other hand, since $xy_0 f(y_0) = 0$, we see that every element xy_0 is contained in the element $f'(y_0)y_0 \equiv y_0' y_0 = 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ and hence that the class of all elements xy_0 has cardinal number less than $\aleph_B$. This is the contradiction sought.

An interesting application of this theorem obtains as follows:

If, in particular, we take $\aleph_{B'} = \aleph_\eta$, $\aleph_B = \aleph_{\eta+1}$, $\aleph_A = 2^{\aleph_\eta}$ then we have $\aleph_{B'} < \aleph_A$, therefore $\aleph_B \leqq \aleph_A$, and so we obtain a case in which the $(A, \mathfrak{a})$ representation problem has a solution if and only if $\aleph_B = \aleph_A$, that is

$$\aleph_{\eta+1} = 2^{\aleph_\eta}$$

(The generalized continuum hypothesis). It is, of course, necessary to show how to form a Boolean ring A which fulfills the auxiliary conditions set forth in the second statement of the theorem.

Let e be a set of cardinal nunber $\aleph_A = 2^{\aleph_\eta}$. We define $\mathfrak{a}$ as in the statement of the theorem: it is the set of all subsets of e of cardinal number less than $\aleph_B = \aleph_{\eta+1}$ that is, less than or equal to $\aleph_{B'} = \aleph_\eta$. Therefore $\mathfrak{a}$ has the cardinal number $\aleph_A^{\aleph_\eta} = 2^{(\aleph_\eta^2)} = 2^{\aleph_\eta} = \aleph_A$.

As $\aleph_\eta$ is infinite, $\aleph_A^2 = 2^{2\aleph_\eta} = 2^{\aleph_\eta} = \aleph_A$, so there exists a one-to-one mapping of all ordered pairs (α, β), α, β elements in e, on all elements γ of e:

$$(\alpha, \beta) \rightleftarrows \gamma = \varphi(\alpha, \beta).$$

Define now x_α as the set of all $\varphi(\alpha, \beta)$, β in e, and $\mathfrak{X}$ as the set of all x_α, α in e; and similarly y_β as the set of all $\varphi(\alpha, \beta)$, α in e, and $\mathfrak{Y}$ as the set of all y_β, β in e. It is evident that the classes $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ have the properties (1)—(5) of the theorem, and that both have cardinal number $\aleph_A$.

We can now take A as the smallest Boolean ring containing e and the elements of $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ and $\mathfrak{a}$, this ring being obtained by forming all polynomials in terms of the indicated elements. Obviously the cardinal number of A is not less than $\aleph_A$ and not more than $\aleph_0(1+\aleph_A+\aleph_A^2+\ldots) = \aleph_0(1+\aleph_A+\aleph_A+\ldots) = \aleph_A$; so it is equal to $\aleph_A$.

Further interesting examples are the following. Let e be the plane, $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ two distinct pencils of parallel lines. If A is the class of all Borel sets, $\mathfrak{a}$ the class of all finite sets, we have $\aleph_A = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_B = \aleph_0$. The $(A, \mathfrak{a})$ representation problem has no solution. If A is again the class of all Borel sets, $\mathfrak{a}$ the class of all countable sets, we have $\aleph_A = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_B = \aleph_1$, $\aleph_{B'} = \aleph_0$. The $(A, \mathfrak{a})$ representation problem has a solution if and only if $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, (the continuum hypothesis).

Généralisations du théorème des probabilités totales.

Par

Maurice Fréchet (Paris).

I. La formule de M. Charles Jordan.

Considérons des événements fortuits $H_1, \ldots, H_n$ de probabilités respectives $p_1, \ldots, p_n$ et soit P la probabilité pour que l'un au moins des événements H_j se réalise.

D'après le théorème des probabilités totales, on a

$$P = p_1 + \ldots + p_n$$

quand les événements H_j sont *incompatibles.*

Poincaré a donné à la page 60 de son traité de „*Calcul des Probabilités*" une formule permettant de calculer P *dans le cas général*, quand, *en outre des* p_j, on connait les probabilités $p_{ik}, \ldots, p_{ik\ldots l}, \ldots$ où, en général, $p_{ik\ldots l}$ est la probabilité du concours de $H_i, H_k, \ldots, H_l$, à savoir

$$P = \sum_i p_i - \sum_{ij} p_{ij} + \sum_{ijk} p_{ijk} - \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}. \tag{1}$$

M. Charles Jordan a établi, entre autres, dans un récent mémoire [1]), une formule généralisant la formule (1) de Poincaré. Nous voulons montrer que la formule de M. Jordan, démontrée par lui directement, peut aussi être considérée comme une conséquence immédiate de la même formule (1) de Poincaré.

[1]) *Le théorème de probabilité de Poincaré généralisé au cas de plusieurs variables dépendantes*, Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, t. VII, 1934. Nous visons ici la formule (11), page 108 de cet article.

A cet effet considérons maintenant des événements *incompatibles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et appliquons la formule de **Poincaré** en appelant H_j l'événement consistant en ce qu'au cours d'un nombre fixe r d'épreuves indépendantes l'événement A_j ne s'est jamais présenté. Si la probabilité ω_j de A_j est constante, on aura

$$p_i = (1-\omega_i)^r, \ldots, p_{ijk} = (1-\omega_i-\omega_j-\omega_k)^r, \ldots$$

En posant $P = 1-\omega$, la formule de **Poincaré** devient:

$$\omega = 1 - \sum_i (1-\omega_i)^r + \sum_{ij} (1-\omega_i-\omega_j)^r - \tag{2}$$

$$-\sum_{ijk} (1-\omega_i-\omega_j-\omega_k)^r + \ldots + (-1)^n (1-\omega_1-\ldots\omega_r)^n.$$

C'est la formule (II) du mémoire de M. **Charles Jordan** donnant en fonction des probabilités ω_j des événements incompatibles A_j, la probabilité ω pour que chacun des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se produise au moins une fois au cours de r épreuves indépendantes.

II. Les inégalités les plus précises limitant P.

Revenons maintenant à la formule (1) de **Poincaré**. Elle fournit la valeur de P connaissant les $p_i, p_{ij}, \ldots, p_{12\ldots n}$. Si les événements H_i étaient incompatibles, elle se réduirait à $P = \sum\limits_i p_i$ et permettrait, par suite, de calculer P connaissant seulement les p_i. Dans le cas général, la seule connaissance des p_i ne suffit plus à déterminer P; mais permet-elle cependant d'affirmer quelque chose sur la valeur de P?

On a évidemment

$$p_1 \leqslant P, \quad p_2 \leqslant 1, \quad \ldots, \quad p_n \leqslant 1,$$

d'où, en ajoutant

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - (n-1) \leqslant P.$$

D'autre part, P est égal à la somme des probabilités $p_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des événements incompatibles H_1, H_2 sans H_1, H_3 sans H_1 ni $H_2, \ldots,$ H_n seul. Or on a évidemment

$$\theta_2 \leqslant p_2, \quad \ldots, \quad \theta_n \leqslant p_n.$$

D'où en portant dans $P = p_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$,

$$P \leqslant p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Ainsi, P est limité par les deux inégalités

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - (n-1) \leqslant P \leqslant p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \tag{3}$$

Mais on peut renforcer cette double inégalité [1]) en observant que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - (n-1) \leqslant p_i \leqslant P \leqslant 1.$$

On a donc

$$\omega(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant P \leqslant \Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n) \tag{4}$$

en appelant $\omega(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ le plus grand des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ le plus petit des nombres 1 et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Non seulement ce système d'inégalités peut rendre des services quand, ayant besoin d'estimer P, on ne connait que les p_i, mais encore *il est impossible d'obtenir mieux dans ces conditions*. En d'autres termes, si $f(p_1, \ldots, p_n)$ et $F(p_1, \ldots, p_n)$ sont deux fonctions de $p_1, \ldots, p_n$, connues d'avance, indépendamment de la connaissance particulière des événements $H_1, \ldots, H_n$ et telles que l'on ait

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant P \leqslant F(p_1, \ldots, p_n)$$

alors, pour tout système d'événements fortuits $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a nécessairement

$$f(p_1, \ldots, p_n) \leqslant \omega(p_1, \ldots, p_n) \leqslant \Pi(p_1, \ldots, p_n) \leqslant F(p_1, \ldots, p_n). \tag{5}$$

En effet, prenons pour $p_1, \ldots, p_n$ des nombres arbitrairement choisis de 0 à 1. On pourra toujours définir un événement fortuit G de probabilité $p' = \omega(p_1, \ldots, p_n)$, puis des événements fortuits H_j $(j \neq k)$ de probabilités respectives p_j, mais n'ayant lieu que si G a lieu, de sorte que $P \leqslant p'$. Pour ces événements

$$f(p_1, \ldots, p_n) \leqslant P = p' = \omega(p_1, \ldots, p_n)$$

et la première des inégalités (5) est établie.

[1]) La suite du présent article a déjà été exposée oralement parmi les sujets traités dans un cours public fait par l'auteur à l'Institut Henri Poincaré pendant l'hiver 1930.

Pour établir la seconde, nous distinguerons deux cas:

Si $p_1+p_2+\ldots+p_n\leqslant 1$, on peut facilement définir des événements fortuits incompatibles de probabilités respectives $p_1,\ldots p_n$. Pour ces événements, on aura

$$\Pi(p_1,\ldots p_n)=p_1+\ldots+p_n=P\leqslant F(p_1,\ldots p_n).$$

Si $p_1+\ldots+p_n>1$, il existe un entier $k<n$, tel que

$$p_1+\ldots+p_k\leqslant 1<p_1+\ldots+p_{k+1}.$$

On pourra définir des événements fortuits incompatibles $H_1,\ldots,H_k$ de probabilités respectives $p_1,\ldots,p_k$, un événement H_k' incompatible avec les précédents et de probabilité $1-(p_1+\ldots+p_k)<p_{k+1}$. On désignera par H_{k+1} l'événement consistant en: H_k' ou H_k'', H_k'' étant un événement quelconque choisi de façon à ce qu'il soit incompatible avec H_k' et de probabilité $p_1+p_2+\ldots+p_{k+1}-1$. Ces deux conditions sont compatibles puisque

$$\text{Prob. } H_k'+\text{Prob. } H_k''=[1-(p_1+\ldots+p_k)]+[p_1+\ldots+p_{k+1}-1]=$$
$$=p_{k+1}\leqslant 1.$$

Appelons enfin $H_{k+2},\ldots,H_n$ des événements fortuits quelconques de probabilités $p_{k+2},\ldots,p_n$. Alors la probabilité P sera égale à 1 et on aura encore

$$1=\Pi(p_1,\ldots,p_n)=P\leqslant F(p_1,\ldots,p_n).$$

Ainsi les inégalités (5) sont bien établies dans tous les cas.

On peut obtenir des résultats analogues pour la probabilité $p_{12\ldots n}$ du concours de $H_1,\ldots,H_n$. Il suffit pour cela de partir des inégalités qu'on vient d'établir:

$$\text{(6)}\qquad \begin{gathered}\text{Pr. } H_i\leqslant \text{Pr. }\{H_1 \text{ ou } H_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } H_n\}\leqslant\\ \leqslant \text{Pr. } H_1+\text{Pr. } H_2+\ldots+\text{Pr. } H_n\\ (i=1,2,\ldots,n),\end{gathered}$$

et d'y remplacer les événements H_i par leurs événements contraires. On obtient:

$$1-p_i\leqslant 1-p_{12\ldots n}\leqslant n-(p_1+\ldots+p_n)$$

ou

$$\text{(7)}\qquad p_1+p_2+\ldots+p_n-(n-1)\leqslant p_{12\ldots n}\leqslant p_i\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

En partant de (4), on serait arrivé au système plus précis

$$\text{(8)}\qquad \theta(p_1,\ldots,p_n)\leqslant p_{12\ldots n}\leqslant \Theta(p_1,\ldots,p_n)$$

où $\theta(p_1,\ldots,p_n)$ est le plus grand des deux nombres $p_1+\ldots+p_n-(n-1)$ et zéro et où $\Theta(p_1,\ldots,p_n)$ est le plus petit des nombres $p_1,\ldots,p_n$. La démonstration concernant (4) montre que le système d'inégalités (8) est le plus précis qu'on puisse donner pour estimer $p_{12\ldots n}$ connaissant seulement $p_1,\ldots,p_n$, au moyen de bornes, fonctions de $p_1,\ldots,p_n$, indépendantes des événements $H_1,\ldots,H_n$.

Nous avons utilisé fréquemment les inégalités (4) et (8) dans un mémoire [1]) traitant les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires.

On sait que si $q_1,q_2,\ldots$, sont des nombres compris entre 0 et 1, on a

$$1-q_1-q_2-\ldots-q_n\leqslant(1-q_1)\ldots(1-q_n).$$

On a donc

$$p_1+\ldots+p_n-(n-1)\leqslant p_1\ldots p_n\leqslant p_i\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Les deux nombres $p_{12\ldots n}$ et $p_1\,p_2\ldots p_n$ sont donc tous deux toujours compris entre $\theta(p_1,\ldots,p_n)$ et $\Theta(p_1,\ldots,p_n)$.

Quand les événements $H_1,\ldots,H_n$ sont indépendants, on sait que $p_{12\ldots n}=p_1\,p_2\ldots p_n$.

Observons que la première inégalité (7) peut s'écrire

$$\text{(9)}\qquad p_{12\ldots n}\geqslant 1-q_1-q_2-\ldots-q_n,$$

si l'on pose: $q_1=1-p_1,\quad q_2=1-p_2,\quad \ldots,\quad q_n=1-p_n$.

C'est l'inégalité due à Boole, qu'on peut aussi écrire

$$\text{Pr. }\{H_1 \text{ et } H_2 \text{ et } \ldots \text{ et } H_n\}\geqslant 1-\text{Pr. } C(H_1)-\ldots-\text{Pr. } C(H_n),$$

en désignant par $C(H_i)$ l'événement contraire à H_i.

Cette inégalité donne des indications souvent utiles en Statistique [2]).

III. Extension au cas d'un nombre infini d'événements.

L'extension du théorème des probabilités totales au cas d'un nombre infini d'événements ne doit pas être considéré comme allant de soi [3]).

[1]) *Sur la convergence en probabilité*, Metron, vol. VIII, 1930, p. 1—50.

[2]) Voir, par exemple, à la page 52 du „*Calcul des Probabilités à la portée de tous*" par Fréchet et Halbwachs, Dunod, 1924, Paris.

[3]) Voir par exemple à ce sujet, les notes de M. de Finetti dans les Rend. Ist. Lombardo de 1928, 1929, 1930. Une position différente a été prise par nous dans deux notes de 1930 publiées dans les mêmes Rend.

Nous n'entrerons toutefois pas ici dans la discussion de la légitimité de cette extension.

Nous nous contenterons de signaler *qu'il n'est pas possible* d'effectuer cette extension à la famille de *tous* les événements fortuits, mais seulement — par analogie avec la famille des ensembles mesurables — à une famille d'événements dits „probabilisables".

A partir de maintenant, nous allons supposer que la probabilité est définie ainsi qu'il suit (définition axiomatique) ou, mieux, qu'elle est définie de façon à vérifier les conditions suivantes:

On associe à la catégorie C d'épreuves envisagées une certaine famille F d'événements fortuits dits „probabilisables" sur C.

I. Cette famille devra comprendre les contraires respectifs des événements qui la constituent. En outre, si des événements fortuits $E_1, E_2, \dots$ formant une suite finie ou infinie, mais dénombrable, appartiennent à la famille F, celle-ci devra contenir aussi l'événement consistant dans la réalisation de l'un au moins des événements $E_1, E_2, \dots$ (Il résulte de ces deux conditions que F comprend la certitude et l'impossibilité).

II. A chaque événement E de F, un nombre $p(E) \geqslant 0$, appelé probabilité de E sur C, est attaché de sorte que, avec les notations du par. I précédent, l'on ait, si $E_1, E_2, \dots$ sont incompatibles:

$$\begin{aligned}(10)\qquad & p(E_1) + p(E_1) + \dots + p_n(E) + \dots = \\ & = p(E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } E_n \text{ ou } \dots)\end{aligned}$$

et que la probabilité de la certitude soit égale à l'unité.

On déduit de I et II les conséquences suivantes. D'abord, en ce qui concerne la famille F, si l'on considère une suite finie ou infinie, mais dénombrable d'événements $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ de F, l'événement K contraire au concours H de $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ consiste dans la réalisation du contraire de H_1 ou du contraire de H_2 ou ... ou du contraire de $H_n \dots$ Par suite K et alors aussi H appartiennent à F.

Alors le concours H_1'' de H_1 et du contraire de H_2, c'est-à-dire l'événement consistant en ce que H_1 ait lieu sans qu'ait lieu H_2, appartiendra aussi à F. Plus généralement, appartiendra aussi à F l'événement H_1' consistant en ce que parmi $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ seul H_1 ait lieu, puisqu'il consiste dans la réalisation du concours de H_1 et des contraires respectifs de H_2, de $H_3, \dots$, de $H_n, \dots$ Il en sera de même de l'événement consistant en ce que parmi les

événements $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ un seul d'entre eux ait lieu, car c'est l'événement (H_1' ou H_2' ou H_3' ou ... ou $H_n' \dots$).

Passons aux relations entre les probabilités de ces divers événements.

Nous venons de voir que si des événements fortuits $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ en suite finie ou infinie, mais dénombrable, appartiennent à F, il en est de même du concours de ces événements.

Supposons d'abord ces événements deux à deux indépendants. Alors, avec les notations précédentes, K est aussi l'événement: K_1 ou K_2' ou ... ou K_n' ou ... (en désignant par K_n le contraire de H_n et par K_n' le concours des événements indépendants $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, K_n$). Si donc p est la probabilité de H, on a:

$$\begin{aligned}1 - p = \mathrm{Pr.}\, K_1 + \mathrm{Pr.}\, K_2' + \dots + \mathrm{Pr.}\, K_n' + \dots = \\ = \lim_{n \to \infty} [(1 - p_1) + p_1(1 - p_2) + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1}(1 - p_n)].\end{aligned}$$

D'où

$$(11)\qquad p = \lim_{n \to \infty} p_1 p_2 \dots p_n.$$

Ainsi, *lorsque des événements fortuits* $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ appartenant à F *sont indépendants*, non seulement *le produit* des *probabilités d'un nombre fini d'entre eux* $H_1, \dots, H_n$ est égal à la probabilité du concours de ceux-ci, mais encore, lorsque n croît indéfiniment, *ce produit converge vers une limite qui est égale à la probabilité du concours* de cette infinité d'événements.

Considérons maintenant le cas où $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ ne sont pas supposés indépendants. Alors on ramène au cas précédent en observant que la probabilité de K_n' est égale à $p_1 p_2', \dots, p_{n-1}'(1 - p_n')$, en désignant en général par p_n' la probabilité de H_n dans la catégorie C_n' constituée par celles des épreuves de C où ont lieu $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$.

On aura alors, par le même raisonnement que plus haut:

$$(12)\qquad p = \lim_{n \to \infty} p_1 p_2' \dots p_n'.$$

Dans les deux cas, on aura donc

$$(13)\qquad \mathrm{Pr.}\,\{H_1 \text{ et } H_2 \text{ et ... et } H_n \text{ et ...}\} = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Pr.}\,\{H_1 \text{ et } H_2 \text{ et ... et } H_n\}.$$

Passons maintenant à l'extension des inégalités telles que (4) et (7).

Considérons des événements $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ en nombre infini compatibles ou non, dépendants ou non.

Remarquons que les deux événements:

$$H_1 \text{ ou } H_2 \text{ ou} \dots \text{ ou } H_n$$

et

$$H_1 \text{ ou } \{C(H_1) \text{ et } H_2\} \text{ ou } \{C(H_1) \text{ et } C(H_2) \text{ ou } H_3\} \text{ ou} \dots$$
$$\dots \text{ ou } \{C(H_1) \text{ et } C(H_2) \text{ et} \dots \text{ et } C(H_{n-1}) \text{ et } H_n\} \text{ ou} \dots$$

sont identiques. Comme le second est défini à partir d'événements incompatibles, la probabilité P du premier est la somme de la série des probabilités de ces événements incompatibles. Or la somme des n premiers n'est autre que la probabilité de l'événement H_1 ou H_2 ou ... ou H_n. On a donc dans tous les cas où H_1, $H_2, \dots$ appartiennent à la famille F:

$$\text{(14)} \quad \text{Pr.}\{H_1 \text{ ou } H_2 \dots \text{ ou } H_n \text{ ou} \dots\} = \lim_{n\to\infty} \text{Pr.}\{H_1 \text{ ou } H_2 \dots \text{ ou } H_n\}$$

On déduit alors immédiatement de (6) son extension à une suite infinie d'événements:

$$\text{(15)} \quad \text{Pr. } H_i \leqslant \text{Pr.}\{H_1 \text{ ou } H_2 \dots \text{ ou } H_n \text{ ou} \dots\} \leqslant$$
$$\leqslant \text{Pr. } H_1 + \text{Pr. } H_2 + \dots + \text{Pr. } H_n + \dots$$

pour $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ou plus précisément

$$\text{(16)} \quad \omega(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant P \leqslant \pi(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$$

où $\omega(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ est la borne supérieure de l'ensemble des p_i, et où $\pi(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ est le plus petit des deux nombres dont le premier est 1 et dont l'autre est la somme finie ou infinie de la série à termes non négatifs

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$$

On obtiendra de même l'extension de (7) au moyen du passage à limite (11). On aura *la formule de Boole généralisée:*

$$\text{(17)} \quad 1 - \{\text{Pr. } C(H_1) + \dots + \text{Pr. } C(H_n) + \dots\} \leqslant$$
$$\leqslant \text{Pr.}\{H_1 \text{ et } \dots \text{ et } H_n \text{ et } \dots\} \leqslant \text{Pr. } H_i$$

$(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ ou plus précisément

$$\theta(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant p \leqslant \Theta(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots),$$

en appelant $\theta(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ le plus grand des deux nombres 0 et $1 - (q_1 + q_2 + \dots)$ et en désignant par $\Theta(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

Observons que *les systèmes d'inégalités* (16) *et* (17) *ne peuvent être précisés* quand on y prend pour p_1, $p_2, \dots$ des probabilités arbitraires. Autrement dit, si l'on considère deux fonctions $f(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ et $F(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ — les mêmes, quels que soient les événements $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ de probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — telles que

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant P \leqslant F(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots),$$

on aura nécessairement

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant \omega(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant \Pi(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \leqslant$$
$$\leqslant F(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots).$$

La démonstration que nous avons donnée de ce fait pour un nombre fini d'événements s'applique littéralement au cas d'un nombre infini.

Résumé.

Soit P la probabilité pour que l'un au moins des événements $H_1, H_2, H_3, \dots$ se réalise. On connait des inégalités limitant la valeur de P quand sont seules données les probabilités p_i des H_i. L'auteur détermine *les plus précises* de ces inégalités.

Poincaré avait donné une formule déterminant exactement F connaissant en outre des p_i les probabilités telles que $p_{ik\dots l}$, probabilité du concours de $H_i, H_k, \dots, H_l$. M. Charles Jordan a démontré directement une formule généralisant la formule de Poincaré. L'auteur montre que la formule de M. Jordan est en même temps une conséquence de la même formule de Poincaré.