Sur quelques familles de fonctions harmoniques.

Par

Paul Montel (Paris).

1. On sait comment le groupement en familles des fonctions analytiques a permis l'étude des propriétés communes à toutes les fonctions d'une même famille, en particulier lorsque cette famille est normale. Il en est ainsi pour les familles de fonctions méromorphes admettant trois valeurs exceptionnelles, de fonctions univalentes ou multivalentes, etc.

On obtient des résultats semblables dans l'étude des familles normales de fonctions harmoniques régulières. Nous allons voir que les fonctions harmoniques bornées dans un domaine, ou admettant une valeur exceptionnelle, par exemple, forment des familles normales et nous examinerons quelles propriétés, pour les fonctions de ces familles, découlent de la solidarité qui les unit.

Examinons tout d'abord quelques critères de normalité. Nous nous bornerons, en général, aux fonctions harmoniques de trois variables, mais les résultats pourront aisément s'étendre à des fonctions harmoniques d'un nombre arbitraire de variables.

2. *Les fonctions $U(x, y, z)$ ou $U(P)$, P désignant le point de coordonnées x, y, z, harmoniques et bornées en module dans leur ensemble dans un domaine (D) forment une famille normale dans l'intérieur de ce domaine,* c'est-à-dire dans tout domaine (D') complètement intérieur à (D).

Soit en effet P un point intérieur à (D); traçons une sphère de centre P et de rayon δ tout entière intérieure à (D). On a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{v}\iiint \frac{\partial U}{\partial x}\, d\tau = \frac{1}{v}\iint U \cos\alpha\, d\sigma,$$

$d\sigma$ et $d\tau$ désignant les éléments de surface et de volume de la sphère, v le volume de cette sphère, α l'angle du rayon avec l'axe des x.

Comme $|U| \leqslant M$, on en déduit

$$\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_P\right| \leqslant M\,\frac{s}{v} = \frac{3M}{\delta},$$

s désignant la surface de la sphère. Soit alors (D') un domaine complètement intérieur à (D), 2δ la distance des frontières des domaines (D) et (D'). Chaque point P de (D') est le centre d'une sphère de rayon δ et intérieure à (D). Donc, en chaque point de (D'), les modules des dérivées partielles premières de U sont bornés par le nombre $\frac{3M}{\delta}$. Les fonctions U sont donc également continues et forment dans (D') une famille normale et bornée: la proposition est démontrée.

3. *Les fonctions $U(P)$, harmoniques et positives dans un domaine (D), forment une famille normale dans l'intérieur de ce domaine.*

Il suffit de démontrer que la famille des fonctions $U(P)$ est normale en chaque point O intérieur au domaine. Soit R le rayon d'une sphère (S) de centre O, intérieure à (D); on a, en un point P de cette sphère, d'après la formule de Poisson,

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R}\iint U(M)\,\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\,d\sigma,$$

ϱ désignant la distance OP, r la distance MP, M désignant un point de la surface de la sphère. Comme $U(M)$ est positif et que l'on a les inégalités

$$\frac{R-\varrho}{(R+\varrho)^2} \leqslant \frac{R^2-\varrho^2}{r^3} \leqslant \frac{R+\varrho}{(R-\varrho)^2},$$

on voit que

$$\frac{R(R-\varrho)}{(R+\varrho)^2}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\iint U(M)\,d\sigma \leqslant U(P) \leqslant \frac{R(R+\varrho)}{(R-\varrho)^2}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\iint U(M)\,d\sigma$$

ou, d'après le théorème de Gauss,

$$\frac{R(R-\varrho)}{(R+\varrho)^2}\,U(O) \leqslant U(P) \leqslant \frac{R(R+\varrho)}{(R-\varrho)^2}\,U(O). \tag{1}$$

Soit alors $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, une suite infinie de fonctions U_n; choisissons une suite partielle, extraite de la précédente et telle que les nombres $U_n(O)$ correspondants aient une limite A finie ou infinie; nous continuerons à appeler U_n la nouvelle suite. Supposons que le point P reste dans la sphère (S') concentrique à (S) et de rayon $\frac{R}{2}$; nous aurons les inégalités

$$\frac{2}{9} U_n(O) \leqslant U_n(P) \leqslant 6\, U_n(O).$$

Si A est fini, on voit que $U_n(P)$ est borné: donc la suite est normale dans (S'). Si A est infini, l'inégalité de gauche montre que $U_n(P)$ augmente indéfiniment d'une manière uniforme dans (S'). La famille U est donc normale au point O, donc dans l'intérieur de (D).

On en déduit aussitôt que: *les fonctions $U(P)$, harmoniques dans un domaine (D) où elles ne prennent pas une valeur α, forment une famille normale dans ce domaine.*

En effet, en tout point de (D) on a $U > \alpha$ ou $U < \alpha$; car, si on avait $U > \alpha$ en un point P_1 de (D) et $U < \alpha$ en un point P_2 de (D), la fonction continue U prendrait la valeur α en un point au moins de toute courbe intérieure à (D) et joignant P_1 et P_2. La famille est donc composée 1° des fonctions U pour lesquelles $U > \alpha$ dans (D): cette famille est normale comme celle des fonctions positives $U - \alpha$; 2° des fonctions U pour lesquelles $U < \alpha$ dans (D): cette famille est normale comme celle des fonctions positives $\alpha - U$. La réunion des deux familles donne une famille normale.

On démontrerait de la même manière que: *les fonctions U, harmoniques dans un domaine (D) où elles ne prennent pas toutes les valeurs du segment $(0, 1)$, forment une famille normale.*

Comme chaque fonction U ne prend pas toutes les valeurs du segment $(0, 1)$, on a ou bien $U > 0$ ou bien $U < 1$; et la démonstration s'achève comme la précédente.

4. On peut d'ailleurs remplacer la constante α par une fonction harmonique fixe V, et le segment $(0, 1)$ par une famille normale et bornée de fonctions harmoniques V. Dans ce dernier cas la démonstration doit être un peu modifiée. Il s'agit d'établir que: *les fonctions U, harmoniques dans un domaine (D) où elles ne deviennent

pas égales à toutes les fonctions harmoniques V d'une famille normale et bornée, forment une famille normale.*

Soit $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, une suite infinie de fonctions U; la fonction U_n ne devient pas égale à une fonction V_n au moins de la famille V. On a donc $U_n - V_n > 0$ dans (D) ou $U_n - V_n < 0$ dans (D). L'une de ces inégalités au moins a lieu pour une infinité de valeurs de n; supposons que ce soit la première et soient $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, les valeurs correspondantes de n. La suite V_{n_k} étant normale et bornée, choisissons une suite partielle n'_k telle que $V_{n'_k}$ converge vers une fonction limite finie V_0. La suite $U_{n'_k} - V_{n'_k}$ étant normale, puisqu'elle est formée de fonctions positives, choisissons une suite partielle n''_k telle que $U_{n''_k} - V_{n''_k}$ converge vers une fonction W_0 finie ou égale à la constante $+\infty$. Comme $V_{n''_k}$ converge vers V_0 fini, on voit que $U_{n''_k}$ converge vers $W_0 + V_0$, qui est une fonction harmonique finie, ou vers la constante $+\infty$. Ainsi, toute suite infinie U_n contient une suite partielle convergente, donc la famille U est normale.

Si on suppose que les fonctions V sont des constantes finies, on voit qu'on peut remplacer la famille des fonctions V par un ensemble de valeurs contenues dans un segment fini. En particulier, si l'on prend toutes les valeurs du segment, on retombe sur un théorème précédent.

5. Dans chacun des cas où la famille est normale, il suffit que les fonctions U soient bornées en module en un point fixe, pour que la famille soit bornée dans l'intérieur de (D).

Considérons par exemple les fonctions harmoniques dans une sphère (S) de centre O et de rayon R, et prenant au point O une valeur fixe a_0; si elles forment une famille normale, leurs modules seront bornés dans toute sphère concentrique de rayon θR $(0 \leqslant \theta < 1)$ par un nombre qui ne dépend que de a_0, de θ et du caractère de normalité de la famille. En effet, la transformation

$$u(x, y, z) = U(Rx, Ry, Rz)$$

remplace les fonctions U harmoniques dans la sphère (S) par les fonctions u harmoniques dans la sphère-unité (s) concentrique à (S); la valeur en O est la même et les familles u et U sont normales en même temps. On a donc les mêmes inégalités pour les modules de u et de U. Donc,

$$|U| < \Omega(a_0, \theta).$$

Examinons en particulier les fonctions U positives dans (s) et égales à a_0 au centre O. Les inégalités (1) nous donnent

$$a_0 \frac{1-\theta}{(1+\theta)^2} \leqslant U \leqslant a_0 \frac{1+\theta}{(1-\theta)^2}.$$

Nous obtenons ici une limite supérieure et une limite inférieure positive qui sont les limites exactes. Les valeurs limites sont en effet atteintes pour la fonction harmonique

$$U_3^* = a_0 \frac{1-\varrho^2}{r^3},$$

dans laquelle ϱ représente toujours le distance OP et r la distance PA de ce point au point A de coordonnées 1, 0, 0. Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme

$$U_3^* = a_0 \left[-\frac{1}{r} + 2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \right],$$

qui montre immédiatement que U_3^* est harmonique dans (s). Elle est évidemment positive. Pour $\varrho \leqslant \theta$, le maximum et le minimum ont lieu sur la surface $\varrho = \theta$ et correspondent au minimum $1-\theta$ et au maximum $1+\theta$ de r: on retrouve bien les limites indiquées. Cette fonction est nulle sur la surface de la sphère (s) sauf au point A où elle est infinie.

Pour une fonction harmonique de p variables, positive dans l'hypersphère de centre O et de rayon *un*, égale au centre à a_0, on obtiendrait de même les inégalités [1])

$$a_0 \frac{1-\theta}{(1+\theta)^{p-1}} \leqslant U \leqslant a_0 \frac{1+\theta}{(1-\theta)^{p-1}},$$

les limites étant atteintes pour la fonction

$$U_p^* = a_0 \frac{1-\varrho^2}{r^p} = a_0 \left[-\frac{1}{r^{p-2}} + 2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r^{p-2}}\right)}{\partial x} \right].$$

[1]) Cf. P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques...*, p. 199 (Paris, Gauthier-Villars & C[ie], 1926).

6. Lorsque $p=1$, la fonction est linéaire et les limites sont évidentes.

Lorsque $p=2$, U_2^* est la partie réelle d'une fonction homographique de la variable $z = x + iy$ que l'on peut déterminer aisément par une autre voie. Les fonctions U sont, dans ce cas, les parties réelles de fonctions $f(z)$, holomorphes dans le cercle-unité $|z| < 1$ et dont les valeurs Z sont toutes dans le demi-plan $\Re(Z) > 0$. La transformation:

$$z = \frac{\zeta - a_0}{\zeta + a_0}, \qquad \zeta = a_0 \frac{1+z}{1-z}$$

transforme le cercle $|z| < 1$ en le demi-plan $\Re(\zeta) > 0$. Le cercle $|z| \leqslant \theta$ se transforme en un cercle (γ) conjugué par rapport aux points a_0 et $-a_0$; son centre est donc sur l'axe réel et les extrémités du diamètre situé sur cet axe sont les points $a_0 \dfrac{1-\theta}{1+\theta}$ et $a_0 \dfrac{1+\theta}{1-\theta}$. Les fonctions $f(z)$ deviennent des fonctions $F(\zeta)$ holomorphes dans le demi-plan $\Re(\zeta) > 0$ et dont les valeurs Z sont dans ce demi-plan; on a d'ailleurs $F(a_0) = a_0$. On sait que les fonctions $F(\zeta)$ réduisent la distance non-euclidienne de deux points ζ, c'est-à-dire que la distance non-euclidienne des valeurs Z correspondant à ζ est inférieure en général à la distance non-euclidienne des points ζ. Il y a exception seulement lorsque $F(\zeta)$ est une fonction homographique: la distance non-euclidienne est alors conservée [1]). Or, si $|z| < \theta$, ζ est dans (γ), donc aussi Z, car la distance non-euclidienne Za_0 est inférieure à la distance ζa_0 et (γ) est le lieu des points équidistants de a_0. On a donc

$$a_0 \frac{1-\theta}{1+\theta} \leqslant \Re(Z) = U \leqslant a_0 \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Les limites sont atteintes pour $F(\zeta) = \zeta$; alors

$$f(z) = a_0 \frac{1+z}{1-z},$$

et

$$U_2^* = \Re\left(a_0 \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-\varrho^2}{r^2}.$$

[1]) Cf. P. Montel, *Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés* (Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure, s. 3, t. L, 1933, p. 193).

On retrouve bien ainsi la fonction obtenue au moyen de la formule de Poisson.

Il serait intéressant d'obtenir la valeur exacte de $\Omega(a_0, \theta)$ pour d'autres familles normales de fonctions harmoniques.

L'inégalité $|U| \leqslant \Omega(a_0, \theta)$ est comparable à celles que fournissent les théorèmes du type du théorème de M. Schottky concernant les familles normales de fonctions holomorphes dans un cercle et prenant au centre de ce cercle une valeur fixe ou de module borné.

7. Voici maintenant des propositions du type du théorème de M. Landau concernant les fonctions holomorphes autour d'un point où elles prennent une valeur fixe ainsi qu'une dérivée en ce point. Ces fonctions possèdent en outre un critère de normalité.

Considérons des fonctions harmoniques U régulières autour de l'origine O, prenant en ce point une valeur fixe a_0. Nous supposons en outre que l'une des composantes a_1 du gradient à l'origine soit fixe, en sorte que la fonction U est représentable par le développement:

$$U(x, y, z) = a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots.$$

Supposons enfin que la fonction U possède un critère de normalité ne portant que sur les valeurs prises par U: par exemple que U soit positive, ou ne prenne pas toutes les valeurs du segment $(0, 1)$ lorsque le point $P(x, y, z)$ reste intérieur à la sphère (S) de centre O et de rayon R dans laquelle U est régulière.

Les fonctions

$$u = U(Rx, Ry, Rz) = a_0 + a_1 Rx + b_1 Ry + c_1 Rz + \dots$$

sont harmoniques et régulières dans la sphère-unité (s). Elles forment une famille normale et l'on a, dans la sphère concentrique de rayon $\frac{1}{2}$,

$$|u| \leqslant \Omega\left(a_0, \frac{1}{2}\right).$$

De l'inégalité établie au paragraphe 2,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{3M}{\delta},$$

on déduit, pour la dérivée $a_1 R$ à l'origine,

$$R|a_1| \leqslant \frac{3\,\Omega\left(a_0, \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}},$$

d'où, si $a_1 \neq 0$,

$$R \leqslant \frac{6\,\Omega}{|a_1|}.$$

Par conséquent:

Si l'on fixe la valeur a_0 de la fonction harmonique U à l'origine et la valeur non nulle a_1 d'une composante de son gradient à l'origine, il existe un nombre R, ne dépendant que de a_0 et de a_1, tel que toute fonction harmonique régulière dans une sphère de rayon supérieur à R ne possède pas dans cette sphère le critère de normalité considéré.

Par exemple, s'il s'agit de fonctions harmoniques positives, les surfaces $U = 0$ coupent toute sphère de rayon supérieur à R.

Au lieu de fixer la valeur a_1, on peut adopter toute autre condition, pourvu que les constantes soient exclues de la famille considérée. On peut, par exemple, fixer la grandeur du gradient à l'origine ou une limite inférieure positive de la grandeur de ce gradient. On peut aussi fixer, ou borner inférieurement, le module d'une dérivée à l'origine d'ordre supérieur à un. On peut encore fixer la valeur b_0 de la fonction U en un point fixe O' distinct de O, pourvu que les valeurs a_0 et b_0 soient différentes, afin que la famille ne contienne pas de constante. Dans chacun de ces cas, il existe un rayon maximum R ne dépendant que de a_0 et de la seconde valeur fixée.

Faisons la démonstration, par exemple, dans le cas où l'on fixe les valeurs a_0 et b_0 $(a_0 \neq b_0)$ en O et O'. Si le nombre $R(a_0, b_0)$ n'existait pas, à chaque entier n correspondrait une fonction U_n, harmonique dans la sphère (S_n) de centre O et de rayon n et remplissant les autres conditions. De la suite U_n, qui est normale dans (S_1), on peut extraire une suite partielle convergente dans (S_1); de celle-ci, qui est normale dans (S_2), on peut extraire une suite partielle convergente dans (S_2), etc.; par le procédé diagonal, on obtient aussi une suite partielle de fonctions U_n qui, à partir d'un certain rang, convergent uniformément dans toute sphère vers une fonction limite U, harmonique dans tout l'espace. Mais chaque fonction U_n a un module borné, dans la sphère de rayon $\frac{n}{2}$, par un nombre ne dépendant que de a_0; on en déduit que U est bornée dans tout l'espace: c'est donc une constante. Mais $U(O) = a_0$, $U(O') = b_0$ et $a_0 \neq b_0$. Il y a donc contradiction, et il existe un rayon maximum $R(a_0, b_0)$.

8. Considérons en particulier les fonctions U, harmoniques et positives autour de O; on peut écrire, si la fonction est régulière dans (S), en vertu des inégalités du paragraphe **3**

$$a_0 \frac{R(R-\varrho)}{(R+\varrho)^2} \leqslant U \leqslant a_0 \frac{R(R+\varrho)}{(R-\varrho)^2},$$

d'où l'on déduit

$$-a_0 \frac{3R+\varrho}{(R+\varrho)^2} \leqslant \frac{U-a_0}{\varrho} \leqslant a_0 \frac{3R-\varrho}{(R-\varrho)^2}.$$

Si l'on fait tendre ϱ vers zéro, le point P se déplaçant sur une demi-droite fixe issue de O, on voit que

$$\left|\frac{dU}{dn}\right| \leqslant \frac{3a_0}{R}.$$

En particulier, si la direction est normale à la surface $U = a_0$, on en déduit que la grandeur l du gradient à l'origine est inférieure à $\frac{3a_0}{R}$. Donc, les dérivées partielles de U à l'origine ont des modules inférieurs à ce nombre. Soit

$$U = a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots$$

On a

$$|a_1| < \frac{3a_0}{R} \quad \text{et} \quad R \leqslant \frac{3a_0}{|a_1|}.$$

Cette limite est d'ailleurs exacte, car la fonction

$$U_3^*\left(\frac{a_1 x}{a_0}, \frac{a_1 y}{a_0}, \frac{a_1 z}{a_0}\right) = a_0 + a_1 x + \dots$$

est régulière et positive dans la sphère de rayon $\frac{3a_0}{|a_1|}$. Elle est nulle à la surface de cette sphère sauf au point $\left(\frac{3a_0}{a_1}, 0, 0\right)$, où elle devient infinie. Ainsi:

Toute fonction harmonique

$$a_0 + a_1 x + b_1 y + \dots$$

dans laquelle a_0 et $a_1 \neq 0$ sont fixes change de signe ou cesse d'être régulière dans toute sphère de rayon supérieur à $3\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$, et cette limite est exacte.

On trouverait la même limitation en fixant, au lieu de a_1, la grandeur l du gradient à l'origine; la limite supérieure du rayon serait $\frac{3a_0}{l}$ et cette limite serait atteinte pour la fonction

$$U_3^*\left(\frac{lx}{3a_0}, \frac{ly}{3a_0}, \frac{lz}{3a_0}\right) = a_0 + lx + 0y + 0z + \dots$$

Pour une fonction harmonique de p variables, le rayon de l'hypersphère maximum est égal à $\frac{pa_0}{|a_1|}$ ou $\frac{pa_0}{l}$, la limite étant atteinte par une fonction déduite de U_3^*, en multipliant chaque variable par $\frac{a_1}{pa_0}$ ou $\frac{l}{pa_0}$.

9. Considérons maintenant les fonctions U, harmoniques et positives, prenant à l'origine la valeur a_0 et, au point $O'(\alpha, 0, 0)$ la valeur différente b_0. On peut supposer $\alpha > 0$; on peut aussi supposer $b_0 > a_0$, sinon on permuterait les rôles des points O et O'. L'inégalité

$$U(O') = b_0 \leqslant a_0 \frac{R(R+\alpha)}{(R-\alpha)^2}$$

entraîne, en posant $\frac{b_0}{a_0} = \mu > 1$,

$$R \leqslant \frac{2\mu + 1 + \sqrt{8\mu+1}}{2(\mu-1)} \alpha = R_0.$$

Donc:

Toute fonction harmonique qui prend aux points O et O' les valeurs positives a_0 et b_0 $(b_0 < a_0)$ change de signe ou cesse d'être régulière dans toute sphère de centre O et de rayon supérieur à

$$R_0 = OO' \times \frac{a_0 + 2b_0 + \sqrt{(a_0 + 8b_0)a_0}}{2(b_0 - a_0)},$$

et cette limite est exacte.

Si l'on fait tendre OO' vers zéro et b_0 vers a_0, la valeur de R_0 a pour limite $\frac{3a_0}{a_1}$, en désignant par a_1 la limite de $\frac{b_0-a_0}{OO'}$. On retrouve bien ainsi la limite du paragraphe précédent.

10. Supposons que l'on fixe, avec a_0, un des autres coefficients du développement de U en série entière en x, y, z, par exemple le coefficient a_n de x^n. Il est facile de voir que, si ce nombre est différent de zéro, il existe encore une limite supérieure R_n du rayon de la sphère dans laquelle U est positive.

Considérons, en effet, une fonction $U(x, y, z)$ régulière, harmonique et positive dans la sphère-unité (s); on a, en un point P intérieur à cette sphère,

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\int\int u(M)\frac{1-\varrho^2}{r^3}\,d\sigma,$$

ϱ désignant la distance OP et r la distance PM du point P au point $M(a, b, c)$ variable à la surface de la sphère. On a d'ailleurs, si on désigne par γ l'angle $\widehat{POM}$,

$$r^2=1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{r}=P_0+P_1(\cos\gamma)\,\varrho+\ldots+P_n(\cos\gamma)\,\varrho^n+\ldots,$$

$P_n(u)$ désignant le n^e polynome de Legendre. On en déduit

$$\frac{1-\varrho^2}{r^3}=P_0+3P_1(\cos\gamma)\,\varrho+\ldots+(2n+1)P_n(\cos\gamma)\,\varrho^n+\ldots.$$

Or, si l'on remplace $\varrho\cos\gamma$ par $ax+by+cz$, l'expression $P_n(\cos\gamma)\,\varrho^n$ devient un polynome homogène de degré n en x, y, z, dont les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont des polynomes en a, b, c. En appliquant la formule de Poisson et intégrant terme à terme, on en déduit les coefficients $a_n, b_n, \ldots, l_n, \ldots$ du polynome de Laplace de degré n qui entre dans le développement de U. On a donc

$$l_n=\frac{(2n+1)}{4\pi}\int\int U(M)\,\lambda_n(a,b,c)\,d\sigma.$$

Mais λ_n est compris entre deux limites λ_n' et λ_n'' que l'on obtient pour deux fonctions particulières $U_3^*(a, b, c)$. On a donc

$$(2n+1)\,\lambda_n'\,a_0\leqslant l_n\leqslant(2n+1)\,\lambda_n''\,a_0.$$

Appliquons ces considérations pour le coefficient a_n. On sait que

$$|P_n(\cos\gamma)|\leqslant 1,\qquad P_n(1)=1,\qquad P_n(-1)=(-1)^n.$$

D'autre part, le coefficient α_n est égal à $P_n(a)$. Donc, si n est impair, on a

$$-1\leqslant\alpha_n\leqslant+1,$$

les limites étant obtenues pour les fonctions U_3^* relatives aux points $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$.

Si n est pair et si μ_n désigne le minimum négatif du polynome $P_n(u)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, on a

$$\mu_n\leqslant\alpha_n\leqslant+1,$$

les limites étant atteintes pour certaines fonctions U_3^*.

Soit alors

$$U(x, y, z)=a_0+\ldots+a_n x^n+\ldots\qquad(a_n\neq 0)$$

une fonction régulière, harmonique et positive dans une sphère (S) de rayon R; la fonction

$$U(Rx, Ry, Rz)=a_0+\ldots+a_n R^n x^n+\ldots$$

est régulière, harmonique et positive dans (s). Donc, si n est impair, on a

$$|a_n|\,R^n\leqslant(2n+1)\,a_0,$$

d'où

$$R\leqslant\sqrt[n]{\frac{(2n+1)\,a_0}{|a_n|}}=R_n.$$

Cette limite est atteinte pour la fonction

$$U_3^*\left(\frac{x}{\pm R_n},\frac{y}{\pm R_n},\frac{z}{\pm R_n}\right)=a_0+\ldots+a_n x^n+\ldots,$$

le signe placé devant R_n étant celui de a_n. Si n est pair et a_n positif, on obtient la même conclusion.

Si n est pair et a_n négatif, on a

$$a_n R^n\geqslant(2n+1)\,\mu_n\,a_0,$$

d'où

$$R^n\leqslant\frac{(2n+1)\,\mu_n\,a_0}{a_n}$$

et

$$R \leqslant \sqrt[n]{\frac{(2n+1)\,\mu_n\, a_0}{a_n}} = R_n;$$

la limite est atteinte pour une fonction U_3^* particulière dans laquelle on remplace x, y, z, par $\frac{x}{R_n}$, $\frac{y}{R_n}$, $\frac{z}{R_n}$.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

Une fonction harmonique

$$a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dans laquelle a_0 et $a_n \neq 0$ sont fixes change de signe ou cesse d'être regulière à l'intérieur de toute sphère de centre origine et de rayon supérieur à

$$\sqrt[n]{(2n+1)\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}$$

si n est impair ou, si n étant pair, a_0 et a_n sont de même signe. Lorsque n étant pair, a_0 et a_n sont de signes contraires, la limite est

$$\sqrt[n]{(2n+1)\,\mu_n\left|\frac{a_0}{a_n}\right|},$$

μ_n désignant la valeur minimum du n^e polynome de Legendre dans l'intervalle (0, 1). *Ces limites sont exactes.*

On obtiendrait des propositions du même type en fixant, au lieu de a_n, les coefficients d'autres termes du développement; par exemple, des termes en $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2, \ldots$, $x^{n-2}yz$, etc.

Les résultats sont plus simples dans le cas de deux variables; dans ce cas, les polynomes de Legendre sont remplacés par les polynomes $\cos n\,(\operatorname{arc}\cos u)$. La limite supérieure du rayon est toujours

$$R_n = \sqrt[n]{2\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}.$$

Cette limite est atteinte pour la fonction $U_2^*\left(\frac{x}{\pm R_n}, \frac{y}{\pm R_n}\right)$, relative au point $A(1,0)$, lorsque n est impair ou n pair et a_n positif. Si n est pair et a_n négatif, la fonction U_2 est relative au point $A_n\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$.

11. Il résulte des paragraphes précédents qu'une fonction U, harmonique dans tout l'espace, ne peut y posséder un critère de normalité sans être une constante. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un point où le gradient n'est par nul et on en déduirait l'existence d'un rayon maximum pour la sphère dont le centre est en ce point et dans laquelle le critère est vérifié. Ainsi, une fonction harmonique entière ne peut être bornée, ni positive, ni admettre une valeur exceptionnelle.

Pour étudier de plus près les propriétés des fonctions harmoniques entières U nous emploierons la méthode de morcellement qui nous a permis de préciser les propriétés des fonctions entières de variable complexe. Soit donc

$$u_n(x, y, z) = U(2^n x, 2^n y, 2^n z)$$

une famille de fonctions u_n, harmoniques dans la sphère (s) de rayon *un* et prenant dans leur ensemble, dans cette sphère, les valeurs que prend U dans l'espace.

Cette famille ne peut être normale. En effet, s'il en était ainsi, comme

$$u_n(O) = U(O) = a_0,$$

les fonctions seraient bornées dans toute sphère intérieure à (s), par exemple dans la sphère concentrique de rayon $\frac{1}{2}$. Mais les valeurs que prend u_n dans cette dernière sphère sont les mêmes que les valeurs de U dans la sphère de rayon 2^{n-1}. Il en résulterait que $|U|$ est bornée dans tout l'espace, ce qui est impossible si U n'est pas une constante.

La famille u_n n'étant pas normale, il y a dans (s) des points irréguliers en lesquels elle n'est pas normale[1]). Le point O ne peut-être le seul point irrégulier, car toute suite partielle convergeant uniformément vers une fonction finie ou vers l'infini sur une sphère de centre O, convergerait uniformément à l'intérieur, donc au point O. Soit donc I un point irrégulier distinct de O. Dans toute sphère (σ) de centre I, si petite soit-elle, la famille u_n n'est par normale; par conséquent les fonctions u_n prennent toutes, à partir d'un certain rang, une valeur arbitraire α. Traçons les sphères (σ_n) homothétiques de (σ), dans le rapport 2^n, par rapport au centre d'homothétie O:

[1]) P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (Annales Sc. de l'École Normale Sup., S. 3, t. XXXIII, 1916) p. 227.

la fonction U prend la valeur α dans les sphères (σ_n) à partir d'un certain rang. Toutes les sphères (σ_n) sont intérieures au cône de révolution de sommet O, d'axe OI ou (Δ) et circonscrit à (σ). L'angle au sommet de ce cône est aussi petit que l'on veut. Donc:

Pour toute fonction harmonique entière, il existe au moins une demi-droite (Δ) issue de chaque point O de l'espace, telle que, dans tout cône de révolution de sommet O, d'axe (Δ) et d'angle aussi petit que l'on veut, la fonction prenne une infinité de fois toute valeur finie.

On peut remarquer que, dans chaque sphère (σ_n), la fonction U prend, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs du segment $(0, 1)$ par exemple, ce qui ne résulte pas du théorème précédent. On peut donc, dans l'énoncé, remplacer les mots „toute valeur finie" par „toute valeur de tout segment fini".

Dans le cas des fonctions de deux variables, toute droite (J) de la fonction entière de la variable complexe $\zeta = x + iy$ dont U est la partie réelle est une droite (Δ), mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour

$$e^{\zeta} = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

il y a deux demi-droites (J) portées par l'axe imaginaire. Pour la fonction $U = e^x \cos y$, toutes les demi-droites issues de O dans le demi-plan $\Re(\zeta) \geqslant 0$ sont des droites (Δ).

12. Considérons maintenant une fonction harmonique U, régulière en tout point de l'espace distinct de O et nulle à l'infini. Supposons que U soit bornée autour de O, donc dans tout l'espace, ou que U soit positive autour de O.

La fonction

$$V(x', y', z') = \frac{1}{r'} U\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right),$$

avec $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, est harmonique entière. Si U est bornée, V est bornée et nulle à l'infini; donc V est la constante zéro et U est identiquement nulle.

Si U est positive autour de O, V est positive pour $r' > R'$; soit $-M$ un nombre négatif inférieur au minimum de V dans la sphère $r' \leqslant R'$. La fonction entière V est toujours supérieure à $-M$, donc elle est une constante C. Alors

$$U = Cr' = \frac{C}{r}.$$

On aurait le même résultat, si $U > -\mu$ autour de O.

Soit maintenant U une fonction harmonique et régulière autour d'un point O, bornée ou positive autour de ce point. Traçons deux sphères (S_1) et (S_2) de centre O, de manière que U soit régulière entre (S_1) et (S_2); (S_1) désigne la plus petite sphère. En un point P compris entre les deux sphères, on a

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S_1)}\left(U\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right)d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S_2)}\left(U\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right)d\sigma,$$

les dérivées normales étant prises vers l'intérieur de la région considérée. La seconde intégrale représente une fonction U_2 harmonique et régulière dans (S_2). La première représente une fonction U_1, harmonique et régulière à l'extérieur de (S_1) et nulle à l'infini. Comme le rayon de (S_1) est arbitrairement petit, U_1 est régulière dans tout l'espace sauf peut-être en O.

Si U est bornée dans (S_2), comme U_2 l'est aussi, U_1 est bornée autour de O, donc identiquement nulle: U est régulière en O.

Si U est positive autour de O, soit μ un nombre non inférieur au maximum de U_2 dans (S_2); la fonction U_1 vérifie

$$U_1 + \mu \geqslant U_1 + U_2 > 0;$$

donc, $U_1 > -\mu$ autour de O et cette fonction est de la forme $\frac{C}{r}$. U admet en O un pôle simple.

13. Si O est un point singulier isolé de U sans être un pôle simple, la fonction U ne peut être positive autour de ce point, ni admettre aucune valeur exceptionnelle. Considérons la suite des fonctions

$$u_n(x, y, z) = U\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}\right)$$

définies, au moins pour n assez grand, dans la région comprise entre les sphères (S_1) de rayon $\frac{1}{2}$ et (S_2) de rayon 2. Cette famille ne peut être normale. Soit, en effet, a_n la valeur de u_n en un point fixe, (1, 0, 0) par exemple. Si l'une des valeurs limites de a_n est finie, et si la famille était normale, on pourrait extraire de la suite u_n une suite bornée dans la région $\frac{1}{2} < r < 2$, donc sur la sphère-unité. On en déduirait que U est bornée autour de O, donc régulière en O.

Si maintenant la suite a_n augmente indéfiniment, on pourrait extraire de la suite u_n, une suite partielle convergeant uniformément vers $+\infty$, par exemple; on en déduirait que U est positive autour de O et que, par conséquent ce point serait un pôle simple.

Ainsi, la suite u_n n'est pas normale dans la région $\frac{1}{2} < r < 2$. Soit I un point irrégulier; la demi-droite (Δ) qui porte le segment OI est l'axe d'un cône de révolution dont l'angle est arbitrairement petit et tel que, à l'intérieur de ce cône et de toute sphère de centre O, si petite soit-elle, la fonction U prenne toute valeur finie.

La raisonnement qui précède montre qu'il est impossible de trouver autour d'un point singulier une suite infinie de domaines $r'_n < r < r_n$ semblables entre eux et tels que, dans chacun d'eux, U possède un critère de normalité donné.

Considérons, par exemple, les points de la région $0 < r \leqslant R$ en lesquels U est positive et portons notre attention sur les valeurs de r correspondantes. Il peut arriver que ces valeurs remplissent des segments $(r, r+\Delta r)$. On démontre aisément la proposition suivante:

Il ne peut exister une suite infinie de segments dont la largeur relative $\Delta r_n / r_n$ reste supérieure à un nombre positif et tels que la fonction soit positive lorsque $r_n < r < r_n + \Delta r_n$.

14. Examinons maintenant les propriétés des points réguliers et irréguliers des familles de fonctions harmoniques dans un domaine (D).

Soit A un point régulier; considérons une suite convergeant uniformément autour de A. On peut démontrer pour cette suite un théorème tout à fait semblable au théorème bien connu relatif aux suites de fonctions de variables complexes:

Si une suite de fonctions harmoniques

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

converge uniformément autour d'un point A vers une fonction limite non constante qui prend au point A la valeur α dans toute sphère de centre A, les fonctions U_n prennent toutes la valeur α à partir d'un certain rang.

On peut toujours supposer que $\alpha = 0$. Traçons une sphère (S) de centre A; si les fonctions U_n ne s'annulent pas toutes dans (S) pour n assez grand, il y a une infinité de fonctions U_n qui gardent dans (S) un signe constant; par exemple, il y a une infinité de fonctions U_n qui sont positives dans (S). Dans la sphère (S') concentrique à (S) et de rayon moitié de celui de (S), on aurait l'inégalité

$$U_n(P) \leqslant 6\, U_n(A)$$

du paragraphe **3**. En donnant à l'indice n les valeurs correspondant aux fonctions positives dans (S), on en déduirait que $U_n(P)$ convergerait uniformément vers zéro autour de A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, pour n assez grand, toutes les fonctions U_n s'annulent dans (S).

15. Soit I un point irrégulier pour la famille des fonctions U; autour de ce point, les fonctions U prennent toutes les valeurs finies et deviennent égales à toute fonction harmonique régulière en I.

L'ensemble E des points irréguliers est parfait, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine (D).

Cet ensemble est évidemment fermé. Il ne contient pas de point isolé: on le voit en répétant le raisonnement employé au paragraphe **11**. L'ensemble E est donc parfait.

Si cet ensemble n'était pas continu ou était séparé de la frontière de (D), on pourrait enfermer une partie e de l'ensemble E dans une surface Σ dont tous les points seraient réguliers. Toute suite infinie de fonctions U donnerait naissance à une suite partielle convergeant uniformément sur Σ vers une fonction finie ou une constante infinie, $+\infty$ par exemple. Dans le premier cas, la suite U_n convergerait uniformément à l'intérieur de Σ; dans le second cas, comme chaque fonction U_n a son minimum sur Σ, la suite U_n convergerait aussi vers $+\infty$ à l'intérieur de Σ. Donc la surface Σ ne pourrait contenir à son intérieur les points du sous-ensemble e de E.

16. Considérons en particulier une suite

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots,$$

simplement convergente à l'intérieur de (D). Les points irréguliers de cette suite coïncident avec les points de convergence non uniforme. Je dis que, dans ce cas:

L'ensemble E est non dense.

On sait, en effet, que tout domaine (d) intérieur à (D) contient un domaine (d') dans lequel les fonctions $|U_n|$ sont bornées [1]): dans ce domaine (d'), la suite ne peut converger sans converger uniformément. On peut même admettre que certaines valeurs limites de la suite soient infinies, pourvu que la valeur infinie ait toujours le même signe, positif par exemple. Dans ce cas, on montre de la même manière l'existence d'un domaine (d') dans lequel les fonctions U_n sont bornées inférieurement, et la conclusion est la même.

Pour les suites convergentes de fonctions holomorphes l'étude de l'ensemble E et des caractères de la fonction limite a été entreprise. M. M. Lavrentieff a fait une étude semblable dans le cas des fonctions harmoniques [2]).

17. Une suite de fonctions appartenant à une famille normale ne peut converger sans converger uniformément [3]).

Appliquons ce résultat aux séries de fonctions harmoniques positives. En chaque point, la suite U_n des sommes des n premiers termes a une limite finie ou infinie. Comme les fonctions positives U_n forment une famille normale, on voit que la série converge uniformément vers une fonction harmonique ou vers l'infini.

Si en un point la limite est finie, le second cas est exclu: c'est le théorème de Harnack.

18. Supposons qu'une suite infinie U_n de fonctions harmoniques appartenant à une famille normale dans un domaine (D) converge en une infinité de points P_n ayant un point d'accumulation O intérieur à (D). Peut-on en conclure que la suite converge uniformément dans l'intérieur de (D), comme dans le cas des fonctions holomorphes d'une variable complexe?

L'exemple de la suite

$$u_{2n} = x^3 - 3xy^2 + \frac{1}{2n}, \qquad u_{2n+1} = xyz + \frac{1}{2n+1},$$

[1]) P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Paris, Gauthier-Villars 1910), p. 109.

[2]) Cf. M. Lavrentieff, *Sur un problème de M. P. Montel* (Comptes-Rendus des S. de l'Acad. de Sc. de Paris, t. 184, 1927), p. 1634. — F. Hartogs und A. Rosenthal, *Über Folgen analytischer Funktionen* (Math. Annalen, Bd. 100, 1918), p. 212—263.

[3]) P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, etc. (Paris, Gauthier-Villars & C^ie^, 1927), p. 176.

qui converge en tous les points du plan $x = 0$ et du paraboloïde

$$x^2 = y(3y + z)$$

montre qu'il n'en est rien et que ce cas est à rapprocher de celui des fonctions de plusieurs variables complexes [1]).

Pour certaines suites de points P_n, la conclusion est cependant exacte. Par exemple, dans le cas des fonctions harmoniques de deux variables, on peut prendre des suites P_n telles que les droites OP_n aient une infinité de positions limites distinctes [2]) ou telles que deux de ces droites limites fassent un angle non commensurable avec l'angle droit; pour des fonctions de trois variables, il suffira de considérer des suites P_n telles que l'ensemble des droites limites des sécantes OP_n remplissent une infinité de plans distincts, etc.

Comme dans le cas des fonctions de plusieurs variables complexes, le problème revient au suivant: déterminer les caractères d'une suite dénombrable de points P_n ayant l'unique point d'accumulation O de façon que toute fonction harmonique et régulière en O, et nulle aux points P_n, soit identiquement nulle.

[1]) P. Montel (loc. cit., p. 406), p. 245.

[2]) Ibid., p. 246.