(6.4). *If, as in* (6.2), *the* 2-*cells* $Z_n \to Z$ *regularly relative to* 0- *and* 1-*cycles and if* $J_n \to J$ *regularly relative to* 0-*cycles, then* Z *is a* 2-*cell bounded by* J.

For by (6.2), Z is a hemicactoid with base set B bounded by J; by (6.3), it follows that under these conditions, Z reduces to its base set B; and finally, by (6.1) [or (3.2)], J is a simple closed curve. Thus $B = Z$ is a 2-cell bounded by J, and our theorem is proven.

In conclusion, we call attention to the fact that in all cases considered in this paper, 0-regular convergence for a sequence of sets of type A has yielded as limiting set a type of set B which can be obtained by an upper semi-continuous decomposition [1]) of A into continua, or in other words, a type of set B which can be the image of A under a „monotone" transformation in the sense of C. B. Morrey (loc. cit). This suggests that our results above may be approached from an „analytic" or transformation point of view. This is indeed the case, and a study of this method of approach will be made in an article which is to follow the present one.

[1]) See R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1932, Ch. V.

The University of Virginia.

Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension.

Von

Heinz Hopf (Zürich).

Die Frage, für welche Dimensionszahlen N und n mit $N > n$ es möglich ist, die Sphäre S^N wesentlich auf die Sphäre S^n abzubilden [1]), ist meines Wissens bisher nur in zwei Fällen beantwortet: 1) Für jedes $N > 1$ ist es unmöglich, die Sphäre S^N wesentlich auf den Kreis S^1 abzubilden; 2) es ist möglich, die Sphäre S^3 auf die Kugelfläche S^2 wesentlich abzubilden [2]).

Die Frage scheint mir aus verschiedenen Gründen der weiteren Untersuchung wert zu sein. Erstens, versagt bei der Behandlung der Abbildungen der S^N in die S^n die übliche Methode des Abbildungsgrades; denn in S^N ist jeder n-dimensionale Zyklus homolog Null und wird daher mit dem Grade 0 abgebildet; infolgedessen zwingt unsere Frage dazu, nach neuen Methoden zu suchen. Zweitens, weisen eine Reihe bekannter Sätze darauf hin, daß sich in der Existenz einer wesentlichen Abbildung eines Raumes R auf die S^n

[1]) Eine stetige Abbildung f_0 des Raumes A auf den Raum B heißt „wesentlich", wenn bei jeder Abbildung f_1, in welche sich f_0 stetig überführen läßt, das Bild $f_1(A)$ der ganze Raum B ist. Ist B eine Sphäre, so bedeutet die Unwesentlichkeit von f_0, daß sich f_0 in eine solche Abbildung f_1 stetig überführen läßt, bei welcher $f_1(A)$ ein einziger Punkt ist.

[2]) H. Hopf, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104. Die Kenntnis dieser Arbeit wird für das folgende vorausgesetzt. Einen neuen Beweis für die wesentliche Abbildbarkeit der S^3 auf die S^2 hat W. Hurewicz gegeben: *Beiträge zur Topologie der Deformationen*, Proceed. Amsterdam XXXVIII („Anwendungen", S. 117).

wichtige gestaltliche Eigenschaften von R ausdrücken [3]). Drittens, ist durch den von Hurewicz eingeführten Begriff der „mehrdimensionalen Homotopiegruppe" die Frage, ob sich in einem vorgelegten Raume R jedes stetige Bild der S^N auf einen Punkt zusammenziehen läßt, in ein neues Licht gerückt worden [4]).

Die nachstehenden Bemerkungen führen einerseits zu dem Satz: „*Für jedes $k \geqslant 1$ existieren wesentliche Abbildungen der S^{4k-1} auf die S^{2k}*" — einer allerdings ziemlich spärlichen und unbefriedigenden Verallgemeinerung des früheren Satzes über die S^3 und S^2; andererseits lassen sie Zusammenhänge unserer Frage mit anderen Sätzen und Problemen sichtbar werden, welche mir Interesse zu verdienen scheinen.

1. Zuerst muss ich kurz über die Methode berichten, die beim Nachweis der Existenz wesentlicher Abbildungen der S^3 auf die S^2 zum Ziele geführt hat [5]).

Es sei f eine simpliziale Abbildung einer Mannigfaltigkeit M^3 in eine Mannigfaltigkeit Γ^2; ist ξ innerer Punkt eines Simplexes τ^2 von Γ^2 und T^3 ein Simplex von M_3, das auf τ^2 abgebildet ist, so ist die Originalmenge von ξ in T^3 eine Strecke, die man in naheliegender Weise, auf Grund der Orientierungen von τ^2 und T^3, orientiert; Summation über alle Simplexe T^3 von M^3, die auf τ^2 abgebildet sind, faßt diese Strecken zu einem eindimensionalen *Zyklus* $\varphi(\xi)$, dem „Originalzyklus" von ξ, zusammen. Wenn nun M^3 die Sphäre S^3 ist, so haben je zwei Zyklen $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$ eine *Verschlingungszahl* γ; das Vorzeichen von γ will ich, da es nachher (Nr. 3) noch besonders betrachtet werden soll, vorläufig vernachlässigen. Die Zahl $|\gamma|$ hängt von der Wahl der Punkte ξ_1, ξ_2 nicht ab. Sie läßt sich auch folgendermaßen charakterisieren: ist C^2 ein von $\varphi(\xi_1)$ berandeter Komplex in S^3, so ist γ der Betrag des *Grades*, mit welchem C^2 in S^2 abgebildet wird; dabei ist zu beachten, daß dieser Grad wohldefiniert ist, weil der Rand $\varphi(\xi_1)$ von C auf einen

[3]) Man vergl.: Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106; Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. 106; Bruschlinsky, *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. 109; Freudenthal, *Die Hopfsche Gruppe*, Compos. Math. 2; Hopf, *Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre*, Comment. Math. Helvet. 5.

[4]) Hurewicz, wie in Fußnote [2]).

[5]) Vgl. Fußnote [2]).

einzigen Punkt, nämlich ξ_1, von Γ^2 abgebildet wird; die Übereinstimmung dieses Grades mit der Verschlingungszahl $|\gamma|$ ergibt sich daraus, daß γ definitionsgemäß die algebraische Anzahl der Schnittpunkte von C^2 mit dem Originalzyklus $\varphi(\xi_2)$ eines zweiten Punktes ξ_2, also die Anzahl der auf C^2 gelegenen Originalpunkte von ξ_2 ist.

Es zeigt sich nun weiter: die Zahl $|\gamma|$ ist eine Invariante der Abbildungsklasse von f; damit ist $|\gamma|$ zugleich für beliebige *stetige*, nicht notwendig simpliziale, Abbildungen f erklärt. Insbesondere folgt: *wenn $\gamma \neq 0$ ist, so ist f wesentlich.*

2. Bis hierher läßt sich alles ohne nennenswerte Änderung auf die Abbildungen der Sphäre S^{2n-1} in eine Mannigfaltigkeit Γ^n bei beliebigem $n > 2$ übertragen: zunächst sei wieder f simplizial und T^{2n-1} ein Simplex von M^{2n-1}, das auf das Simplex τ^n von Γ^n abgebildet wird; dann bilden die Originalpunkte eines inneren Punktes ξ von τ^n eine — wie eine leichte Dimensions-Abzählung zeigt — $(n-1)$-dimensionale Zelle in T^{2n-1}; bei geeigneter und naheliegender Orientierung dieser Zellen und Summation über die Simplexe T^{2n-1} von M^{2n-1} entsteht der $(n-1)$-dimensionale Originalzyklus $\varphi(\xi)$ von ξ in M^{2n-1}. Ist $M^{2n-1} = S^{2n-1}$, so ist die Verschlingungszahl $|\gamma|$ je zweier Originalzyklen $\varphi(\xi_1)$ und $\varphi(\xi_2)$ erklärt [6]); sie hat dieselben Eigenschaften wie im Fall $n = 2$; insbesondere gilt auch hier: *ist $\gamma \neq 0$, so ist f wesentlich.*

Man erhält also wesentliche Abbildungen von S^{2n-1} auf M^n, falls es gelingt, Abbildungen mit $\gamma \neq 0$ zu konstruieren. Wir werden sogleich sehen, daß dies nicht für jedes n möglich ist.

3. Hierfür ist die Betrachtung des bisher vernachlässigten Vorzeichens von γ ausschlaggebend. Es sei, wie in Nr. 1, C^n ein von $\varphi(\xi_1)$ berandeter Komplex in S^{2n-1}; wir verstehen unter γ_{ξ_1} den Grad der Abbildung von C^n in Γ^n; dann ergibt sich, wie schon in Nr. 1 hervorgehoben wurde, daß $|\gamma_{\xi_1}|$ mit dem Betrag der Schnittzahl $\Phi(C^n, \varphi(\xi_2))$ übereinstimmt, wobei ξ_2 ein beliebiger, von ξ_1 verschiedener, Punkt von Γ^2 ist; es ist also

$$\Phi(C^n, \varphi(\xi_2)) = \varepsilon \cdot \gamma_{\xi_1},$$

[6]) Wenn man allgemeiner die Abbildungen einer M^N auf eine M^n mit $N > n$ betrachtet, so haben die Zyklen $\varphi(\xi)$ die Dimension $N - n$; damit die Verschlingungszahlen $\mathfrak{v}(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))$ definiert sind, muß $2(N-n) = N-1$, also $N = 2n-1$ sein.

und hierbei ist $\varepsilon = \pm 1$; auf die leicht durchzuführende Bestimmung von ε verzichten wir; jedenfalls ist klar: ε hängt nur von den auftretenden Dimensionszahlen, also von n, aber nicht von den Punkten ξ_1 und ξ_2 ab. Die Verschlingungszahl von $\varphi(\xi_1)$ und $\varphi(\xi_2)$ wird durch

$$\mathfrak{v}(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) = \Phi(C^n, \varphi(\xi_2))$$

erklärt; es ist also

$$\mathfrak{v}(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) = \varepsilon \cdot \gamma_{\xi_1}. \tag{1}$$

Nun gilt für die Verschlingungszahl eines r-dimensionalen mit einem s-dimensionalen Zyklus im R^N oder in der S^N (natürlich mit $r + s = N - 1$) [7]):

$$\mathfrak{v}(z_1^r, z_2^s) = (-1)^{rs+1}\, \mathfrak{v}(z_2^s, z_1^r).$$

In unserem Fall ist also, da $r = s = n - 1$, und daher $rs + 1 \equiv n \mod 2$ ist:

$$\mathfrak{v}(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) = (-1)^n \cdot \mathfrak{v}(\varphi(\xi_2), \varphi(\xi_1)).$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$\gamma_{\xi_1} = (-1)^n \cdot \gamma_{\xi_2}. \tag{2}$$

Ziehen wir noch einen dritten Punkt ξ_3 heran, so ist ebenfalls

$$\gamma_{\xi_1} = (-1)^n\, \gamma_{\xi_3}, \tag{2'}$$

$$\gamma_{\xi_2} = (-1)^n\, \gamma_{\xi_3}. \tag{2''}$$

Setzt man (2″) in (2) ein, so folgt

$$\gamma_{\xi_1} = \gamma_{\xi_3}. \tag{2'''}$$

Dies lehrt erstens: *die Invariante γ ist auch bezüglich des Vorzeichens wohlbestimmt;* und zweitens zeigt der Vergleich von (2′) und (2‴):

Satz I. *Bei ungeradem n ist $\gamma = 0$ für jede Abbildung der Sphäre S^{2n-1} auf eine Mannigfaltigkeit M^n.*

Bei ungeradem n versagt also unsere Methode zur Auffindung wesentlicher Abbildungen der S^{2n-1} auf die S^n, und die Frage, ob solche Abbildungen existieren, bleibt offen.

[7]) Man vergl. hierfür, wie überhaupt für die Verschlingungs-Eigenschaften im R^N (oder in der S^N), das Kap. XI des Buches „*Topologie*" (1. Band) von Alexandroff und Hopf.

4. Wir werden also den Fall $n = 2k$ betrachten; unser Ziel ist der Beweis von

Satz II. *Für jedes $k \geqq 1$ gibt es Abbildungen der Sphäre S^{4k-1} auf die Sphäre S^{2k} mit $\gamma \neq 0$, also wesentliche Abbildungen* [7a]).

Genauer:

Satz II′. *Für jedes $k \geqq 1$ gibt es Abbildungen von S^{4k-1} auf S^{2k} mit $\gamma = 2$.*

Die Konstruktion von Abbildungen, welche die Behauptung des Satzes II′ erfüllen, beruht auf der Betrachtung der Abbildungen der Produktmannigfaltigkeit $P^{2r} = S_1^r \times S_2^r$ zweier r-dimensionaler Sphären — also einer der möglichen Verallgemeinerungen der Torusfläche — auf die Sphäre S^r. In P^{2r} wird eine r-dimensionale Homologiebasis von den Zyklen

$$Z_1^r = S_1^r \times p_2, \qquad Z_2^r = p_1 \times S_2^r$$

gebildet, wobei p_1, p_2 Punkte in S_1^r bezw. S_2^r bezeichnen. Der Homologietypus einer Abbildung g von P^{2r} in die S^r wird durch die Grade c_1, c_2 beschrieben, mit welchen die Zyklen Z_1^r, Z_2^r in die S^r abgebildet werden; wir sagen: die Abbildung g ist vom *Typus* (c_1, c_2).

Nun gelten die folgenden beiden Sätze:

Satz III. *Wenn es eine Abbildung von $S_1^r \times S_2^r$ in die S^r vom Typus (c_1, c_2) gibt, so gibt es eine Abbildung der S^{2r+1} in die S^{r+1} mit $\gamma = c_1 \cdot c_2$.*

Satz IV. *Ist r ungerade, so gibt es eine Abbildung von $S_1^r \times S_2^r$ auf die S^r vom Typus* (1, 2).

Es ist klar, daß der Satz II′, und damit der Satz II, aus den Sätzen III und IV folgt, wenn man $r = 2k - 1$ setzt; es handelt sich also um die Beweise der beiden letztgenannten Sätze.

5. Als Vorbereitung für den Beweis des Satzes III überzeugen wir uns davon, daß sich das bekannte Heegaardsche Torus-Diagramm der S^3 auf die Sphäre S^{2r+1} übertragen läßt ($r \geqq 1$).

Die S^{2r+1} sei im R^{2r+2} durch die Gleichung

$$x_1^2 + \ldots + x_{2r+2}^2 = 1$$

[7a]) Aus der Existenz von Abbildungen mit $\gamma \neq 0$ ergibt sich leicht (vgl. meine in Fussnote [3]) zitierte Arbeit): Es gibt *unendlich viele Klassen* von Abbildungen der S^{4k-1} auf die S^{2k}.

gegeben. Wir zerlegen sie in die folgendermaßen gegebenen Hälften V_1^{2r+1} und V_2^{2r+1}:

$$V_1^{2r+1}: \quad x_1^2+\ldots+x_{r+1}^2 \leqslant x_{r+2}^2+\ldots x_{2r+2}^2;$$
$$V_2^{2r+1}: \quad x_1^2+\ldots+x_{r+1}^2 \geqslant x_{r+2}^2+\ldots x_{2r+2}^2.$$

Jeder Teil V_i^{2r+1} ist, wie man leicht sieht, dem Produkt $S^r \times E^{r+1}$ homöomorph, wobei E^{r+1} eine $(r+1)$-dimensionale Vollkugel ist. In $S^r \times E^{r+1}$ wird eine r-dimensionale Homologiebasis von einem Zyklus der Form $S^r \times p$ gebildet, wobei p einen Punkt von E^{r+1} bezeichnet; in V_1^{2r+1} und V_2^{2r+1} sind derartige Zyklen zum Beispiel die folgendermaßen bestimmten Sphären Y_1^r und Y_2^r:

$$Y_1^r: \quad x_1=c, \quad x_2=\ldots=x_{r+1}=0, \quad x_{r+2}^2+\ldots+x_{2r+2}^2=1-c^2,$$
$$Y_2^r: \quad x_1^2+\ldots+x_{r+1}^2=1-c^2, \quad x_{r+2}=c, \quad x_{r+3}=\ldots=x_{2r+2}=0,$$

wobei c eine beliebige Konstante mit $c^2 \leqslant \frac{1}{2}$ ist.

Der Durchschnitt $V_1^{2r+1} \cdot V_2^{2r+1}$ ist zugleich die gemeinsame Begrenzung von V_1^{2r+1} und V_2^{2r+1}; er ist mit $P^{2r} = S_1^r \times S_2^r$ homöomorph und folgendermaßen bestimmt:

$$P^{2r}: \quad x_1^2+\ldots+x_{r+1}^2 = x_{r+2}^2+\ldots+x_{2r+2}^2.$$

Wählen wir in der obigen Darstellung von Y_1^r und Y_2^r die Konstante $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, so erhalten wir zwei Zyklen $Y_1^r=Z_1^r$, $Y_2^r=Z_2^r$, welche dieselbe Bedeutung haben wie die in Nr. 4 eingeführten Zyklen Z_1^r, Z_2^r und also eine r-dimensionale Homologiebasis in P^{2r} bilden.

Der Zyklus Z_1^r berandet einen in V_2^{2r+1} gelegenen Komplex C_2^{r+1}, nämlich das — geeignet orientierte — Element, das folgendermaßen definiert ist:

$$C_2^{r+1}: \quad x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=\ldots=x_{r+1}=0, \quad x_{r+2}^2+\ldots+x_{2r+2}^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Die Schnittzahl von C_2^{r+1} mit einer Sphäre Y_2^r, welche im Inneren von V_2^{2r+1} liegt, ist ± 1; daher ist auch die Verschlingungszahl

$$\mathfrak{v}(Z_1^r, Y_2^r) = \pm 1; \tag{3}$$

da jede Sphäre Y_2^r in V_1^{2r+1}, also im Komplementärraum von Y_2^r, mit Z_1^r homolog ist, läßt sich (3) zu

$$\mathfrak{v}(Y_1^r, Y_2^r) = \pm 1 \tag{3'}$$

verallgemeinern (dabei muß von den beiden Sphären Y_1^r, Y_2^r wenigstens eine im Inneren V_1^{2r+1} bezw. V_2^{2r+1} liegen, damit sie fremd zueinander sind, die Verschlingungszahl also definiert ist).

6. Beweis des Satzes III. Die Sphären S^{2r+1} und S^{r+1} sind gegeben. Wir zerlegen S^{2r+1} gemäß Nr. 5 in die Hälften V_1^{2r+1} und V_2^{2r+1} mit der gemeinsamen Begrenzung P^{2r}; ferner zerlegen wir S^{r+1} durch eine Äquatorsphäre S^r in zwei Halbkugeln E_1^{r+1} und E_2^{r+1}. Wir üben eine Abbildung des Typus (c_1, c_2) von P^{2r} auf S^r aus. Diese Abbildung erweitern wir sowohl zu einer Abbildung von V_1^{2r+1} in E_1^{r+1} als auch zu einer Abbildung von V_2^{2r+1} in E_2^{r+1} [8]). Es entsteht eine Abbildung f von S^{2r+1} in S^r. Wir behaupten: für diese Abbildung f ist $\gamma = \pm c_1 \cdot c_2$.

Wir dürfen f als simplizial voraussetzen; dann sind, wenn ξ_1, ξ_2 innere Punkte r-dimensionaler Simplexe von E_1^{r+1} bezw. E_2^{r+1} sind, die r-dimensionalen Originalzyklen $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$ definiert, und zwar liegt $\varphi(\xi_1)$ in V_1^{2r+1}, $\varphi(\xi_2)$ in V_2^{2r+1}. Daher gelten Homologien

$$\varphi(\xi_i) \sim b_i Y_i^r \quad \text{in} \quad V^{2r+1} \quad \text{für} \quad i=1,2. \tag{4}$$

Da Z_1^r durch f mit dem Grade c_1 in S^r abgebildet wird, wird der von Z_1^r berandete Komplex C_2^{r+1} (vgl. Nr. 5) durch f mit dem Grade c_1 in das von S^r berandete Element E_2^{r+1} abgebildet. Dies bedeutet (vgl. Nr. 2), daß C_2^{r+1} mit dem Zyklus $\varphi(\xi_2)$ die Schnittzahl $\pm c_1$ hat, und diese Schnittzahl ist die Verschlingungszahl des Randes Z_1^r von C_2^{r+1} mit $\varphi(\xi_2)$; es ist also

$$\mathfrak{v}(Z_1^r, \varphi(\xi_2)) = \pm c_1.$$

Aus (3) und (4) folgt andererseits

$$\mathfrak{v}(Z_1^r, \varphi(\xi_2)) = \pm b_2.$$

Daher ist $b_2 = \pm c_1$, das heißt

$$\varphi(\xi_2) \sim \pm c_1 Y_2^r \quad \text{in} \quad V_2^{2r+1}; \tag{5_2}$$

[8]) Diese Erweiterungen lassen sich, da die Elemente E_i^{r+1} mit Vollkugeln homöomorph sind, sowohl vermöge des bekannten Satzes über die Erweiterbarkeit stetiger Funktionen als auch durch spezielle Konstruktionen ausführen.

ebenso ergibt sich

$$(5_2) \qquad \varphi(\xi_1) \sim \pm c_2 Y_1^r \quad \text{in} \quad V_1^{2r+1}.$$

Aus (5_1), (5_2) und $(3')$ folgt

$$\mathfrak{v}(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) = \pm c_1 \cdot c_2.$$

Aber die links stehende Verschlingungszahl ist γ, also ist in der Tat $\gamma = \pm c_1 \cdot c_2$.

Falls $\gamma = + c_1 \cdot c_2$ ist, ist damit der Satz III bewiesen. Falls $\gamma = - c_1 \cdot c_2$ ist, so nehme man zuerst eine Abbildung des Grades -1 der S^{2r+1} auf sich und hierauf die soeben konstruierte Abbildung f von S^{2r+1} auf S^{r+1} vor; für die so zusammengesetzte Abbildung f' ist $\gamma' = + c_1 \cdot c_2$. Damit ist der Satz III vollständig bewiesen.

7. Beweis des Satzes IV. Für die Untersuchung der Abbildungen der Produktmannigfaltigkeit $S_1^r \times S_2^r$ auf die Sphäre S^r deuten wir die Punkte von $S_1^r \times S_2^r$ als Punktepaare (p_1, p_2) auf S^r. Eine stetige Abbildung g von $S_1^r \times S_2^r$ in die S^r besteht dann darin, daß jedem Punktepaar (p_1, p_2) von S^r ein Punkt $q = g(p_1, p_2)$ von S^r zugeordnet ist, der stetig von p_1 und p_2 abhängt.

Daß die Abbildung g den Typus (c_1, c_2) besitzt, bedeutet: die Abbildungen $g_{p_2}(p_1) = g(p_1, p_2)$ von S^r auf sich, die entstehen, wenn p_1 bei festgehaltenem p_2 die Sphäre S^r durchläuft, haben den Grad c_1; und das Analoge gilt für die Abbildungen $g_{p_1}(p_2) = g(p_1, p_2)$ bei festgehaltenem p_1 und den Grad c_2.

Aus der Produktregel für die Abbildungsgrade ergibt sich: wenn g den Typus (c_1, c_2) hat und wenn h_1, h_2 Abbildungen von S^r auf sich mit den Graden b_1, b_2 sind, so hat die Abbildung h von $S_1^r \times S_2^r$ auf S^r, die durch $h(p_1, p_2) = g(h_1(p_1), h_2(p_2))$ gegeben ist, den Typus $(b_1 c_1, b_2 c_2)$. Aus diesem Grunde brauchen wir, um, wie es der Satz IV verlangt, eine Abbildung des Typus $(1, 2)$ zu konstruieren, nur eine Abbildung des Typus $(\pm 1, \pm 2)$ mit irgendwelcher Vorzeichenverteilung zu finden.

Eine derartige Abbildung erhalten wir folgendermaßen: es bezeichne P_2 diejenige $(r-1)$-dimensionale Ebene durch den Mittelpunkt von S^r, die senkrecht auf dem durch p_2 gehenden Durchmesser steht; dann verstehen wir unter $q = g(p_1, p_2)$ denjenigen Punkt von S^r, in welchen p_1 bei Spiegelung an P_2 übergeht. Diese Abbildung g ist offenbar stetig; wir behaupten: bei ungeradem r hat sie den Typus $(-1, \pm 2)$.

Erstens, ist klar: die Abbildung g_{p_2} von S^r auf sich, die entsteht, wenn p_1 bei festem p_2 die Sphäre S^r durchläuft, hat den Grad $c_1 = -1$, denn sie ist eine Spiegelung an einer $(r-1)$-dimensionalen Ebene. Wir haben noch den Grad c_2 der Abbildung g_{p_1} bei festem p_1 zu bestimmen.

Aus der Definition des Punktes $q = g_{p_1}(p_2)$ als Spiegelbild von p_1 an P_2 ergibt sich für die Abbildung g_{p_1}: 1) jeder Großkreis der S^r, der durch p_1 geht, wird auf sich abgebildet; 2) führt man auf einem solchen Kreis eine Winkelkoordinate mit p_1 als Nullpunkt ein, so geht der Punkt p_2 mit der Koordinate α in den Punkt q mit der Koordinate $2\alpha - \pi$ über. Aus diesen beiden Eigenschaften ist ersichtlich, daß die Halbkugel H_1^r von S^r, deren Mittelpunkt p_1 ist, folgendermaßen abgebildet wird: ihre Randsphäre S^{r-1} wird auf p_1 abgebildet; ihr Inneres $H_1^r - S^{r-1}$ wird topologisch auf $S^r - p_1$ abgebildet (und zwar so, daß p_1 in seinen Antipoden übergeht). Die Abbildung der zu H_1^r komplementären Halbkugel $\overset{*}{H}{}_1^r$ ist durch die Abbildung von H_1^r infolge der Tatsache bestimmt, daß je zwei antipodische Punkte p_2, $\overset{*}{p}_2$ von S^r denselben Bildpunkt haben.

Nun habe die topologische Abbildung g_{p_1} von H_1^r den Grad $\varepsilon = \pm 1$; wir setzen in Satz IV voraus, daß r ungerade ist; daher hat die Abbildung von S^r auf sich, die je zwei Antipoden miteinander vertauscht, den Grad $+1$; daraus folgt: die Abbildung g_{p_1} von $\overset{*}{H}{}_1^r$ hat ebenfalls den Grad ε. Mithin hat die Abbildung g_{p_1} von S^r den Grad $2\varepsilon = \pm 2$, w. z. b. w.

8. Durch den hiermit geführten Beweis des Satzes IV ist unser Hauptziel, der Beweis des Satzes II, erreicht. Der Satz IV legt aber die folgende Aufgabe nahe, mit der wir uns noch beschäftigen wollen: *man soll für jede Dimensionszahl r alle möglichen Typen (c_1, c_2) der Abbildungen von $S_1^r \times S_2^r$ auf S^r aufzählen.*

Nun sieht man sofort, daß es für jedes $r \geqq 1$ Abbildungen des Typus $(c, 0)$ mit beliebigem c gibt: man hat, in der Bezeichnungsweise der vorigen Nummer, nur $g(p_1, p_2) = h(p_1)$ zu setzen, wobei h eine Abbildung des Grades c von S^r auf sich bezeichnet; ebenso lassen sich Abbildungen des Typus $(0, c)$ mit beliebigem c konstruieren. Die Typen $(c, 0)$ und $(0, c)$ darf man als „trivial“ bezeichnen. Die erste Frage, die man sich bei Behandlung der obigen

Aufgabe stellen wird, ist: für welche r gibt es nicht-triviale Abbildungen? Die Antwort lautet:

Satz V. *Es gibt dann und nur dann nicht-triviale Abbildungen von $S_1^r \times S_2^r$ auf S^r, wenn r ungerade ist.*

In der Tat: die Existenz nicht-trivialer Abbildungen bei ungeradem r ist im Satz IV enthalten. Wenn es andererseits für ein gewisses r eine nicht-triviale Abbildung gibt, so gibt es nach Satz III eine Abbildung der Sphäre S^{2r+1} auf die Sphäre S^r mit $\gamma \neq 0$; dann folgt aus Satz I, daß r ungerade ist.

Die Aufgabe der Aufzählung der Typen (c_1, c_2) ist damit für die geraden r gelöst: es gibt die Typen $(c, 0)$, $(0, c)$ mit beliebigem c und nur diese; schwieriger scheint die Aufgabe für die ungeraden r zu sein; hier ist mir die vollständige Lösung nicht bekannt. Besonderes Interesse verdient die Frage: gibt es Abbildungen des Typus $(1, 1)$? Denn wenn es derartige Abbildungen gibt, dann gibt es, wie in Nr. 7 gezeigt wurde, auch Abbildungen vom Typus (b_1, b_2) mit beliebigen b_1, b_2; die Existenz von Abbildungen des Typus $(1, 1)$ ist also gleichbedeutend damit, daß Abbildungen mit ganz beliebig vorgeschriebenem Typus existieren.

9. Die einzigen Dimensionszahlen r, für welche mir Abbildungen vom Typus $(1, 1)$ bekannt sind, werden in dem nachstehenden Satz VI genannt; dieser Satz enthält zusammen mit dem Satz IV alles, was ich über die Existenz von Abbildungstypen (c_1, c_2) bei ungeradem r weiß.

Satz VI. *In den Fällen*

$$r = 1, \quad r = 3, \quad r = 7$$

gibt es Abbildungen des Typus $(1, 1)$ *von* $S_1^r \times S_2^r$ *auf* S^r.

Beweis. Wir ziehen die folgenden Systeme $\mathfrak{S}_r$ hyperkomplexer Größen mit $r+1$ Einheiten über dem reellen Körper heran: für $r = 1$ die komplexen Zahlen; für $r = 3$ die Hamiltonschen Quaternionen; für $r = 7$ die Cayleyschen Zahlen [9]. Wir bezeichnen die

[9]) Die Cayleyschen Zahlen sind ein hyperkomplexes System mit 8 Einheiten über dem reellen Körper, welches frei von Nullteilern ist, in welchem jedoch das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht gilt. Man vergl.: L. E. Dickson (1) *Linear Algebras*, Transact. Amer. Math. Soc. 13 (insbesondere Seite 72); (2) *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Zürich (1927) § 133; (3) *Linear Algebras*, Cambridge Tract., (1914) S. 14. Ferner: Zorn, *Theorie der alternativen Ringe*, Abh. Math. Seminar Hamburg, Bd. 8.

Größen in jedem der drei Fälle durch

$$P = \sum_{\varrho=0}^{r} x_\varrho I_\varrho,$$

wobei I_ϱ die hyperkomplexen Einheiten, x_ϱ reelle Zahlen, die „Komponenten" von P, sind. Ferner setzen wir

$$\sqrt{\sum_{\varrho=0}^{r} x_\varrho^2} = |P|.$$

Dann haben in allen drei Fällen die Systeme $\mathfrak{S}_r$ die folgenden drei Eigenschaften: 1° die Komponenten des Produktes PQ sind stetige Funktionen der Komponenten der Faktoren P und Q; 2° es existiert eine „Eins", d. h. ein solches Element E, daß für jede Größe E die Gleichungen $EP = PE = P$ gelten; 3° für die „Beträge" P gilt die Produktregel $|P| \cdot |Q| = |PQ|$.

Deuten wir die Komponenten x_ϱ als cartesische Koordinaten im R^{r+1}, so sind die P mit $|P| = 1$ eineindeutig den Punkten der Einheitssphäre S^r zugeordnet; wir bezeichnen den Punkt von S^r, der der Größe P entspricht, selbst mit P. Sind P_1, P_2 zwei Punkte dieser S^r, so folgt aus der Eigenschaft 3° auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ ist Punkt dieser S^r; setzen wir $g(P_1, P_2) = P_1 \cdot P_2$ für je zwei Punkte P_1 und P_2 der S^r, so ist dies also eine Abbildung von $S_1^r \times S_2^r$ in die S^r. Aus der Eigenschaft 1° folgt, daß diese Abbildung stetig ist. Die Eigenschaft 2° besagt: Die Abbildung $g_{E_1}(P_2) = g(E, P_2)$ von S^r auf sich, wobei P_2 variabel ist, ist die Identität, und ebenso ist die Abbildung $g_{E_2}(P_1) = g(P_1, E)$ bei variablem P_1 die Identität; daher hat g — vgl. Nr. 7 — den Typus $(1, 1)$ [10]).

[10]) Der Versuch liegt nahe, durch Heranziehung ähnlich gebauter Systeme $\mathfrak{S}_r$ auch für andere Zahlen r ähnliche Abbildungen zu konstruieren. Nun gibt es aber nach Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Göttinger Nachr. 1898 (= Ges. Werke Bd. II, S. 565), außer $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_7$, keine anderen Systeme $\mathfrak{S}_r$, welche die Produktregel 3° für die Beträge erfüllen. Jedoch würde es für unsere Zwecke genügen, Systeme $\mathfrak{S}_r$ zu haben, welche anstelle der Eigenschaft 3° die schwächere Eigenschaft besitzen, keine Nullteiler zu enthalten (man hätte dann für je zwei Punkte P_1, P_2 von S^r unter $g(P_1, P_2)$ denjenigen Punkt der S^r zu verstehen, in welchen das Produkt $P_1 \cdot P_2$ vom Nullpunkt aus projiziert wird). Ob es außer für $r = 1, 3, 7$ derartige nullteilerfreie Systeme $\mathfrak{S}_r$ gibt, ist mir nicht bekannt (die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation wird nicht gefordert).

10. Der damit bewiesene Satz VI liefert zusammen mit dem Satz III den

Satz VII. *Es gibt Abbildungen*

von S^3 *auf* S^2, *von* S^7 *auf* S^4, *von* S^{15} *auf* S^8

mit $\gamma = 1$.

Da es für $r=1$, $r=3$, $r=7$ auf Grund des Satzes VI und der in Nr. 8 festgestellten Tatsache Abbildungen von $S_1^r \times S_1^r$ auf S^r mit beliebig vorgeschriebenem Typus (b_1, b_2) gibt, kann man aus dem Satz III sogar folgern:

Satz VII'. *In den drei im Satz VII genannten Fällen gibt es Abbildungen mit beliebigem* γ.

Ob es auch in anderen Fällen Abbildungen mit $\gamma = 1$ gibt, ist mir nicht bekannt.

11. In den drei Fällen des Satzes VII existieren besonders einfache und interessante Abbildungen mit $\gamma = 1$ [11]).

Im R^{2r+2} seien cartesische Koordinaten

$$x_0, x_1 \ldots, x_r, y_0, y_1, \ldots, y_r$$

eingeführt; wir setzen voraus, daß $r=1$ oder $r=3$ oder $r=7$ ist, und fassen die x_ϱ und y_ϱ als Komponenten hyperkomplexer Größen X bezw. Y der in Nr. 9 betrachteten Systeme $\mathfrak{S}_r$ auf; dann sind die Punkte des R^{2r+2} eineindeutig den Paaren (X, Y) zugeordnet; mit anderen Worten: der R^{2r+2} wird als „$\mathfrak{S}_r$-Koordinaten-Ebene" gedeutet. Unter einer „$\mathfrak{S}_r$-Geraden" durch den Nullpunkt des R^{2r+2} verstehen wir: erstens jede Punktmenge, deren Gleichung in den $\mathfrak{S}_r$-Koordinaten

$$Y = AX \tag{6}$$

lautet, wobei A eine beliebige feste Größe aus $\mathfrak{S}_r$ ist; zweitens: die Punktmenge

$$X = 0. \tag{6_∞}$$

[11]) Für $r=1$ ist dies diejenige Abbildung der S^3 auf die S^2, die in den beiden in Fußnote [3]) zitierten Arbeiten betrachtet wird.

Diese $\mathfrak{S}_r$-Geraden sind offenbar $(r+1)$-dimensionale cartesische Ebenen, welche zu je zweien außer dem Nullpunkt keinen weiteren Punkt gemeinsam haben [12]).

Nun sei S^{2r+2} eine feste Sphäre im R^{2r+2} mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt; sie wird von jeder der genannten Ebenen in einer r-dimensionalen Großkugel geschnitten. Je zwei dieser Großkugeln sind zueinander fremd. Diese Großkugeln bilden, wie man leicht sieht, eine stetige Zerlegung der S^{2r+1}, und zwar liegt eine „Faserung" der S^{2r+1} im Sinne von Seifert vor, in der es keine „Ausnahmefaser" gibt [13]).

Wir betrachten nun noch — unabhängig von dem bisher benutzten R^{2r+2} — eine Sphäre S^{r+1}, die wir als einen durch einen Punkt ∞ abgeschlossenen R^{r+1} auffassen; in diesem R^{r+1} seien $a_0, \ldots, a_r$ cartesische Koordinaten, die wir als Komponenten der Größen A des Systems $\mathfrak{S}_r$ deuten, so daß also die Punkte von R^{r+1} eineindeutig den Größen A zugeordnet sind. Bei Hinzufügung des Punktes ∞ können wir dann die dadurch entstehende Sphäre S^{r+1} die „projektive $\mathfrak{S}_r$-Gerade" nennen.

Nun kehren wir zu der S^{2r+1} im R^{2r+2} zurück: jedem Punkt von S^{2r+1}, der auf einer durch (6) gegebenen $\mathfrak{S}_r$-Geraden liegt, ordnen wir die betreffende Größe A, jedem auf der $\mathfrak{S}_r$-Geraden (6_∞) gelegenen Punkt der S^{2r+1} ordnen wir das Symbol ∞ zu. Damit haben wir eine Abbildung der S^{2r+1} auf die S^r konstruiert, die offenbar stetig ist.

Die Originalmenge jedes Punktes ξ der S^r bei dieser Abbildung ist eine der Großkugeln, in welche die S^{2r+1} zerlegt ist. Je zwei zu einander fremde r-dimensionale Großkugeln der S^{2r+1} haben die Verschlingungszahl 1. Daraus folgt [14]): für unsere Abbildung ist $\gamma = 1$.

[12]) Sind beide Geraden vom Typus (6), sind ihre Gleichungen also $Y = AX$, $Y = A'X$ mit $A' \neq A$, so gilt für die Koordinaten jedes gemeinsamen Punktes: $(A' - A)X = 0$, also infolge des Fehlens von Nullteilern: $X = 0$ und daher auch $Y = 0$; ist eine der beiden Geraden die Gerade (6_∞), so folgt aus (6) $Y = 0$.

[13]) Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta math. 60. Der dort eingeführte Begriff der Zerlegung einer M^3 in eindimensionale Fasern läßt sich ohne weiteres zu dem Begriff der Zerlegung einer M^N in Fasern, welche r-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind, verallgemeinern.

[14]) Man vergl. § 5 meiner in Fußnote [2]) genannten Arbeit.

Das Ergebnis ist:

Satz VIII. *Es gibt Faserungen (ohne Ausnahmefasern) der Sphären S^3, S^7, S^{15} mit folgenden Eigenschaften: die einzelnen Fasern sind Großkugeln der Dimensionen* 1, 3, 7; *die induzierten Faserräume sind Sphären der Dimensionen* 2, 4, 8; *für die Faserabbildung ist* $\gamma = 1$.

12. Die Frage nach allen Typen von Faserungen [15]) der Sphären scheint mir, auch unabhängig von Abbildungs-Problemen, Interesse zu verdienen; ihre Beantwortung würde unsere Kenntnis von der Struktur der Sphären wesentlich fördern; bisher ist aber hierüber meines Wissens nicht viel bekannt. Die Betrachtungen der vorigen Nummer führen zur Konstruktion weiterer Faserungen gewisser Sphären.

Es sei r eine der beiden Zahlen 1 und 3 und ferner k eine beliebige positive ganze Zahl. Die $k(r+1)$ cartesischen Koordinaten des $R^{k(r+1)}$ fassen wir als Komponenten von k Größen $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des Systems $\mathfrak{S}_r$ auf; wir deuten also den $R^{k(r+1)}$ als „k-dimensionalen affinen $\mathfrak{S}_r$-Raum". Unter der „$\mathfrak{S}_r$-Geraden", welche den Nullpunkt mit dem Punkt $(X_1, \ldots, X_k)$ verbindet, verstehen wir die Menge derjenigen Punkte $(X_1', \ldots, X_k')$, für welche es Größen T mit $X_i' = TX_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ gibt. Man zeigt leicht: je zwei dieser Geraden haben nur den Nullpunkt gemeinsam [16]).

Jede dieser „$\mathfrak{S}_r$-Geraden" ist eine $(r+1)$-dimensionale Ebene des $R^{k(r+1)}$; sie schneidet eine feste Sphäre $S^{k(r+1)-1}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt in einer r-dimensionalen Großkugel; diese Großkugeln sind paarweise zueinander fremd; sie bilden eine Faserung der $S^{k(r+1)-1}$.

Damit haben wir, wenn wir noch diejenige Faserung berücksichtigen, die in Nr. 11 durch Heranziehung des Systems $\mathfrak{S}_7$ geliefert wurde, die folgenden Typen von *Faserungen der Sphären* S^N erhalten: 1) $N = 2k-1$, k beliebig, die Fasern sind Kreise; 2) $N = 4k-1$, k beliebig, die Fasern sind 3-dimensionale Sphären; 3) $N = 15$, die Fasern sind 7-dimensionale Sphären.

Ich hoffe, auf die damit angeschnittenen Fragen noch näher eingehen zu können.

[15]) Es sind hier immer Faserungen ohne „Ausnahmefasern" (im Sinne von Seifert) gemeint.

[16]) Für diesen Beweis braucht man die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation in $\mathfrak{S}_r$; daher muß $r = 7$ hier ausscheiden.

Metrische Geometrie und Variationsrechnung.

Von

Karl Menger (Wien).

Einer der Haupteinwände, die gegen die Lehre von den allgemeinen Punktmengen und Raumgebilden seitens mancher Mathematiker erhoben werden, besteht darin, daß diese Theorie keine Anwendungen auf die Probleme habe, welche die Mathematiker seit Jahrhunderten beschäftigen. Völlig abseits von der Entwicklung der übrigen Mathematik und ohne Zusammenhang mit ihr untersuche man einige Absonderlichkeiten und stelle man einige Regelmäßigkeiten fest, welche angewendet auf die konkreten belangreichen Probleme der Mathematik völlig trivial sind. Verhält sich dies wirklich so? Ich will hier nicht wiederholen, was ich andern Ortes [1]) gegen diese Auffassung gesagt habe, welche meiner Überzeugung nach vor allem durch die Entwicklung der Mathematik selbst widerlegt werden wird, eine Entwicklung, welche durch die Propagierung der dargelegten Auffassung höchstens etwas hinausgeschoben, nicht aber aufgehalten werden kann. Aber ich möchte einige Punkte meiner gegenteiligen Ansicht in dem Jubiläumsbande der *Fundamenta Mathematicae*, welche ja in der Kultivierung der neuen Gedankenrichtung eines ihrer Hauptziele erblicken, präzisieren und an einigen neuesten Wiener Ergebnissen erläutern.

Von großem Interesse für den Geometer ist beispielsweise die Kenntnis der lokalen metrischen Eigenschaften von Raumgebilden. Ein ganz außerordentlich fruchtbares Mittel zur teilweisen Erreichung dieses Zieles lieferte zu Beginn der Neuzeit die Entdeckung der analytischen Geometrie im Verein mit der bald darauf ent-

[1]) z. B. in den Akten des Internat. Math. Kongresses, Zürich 1932, Bd. I.