ nicht beschränkt, so enthält sie eine gegen ∞ konvergente Teilfolge und nach dem Fundamentalsatz gilt $l(E) = \infty$. Nach der Bogenlängenungleichung ist stets $l(B) > 0$. Die Bogenlänge ist also ein Funktional, das

1) *allgemein* und *positiv* ist, d. h. jedem orientierten Bogen eines fastmetrischen Raumes eine endliche Zahl >0 oder ∞ zuordnet,

2) *unterhalbstetig* ist,

3) *additiv* ist, d. h. ist der orientierte Bogen B Summe der bis auf einen gemeinsamen Endpunkt fremden Bogen B' und B'', so gilt, wie man leicht zeigt, $l(B)=l(B')+l(B'')$. Aus diesen Eigenschaften folgert man mühelos, daß die Bogenlänge

4) *monoton und stetig innerhalb jedes Bogens endlicher Länge* ist, d. h. ist B ein die Punkte p_0 und p_1 verbindender Bogen endlicher Länge und bezeichnen wir für jeden Punkt p von B mit B_p den p_0 und p verbindenden Teilbogen von B, so gilt, wenn p zwischen p_0 und q $(\neq p)$ liegt, stets $l(B_p)<l(B_q)$ und aus $\lim_{n=\infty} p_n = p$ folgt stets $\lim_{n=\infty} l(B_{p_n}) = l(B_p)$.

Ordnen wir demnach jedem Punkt p eines Bogens B von endlicher Länge die Zahl $l(B_p)$ zu, so entsteht eine kongruente Abbildung von B auf das Intervall $[0, l(B)]$. Insbesondere existiert, wenn p_0 und p_1 die Endpunkte von B bezeichnen, zu jedem τ aus $[0,1]$ genau ein Punkt von B, den wir im Folgenden stets mit $p(B,\tau)$ bezeichnen werden, so daß $l(B_{p(B,\tau)})=\tau\cdot l(B)$.

Wir beweisen nun (im wesentlichen nach Hilberts Methode, indem wir für die Details auf unsere Arbeit in den Mathem. Annalen 103, S. 492 verweisen) das

Existenztheorem für geodätische Bogen in fastmetrischen Räumen. *Zu je zwei Punkten eines kompakten fastmetrischen Raumes, welche durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, existiert ein sie verbindender geodätischer Bogen, d. h. ein Bogen, dessen Länge von der Länge keines die beiden Punkte verbindenden Bogens unterschritten wird.*

Es seien p_0 und p_1 zwei Punkte, welche durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind. Bezeichnen wir mit γ die untere Schranke der Längen aller p_0 und p_1 verbindenden Bogen, so ist dann γ eine endliche Zahl und es existiert eine Folge $\{B^n\}$ $(n=1,2,\ldots$ ad inf.) von Bogen, welche p_0 und p_1 verbinden und für welche $\lim_{n=\infty} l(B^n)=\gamma$ gilt. Wir setzen $B^n=B^{0,n}$ für jedes natürliche n, bilden die Punktefolge $p\left(B^{0,n},\frac{1}{2}\right)$, greifen aus ihr eine (wegen der Kompaktheit des Raumes existierende) konvergente Teilfolge heraus, deren Grenzpunkt wir mit $p\left(\frac{1}{2}\right)$ bezeichnen, und wählen eine Teilfolge $\{B^{1,n}\}$ $(n=1,2,\ldots$ ad inf.) der Folge $B^{0,n}$ so, daß $\lim_{n=\infty} p\left(B^{1,n},\frac{1}{2}\right)=p\left(\frac{1}{2}\right)$ gilt. Wir machen nun die Annahme, es seien bereits für die ganze Zahl $m\geqq 1$ die Punkte $p\left(\frac{k}{2^m}\right)$ $(k=0,1,2,\ldots,2^m)$ definiert und eine Teilfolge $\{B^{m,n}\}$ $(n=1,2,\ldots$ ad inf.) der Folge $\{B^{m-1,n}\}$. Wir bilden dann die $2^{m+1}+1$ Punktefolgen $\left\{p\left(B^{m,n},\frac{k}{2^{m+1}}\right)\right\}$ $(k=0,1,\ldots,2^{m+1}$; $n=1,2,\ldots$ ad inf.), heben aus jeder dieser Folgen eine konvergente Punktefolge heraus, deren Grenzpunkt wir mit $p\left(\frac{k}{2^{m+1}}\right)$ bezeichnen, und greifen aus der Folge $\{B^{m,n}\}$ eine Teilfolge $\{B^{m+1,n}\}$ heraus, so daß $\lim_{n=\infty} p\left(B^{m+1,n},\frac{k}{2^{m+1}}\right)=p\left(\frac{k}{2^{m+1}}\right)$ $(k=0,1,\ldots,2^{m+1})$ gilt. Durch die unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens wird also jeder dyadisch rationalen Zahl d aus $[0,1]$ eindeutig ein Punkt $p(d)$ des Raumes zugeordnet. Diese Abbildung ist in beiden Richtungen gleichmäßig stetig: sind d und d' zwei Zahlen, für welche $d'-d$ $(\geqq 0)$ hinlänglich klein ist, so kann $p(d)p(d')$ nicht allzu groß sein, denn sonst wählten wir die Punkte $p(B^n,d)$ und $p(B^n,d')$ durch hinreichend große Wahl von n sehr nahe an $p(d)$ bzw. an $p(d')$ und könnten dann zwischen die letzteren zwei Punkte ein Polygon einspannen, dessen Länge viel kleiner wäre als der Abstand $p(d)\,p(d')$, was nach der Polygonungleichung unmöglich ist. Ist andererseits $p(d)\,p(d')$ sehr klein, und dabei $d'-d$ $(\geqq 0)$ groß, so könnte man offenbar p_0 und p_1 durch einen Bogen einer Länge $<\gamma$ verbinden, im Widerspruch zur Definition von γ. In der letzteren Bemerkung ist insbesondere enthalten, daß die Abbildung der Menge der dyadisch rationalen Zahlen d auf die Punkte $p(d)$ eineindeutig ist. Wegen ihrer gleichmäßigen Stetigkeit kann sie erweitert werden zu einer topologischen Abbildung des Intervalles $[0,1]$ auf eine Teilmenge B des Raumes, welche also ein Bogen ist, der p_0 und p_1 verbindet und demnach eine Länge $\geqq\gamma$ hat. Anderseits existiert zu jedem noch so kleinen $\beta>0$ ein Bogen B^n, in dessen β-Umgebung B liegt, so daß also wegen $\lim_{n=\infty} l(B^n)=\gamma$ mit Rücksicht auf die Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge $l(B) \leqq \gamma$ gilt Damit ist gezeigt, daß B ein p_0 und p_1 verbindender Bogen der Länge γ, d. h. ein geodätischer Bogen ist.

Indem wir hiermit diese vorläufigen Ausführungen über fastmetrische Räume beschließen, bemerken wir noch, daß es für gewisse Zwecke vorteilhaft ist, die eingangs definierten fastmetrischen Räume als *positiv-fastmetrisch* zu bezeichnen und ihnen *negativ-fastmetrische* Räume mit nichtpositiven Abständen und einer umgekehrten Dreiecksungleichung an die Seite zu stellen. In solchen negativ-fastmetrischen Räumen ist die Bogenlänge *oberhalb stetig* und je zwei Punkte, die durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, sind auch durch einen *längsten* Bogen verbunden.

Um die im Vorangehenden entwickelte Theorie auf die Variationsrechnung anzuwenden, betrachten wir eine Funktion $F(x, y, x', y')$, welche definiert und stetig ist für alle Quadrupel reeller Zahlen, für welche x, y die Koordinaten irgend eines Punktes p eines beschränkten Stückes $\overline{G}$ (d. h. der abgeschlossenen Hülle einer beschränkten offenen Menge) der Ebene und x', y' nicht beide $= 0$ sind. F sei positiv homogen vom Grade 1 in x', y'. Wegen der letzteren Eigenschaft ist die Funktion F vollständig bestimmt, wenn man für jeden festen Punkt $p = (x, y)$ von $\overline{G}$ und für jedes ϑ aus $[0, 2\pi]$ den Wert von $F(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)$, den wir mit $F(p, \vartheta)$ bezeichnen wollen, kennt. Besitzt F partielle Ableitungen nach x' und y', so gilt dann überdies die Eulersche Homogenitätsrelation

$$(*) \qquad F(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta) = \\ = \cos\vartheta \cdot F'_{x'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta) + \sin\vartheta \cdot F'_{y'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta).$$

Wir machen nun, indem wir für je zwei Punkte p und q von $\overline{G}$ mit $\overline{pq}$ ihren euklidischen Abstand bezeichnen, über F folgende Voraussetzungen:

1) Es existiert eine Konstante Λ, so daß für jedes ϑ und für je zwei Punkte p und q von $\overline{G}$:

$$|F(p, \vartheta) - F(q, \vartheta)| < \Lambda \cdot \overline{pq}.$$

2) $F(p, \vartheta) > 0$ für alle p von $\overline{G}$ und alle ϑ. Infolge der Stetigkeit von F existieren also zwei Zahlen m_F und M_F, so daß:

$$0 < m_F \leqq F(p, \vartheta) \leqq M_F \text{ für alle } p \text{ aus } \overline{G} \text{ und alle } \vartheta \text{ aus } [0, 2\pi].$$

3) Die Funktion F besitzt stetige zweite partielle Ableitungen nach x' und y'; für die durch die Beziehung

$$F_1 = \frac{F''_{x'x'}}{y'^2} = \frac{-F''_{x'y'}}{x'\,y'} = \frac{F''_{y'y'}}{x'^2}$$

definierte Funktion F_1 gilt $F_1(x, y, x', y') \geqq 0$ für alle x, y aus $\overline{G}$ und alle x', y', die nicht beide $= 0$ sind. Hieraus folgt für jedes p aus $\overline{G}$ und je zwei benachbarte Werte ϑ und ϑ_0, daß $F(p, \vartheta) =$

$$= F(p, \vartheta_0) + (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) \cdot F'_{x'}(p, \vartheta_0) + (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) \cdot F'_{y'}(p, \vartheta_0) + \\ + \frac{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)^2}{2} F''_{x'x'}(p, \vartheta^*) + \\ + (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) F''_{x'y'}(p, \vartheta^*) + \frac{(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)^2}{2} F''_{y'y'}(p, \vartheta^*),$$

wo ϑ^* zwischen ϑ und ϑ_0 liegt. Die Summe der drei letzten Summanden ist $= \frac{1}{2}[(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\, y' + (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)\, x']^2 \cdot F_1(p, \vartheta^*)$, also $\geqq 0$, so daß wir mit Rücksicht auf (*) die Formel erhalten:

$$(**) \qquad F(p, \vartheta) \leqq \cos\vartheta \cdot F'_{x'}(p, \vartheta_0) + \sin\vartheta \cdot F'_{y'}(p, \vartheta_0).$$

Sind $p_1 = (x_1, y_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte von $\overline{G}$, so betrachten wir die Menge $\mathfrak{B}$ aller p_1 und p_2 verbindenden Teilbogen B von $\overline{G}$:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \quad x(t_i) = x_i, \quad y(t_i) = y_i \quad (i = 1, 2),$$

für welche $\int_{t_1}^{t_2} F[x(t), y(t), x'(t), y'(t)]\, dt$ existiert, bezeichnen diesen Wert mit $J(B)$ und fragen nach einem Bogen B^* der Menge $\mathfrak{B}$, für welchen, wie immer wir B aus $\mathfrak{B}$ wählen, $J(B^*) \leqq J(B)$ gilt. Diese Aufgabe ist in der Ausdrucksweise von Tonelli ein positiv-definites, positiv quasireguläres Variationsproblem.

Wir ordnen nun je zwei Punkten p und q von G, wenn ϑ_{pq} den Winkel bezeichnet, welchen der von p nach q führende Vektor mit der positiven X-Achse einschließt (bzw. irgend einen Winkel, falls p und q identisch sind), die Zahl zu:

$$pq = F(p, \vartheta_{pq}) \cdot \overline{pq}$$

und behaupten:

Auf diese Weise wird $\overline{G}$ zu einem kompakten fastmetrischen Raum.

Erstens gilt offenbar $pp=0$. *Zweitens* haben wir

$$qp=F(q,\vartheta_{qp})\cdot\overline{pq}=\frac{F(q,\vartheta_{qp})}{F(p,\vartheta_{pq})}\cdot pq\leqq\frac{M_F}{m_F}\cdot pq.$$

$\sigma(x)=\frac{M_F}{m_F}\cdot x$ ist also eine Symmetriefunktion des Raumes.

Drittens behaupten wir, daß für je drei Punkte p, q, r

$$pr\leqq pq+qr+\Delta\cdot pq\cdot qr,$$

wo Δ eine Konstante ist. Zum Beweise haben wir

$$\begin{aligned}pr-pq-qr&=F(p,\vartheta_{pr})\cdot\overline{pr}-F(p,\vartheta_{pq})\cdot\overline{pq}-F(q,\vartheta_{qr})\cdot\overline{qr}=\\&=[F(p,\vartheta_{pr})\cdot\overline{pr}-F(p,\vartheta_{pq})\cdot\overline{pq}-F(p,\vartheta_{qr})\cdot\overline{qr}]+\\&\quad+[F(p,\vartheta_{qr})-F(q,\vartheta_{qr})]\cdot\overline{qr}.\end{aligned}$$

Ordnen wir dem Punkte p in einer Ebene mit Polarkoordinaten r, ϑ die Kurve $r=\frac{1}{F(p,\vartheta)}$ $(0\leqq\vartheta\leqq 2\pi)$ zu, so hat ihre Tangente im Punkte $\frac{1}{F(\vartheta_0)}, \vartheta_0$, wenn wir $\frac{d}{d\vartheta}F(p,\vartheta)=F'(p,\vartheta)$ setzen, die Gleichung

$$r=\frac{1}{\cos(\vartheta-\vartheta_0)\,F(p,\vartheta_0)+\sin(\vartheta-\vartheta_0)\,F'(p,\vartheta_0)}.$$

Unter Berücksichtigung von (*) und der Formel

$$\begin{aligned}F'(p,\vartheta_0)&=-\sin\vartheta_0\cdot F'_{x'}(x,y,\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)+\\&\quad+\cos\vartheta_0\cdot F'_{y'}(x,y,\cos\vartheta_0,\sin\vartheta_0)\end{aligned}$$

erhalten wir als Tangentengleichung

$$r=\frac{1}{\cos\vartheta\cdot F'_{x'}(p,\vartheta_0)+\sin\vartheta\, F'_{y'}(p,\vartheta_0)}.$$

Die laut Voraussetzung 3) geltende Beziehung (**) besagt also, daß die Kurve $r=\frac{1}{F(p,\vartheta)}$ nahe ϑ_0 links von der Tangente verbleibt, d. h. konvex ist. Also gilt für die durch die Eichkurve $r=\frac{1}{F(p,\vartheta)}$ definierte Metrik die Dreiecksungleichung, d. h.

$$F(p,\vartheta_{pr})\cdot\overline{pr}-F(p,\vartheta_{pq})\cdot\overline{pq}-F(p,\vartheta_{qr})\cdot\overline{qr}\leqq 0$$

und wir haben $pr-pq-qr\leqq[F(p,\vartheta_{qr})-F(q,\vartheta_{qr})]\cdot\overline{qr}$, also wegen Voraussetzung 1)

$$pr-pq-qr\leqq\Lambda\cdot\overline{pq}\cdot\overline{qr}.$$

Nach Voraussetzung 2) gilt $pq\geqq m_F\cdot\overline{pq}$ und $qr\geqq m_F\cdot\overline{qr}$, also

$$pr-pq-qr\leqq\frac{\Lambda}{m_F^2}\cdot pq\cdot qr, \qquad \text{q. e. d.}$$

Viertens ist mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Funktion $F(p,\vartheta)$ und auf die Voraussetzung 2) klar, daß der fastmetrische Raum $\overline{G}$ mit dem Stück $\overline{G}$ der Ebene homöomorph, also, da dieses beschränkt und abgeschlossen ist, ein *kompakter* fastmetrischer Raum ist.

Dabei sehen wir, daß in dieser Argumentation die Voraussetzung 3) ersetzt werden kann durch die folgende erheblich schwächere Voraussetzung:

3′) *Für jeden Punkt p ist die Kurve $r=\frac{1}{F(p,\vartheta)}$ konvex (ohne daß $F(x,y,x',y')$ nach x' oder y' partielle Ableitungen zu besitzen braucht!)* [1].

In dem fastmetrischen Raum, zu dem wir $\overline{G}$ gemacht haben, ist die Länge $l(B)$ ein für jeden Bogen definiertes Funktional, das, wenn für einen Bogen B das Integral $J(B)$ existiert, offenbar mit $J(B)$ übereinstimmt. Diese Länge ist aber, wie wir in der allgemeinen Theorie fastmetrischer Räume gezeigt haben, unterhalb stetig und zu je zwei Punkten, welche durch einen Teilbogen endlicher Länge von $\overline{G}$ verbindbar sind, existiert ein geodätischer Bogen. Damit ist also gezeigt: *Zu je zwei Punkten p und q eines beschränkten Stückes $\overline{G}$ der Ebene, welche durch einen Bogen $B\subset\overline{G}$ mit endlichem Funktionalwert $J(B)$ verbunden sind, existiert ein p und q verbindender Bogen $\subset\overline{G}$, für welchen der Wert eines Funktionals, das für alle Bogen $\subset\overline{G}$ definiert ist und mit $J(B)$ da, wo dieses letztere Funktional definiert ist, übereinstimmt, höchstens so groß ist, wie für irgend einen (keinerlei Einschränkungen unterworfenen) p und q verbindenden Bogen $\subset\overline{G}$.* Es bedarf wohl keiner näheren Ausführung, daß so wie die Lösung der Minimumsaufgabe für ein positiv definites und positiv quasireguläres Problem in die Theorie der positiv fast-

[1]) Daß die Voraussetzung $F_1\geqq 0$ durch eine Konvexitätsbedingung ersetzt werden kann, hat bereits Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni I*, p. 268, bemerkt, wo jedoch die Existenz von $F'_{x'}$ und $F'_{y'}$ vorausgesetzt wird, was wir ebenfalls entbehren können. Auch von unserer Voraussetzung 1) könnten wir uns frei machen.

metrischen Räume eingeordnet wurde, die Maximumsaufgabe für ein negativ definites und negativ quasireguläres Problem sich in eine Theorie der negativ fastmetrischen Räume einordnen läßt.

Zum Abschluß heben wir nochmals hervor: Wir brauchen über $F(x, y, x', y')$ hinsichtlich keiner der vier Variablen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu machen und wir lassen in unseren Extrema-Aussagen für Bogen beliebige koextremale Vergleichsbogen zu, welche keinerlei Differenzierbarkeitseigenschaften haben müssen. Dazu kommt, daß unsere Theorie der fastmetrischen Räume Extrema Aufgaben für Bogenfunktionale zu lösen gestattet, welche bei der Behandlung klassischer Variationsprobleme hinsichtlich des Abstandes $F(p, \vartheta_{pq}) \cdot \overline{pq}$ gar nicht auftreten können. Denn für die klassischen Integrale besitzt diese Funktion der Punktepaare, wie wir sahen, stets eine lineare Symmetrie- und eine lineare Dreiecksfunktion, während die Theorie der fastmetrischen Räume über diesen Spezialfall weit hinausgeht

Insbesondere Konsequenzen dieses letzten Umstandes werden den Gegenstand einer folgenden Abhandlung bilden Im übrigen ist klar, daß eine Ausdehnung der Ergebnisse von Bogen auf *stetige Streckenbilder* (insbesondere eines großen Teiles der von mir in den Math. Annalen 103 entwickelten Theorie der Bogenlänge), ferner eine Ausdehnung auf *räumliche Variationsprobleme*, auf Probleme mit *freien Endpunkten* und mit gewissen *Nebenbedingungen*, sowie auf Integrale der Form $\int_{x_2}^{x_3} F(x, y, y')\,dx$ ziemlich mühelos möglich ist. Aber es ist auch klar, daß für die in den außerordentlich scharfsinnigen Untersuchungen von Tonelli, Hahn und anderen behandelten *semidefiniten* Probleme unsere metrische Methode von Nutzen sein kann, und es ist sogar die Hoffnung nicht unbegründet, daß sie für Variationsprobleme mit *Doppelintegralen* durch Entwicklung einer entsprechenden Theorie des Flächeninhaltes Fortschritte bringen wird.

Wien, im Juli 1935.

Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe.

Par

Pierre Novikoff (Moscou).

Les principaux théorèmes liés à la notion de séparabilité — introduite par M. Lusin dans la théorie des ensembles analytiques — sont les suivants [1]):

Premier principe: Deux ensembles analytiques sans points communs sont toujours séparables au moyen d'ensembles mesurables B.

Deuxième principe: Si l'on supprime de deux ensembles analytiques leur partie commune, les parties restantes sont toujours séparables au moyen de complémentaires analytiques.

Ces deux principes ont permis d'étudier un grand nombre de propriétés des ensembles analytiques et de leurs complémentaires; en particulier, ils ont permis de préciser la nature des fonctions implicites mesurables B.

C'est pourquoi M. Lusin a attiré l'attention aux problèmes de la séparabilité des ensembles projectifs [2]).

Le but de cette communication est de donner la solution des problèmes en question pour le cas des ensembles projectifs de seconde classe.

[1]) Cf. N. Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 155—163, 208—222. Cf. l. c. 222—252 et mon Mémoire *Sur les fonctions implicites mes. B*, Fund. Math. t. 17.

[2]) N. Lusin l. c. p. 289.