transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble $E_{0,n}$. La fonction $\theta_n^{-1}(p)$ (inverse de la fonction $\theta_n(p)$) est ainsi définie dans l'ensemble $E_{0,n}$ et transforme $E_{0,n}$ en E.

Définissons maintenant la fonction $\varphi(p)$ dans l'ensemble

$$E_0 = E_{0,1} + E_{0,2} + E_{0,3} + \cdots,$$

en posant

(2) $$\varphi(p) = f_n\, \theta_n^{-1}(p) \quad \text{pour} \quad p \in E_{0,n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement (d'après $\theta_n(E) = E_{0,n}$)

$$\varphi\, \theta_n(p) = f_n(p) \quad \text{pour} \quad p \in E,$$

ce qui donne, d'après (1):

$$f_n(p) = \varphi^2 \psi^n \varphi \psi(p) \quad \text{pour} \quad p \in E, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et le théorème de M. Sierpiński est démontré.

Sur les ensembles de mesure nulle.

Par

Emile Borel (Paris).

Une méthode fort générale pour définir des ensembles de mesure nulle consiste à partir d'un ensemble énumérable de points fondamentaux, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, que l'on supposera denses dans l'intervalle 0, 1. Pour fixer les idées, on peut supposer que les a_n sont les nombres rationnels (hypothèse A) ou les nombres décimaux (hypothèse B) ou les nombres binaires de la forme $\frac{A}{2^p}$ (hypothèse C), etc. Adoptons l'hypothèse A et considérons l'ensemble E_k défini comme l'ensemble de points intérieurs à l'un au moins des intervalles

$$E_k \qquad a_n - \varphi_k(n), \qquad a_n + \varphi_k(n),$$

les $\varphi_k(n)$ étant des fonctions décroissantes de n, telles que les séries

(2) $$\sum \varphi_k(n) = s_k$$

soient convergentes. On supposera que s_k tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment; l'ensemble des points communs à tous les E_k forme alors un ensemble E de mesure nulle, défini par les fonctions $\varphi_k(n)$.

D'après un théorème connu, quelque rapide que soit la décroissance des fonctions $\varphi_k(n)$, on peut trouver une fonction $\varphi(n)$ décroissant au moins aussi rapidement que chacune d'elles, c'est-à-dire telle que l'on ait, quels que soient k et n

(3) $$\frac{\varphi(n)}{\varphi_k(n)} < A_k,$$

les nombres A_k étant finis. L'ensemble E_k comprend donc à son intérieur l'ensemble

$$E'_k \qquad a_n - \frac{\varphi(n)}{A_k}, \quad a_n + \frac{\varphi(n)}{A_k}.$$

Posons d'autre part

$$(5) \qquad \sum \varphi(n) = s;$$

les relations (2) et (3) entraînent

$$(6) \qquad s < A_k s_k$$

et comme s_k tend vers zéro, A_k augmente indéfiniment avec k.

L'ensemble E' défini par les intervalles E'_k est donc identique à l'ensemble défini par les E''_k

$$(7) \qquad E''_k \qquad a_n - \frac{\varphi(n)}{k}, \quad a_n + \frac{\varphi(n)}{k},$$

que nous appellerons suite normale correspondant aux a_n et à la fonction $\varphi(n)$. L'ensemble E'_k étant intérieur à E_k, l'ensemble E' est intérieur à E. Comme il est aisé de voir (par exemple au moyen de la théorie des fractions continues) que quelle que soit la fonction $\varphi(n)$, l'ensemble E' a la puissance du continu, il en est de même de E.

Les considérations précédentes conduisent naturellement à étudier les ensembles E', définis par une fonction unique $\varphi(n)$, avant d'étudier les ensembles E, définis par une suite de fonctions $\varphi_k(n)$.

Il est clair que l'ensemble de mesure nulle défini par les intervalles (7) est d'autant plus raréfié que la décroissance de $\varphi(n)$ est plus rapide, c'est-à-dire que la convergence de la série (5) est plus rapide.

On se trouve ainsi conduit à classer les ensembles de mesure nulle d'après la rapidité de la convergence de la série (5). J'ai indiqué cette classification dans un mémoire publié en 1919 [1]).

M. Hausdorff, de son côté, a défini les ensembles de mesure nulle à dimension fractionnaire que M. Besicovitch a étudiés

[1]) Compte-rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 162 (1911) p. 579 et t. 164 (1912), p. 568. *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. XLVII (1919) p. 1 et *Méthodes et problèmes des théories des fonctions*, Gauthier-Villars (1922) p. 38.

dans une série de mémoires fort intéressants [1]). Je voudrais indiquer rapidemment les relations entre ma classification et celle de M. Besicovitch.

Je dois tout d'abord observer que la méthode de M. Besicovitch présente avec la mienne une différence analogue entre ma définition de la mesure des ensembles et la définition de M. Lebesgue. On sait que ma définition ne s'applique, en principe, qu'aux ensembles construits au moyen de certaines méthodes, en partant des ensembles élémentaires que sont les intervalles, tandis que la méthode de M. Lebesgue est, au moins en apparence, infiniment plus générale, puisqu'elle ne s'inquiète pas de la manière dont un ensemble est donné. On sait aussi que, en fait, il est extrêmement malaisé de construire des exemples précis d'ensembles mesurables L (au sens de M. Lebesgue) et non mesurables B (d'après ma méthode constructive). De plus, M. Lebesgue a démontré que tout ensemble mesurable L contient un ensemble mesurable B de même mesure et est contenu dans un ensemble mesurable B de même mesure.

Il est aisé de montrer que les ensembles auxquels M. Besicovitch attribue la dimension fractionnaire σ (nombre compris entre 0 et 1) correspondent dans ma classification à la fonction

$$(8) \qquad \varphi(n) = \frac{1}{n^s} \qquad s = \frac{1}{\sigma}.$$

Par contre les ensembles correspondant aux séries à convergence plus lente que chacune des séries (8) ont, dans la classification de M. Besicovitch, tous la dimension 1, tandis que tous ceux qui correspondent à des séries à convergence plus rapide ont la dimension zéro.

On sait combien est grande la variété des séries convergeant plus lentement que les séries (8)

$$(9) \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)^s} \qquad s > 1$$

$$(10) \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^s} \qquad \text{etc.}$$

[1]) F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, Math. Annalen, t. 79 (1918) p. 157—179. Besicovitch (A. S.), *On linear sets of points of fractional dimension*, Math. Annalen, t. 101 (1929) p. 161 et *On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system*, Math. Annalen, t. 110 (1934) p. 321.

et combien est grande aussi la variété des séries convergeant plus rapidement

$$(11)\qquad \sum \frac{1}{e^{(\log n)^s}} \qquad s > 1$$

$$(12)\qquad \sum \frac{1}{e^{n^s}} \qquad s > 0$$

etc.

La rapidité de la convergence d'une série peut être définie par une fonction croissante $\psi(n)$ si l'on pose

$$(13)\qquad s - s_n = \frac{1}{\psi(n)}.$$

Pour les séries (8), on a

$$(14)\qquad \psi(n) = n^{s-1}.$$

Pour les séries (9), (10), etc., on a

$$(15)\qquad \psi(n) = (\log n)^{s-1}, \quad \psi(n) = (\log\log n)^{s-1}, \quad \text{etc.}$$

Pour les séries (11), (12), et les séries analogues, on serait amené à considérer des fonctions $\psi(n)$ croissant plus rapidement que n^s ou $e^{s\log n}$, soit de la forme

$$(16)\qquad e^{(\log n)^\sigma} \qquad \sigma > 1$$

soit de la forme

$$(17)\qquad e^{n^s}, \qquad s > 0$$

$$e^{e^{n^s}}, \qquad \text{etc. etc.}$$

On voit combien est compliquée la classification et les variétés des ensembles de mesure nulle, même lorsqu'on se borne aux fonctions croissantes à croissance régulière, c'est-à-dire définies simplement à partir de la fonction exponentielle.

M. Besicovitch a obtenu des résultats intéressants, qui se rattachent au calcul des probabilités, sur la somme des chiffres des nombres écrits dans le système de numération de base 2. Soit un tel nombre 0,100100100... et $\Theta(n)$ la somme de ses n premiers chiffres. Si $\frac{\Theta(n)}{n}$ a pour limite p et que l'on pose $p+q=1$, l'ensemble des nombres satisfaisant à cette condition a une dimension fractionnaire s définie par la relation

$$(18)\qquad 2^s = \frac{1}{p^p q^q}.$$

Pour les ensembles de dimension 1, $\frac{\Theta(n)}{n}$ a pour limite $\frac{1}{2}$, ce qui peut se produire pour les valeurs de $\Theta(n)$ de la forme

$$(19)\qquad \Theta(n) = \frac{1}{2}n + \sqrt{n\log n}\,\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ étant une fonction croissante, cependant telle que $\frac{\varphi(n)\sqrt{\log n}}{n}$ tende vers zéro pour n infini.

A l'ensemble des fonctions $\varphi(n)$ satisfaisant à cette condition correspond l'infinie variété des ensembles de mesure nulle de dimension 1 pour M. Besicovitch.

Quant aux ensembles de mesure nulle de dimension zéro au sens de M. Bescovitch, ils correspondent à une fonction $\Theta(n)$ telle que la limite du rapport $\frac{\Theta(n)}{n}$ soit zéro, c'est-à-dire, par exemple

$$(20)\qquad \Theta(n) = \frac{n}{\log n}, \quad \Theta(n) = \frac{n}{\log\log n}$$

ou bien

$$\Theta(n) = n^{1-s} \qquad s > 0$$

$$(21)\qquad \Theta(n) = \log n \qquad \text{etc. etc.}$$

Ici encore nous avons une variété extrêmement riche d'hypothèses à examiner.

Ces considérations sur la fonction $\Theta(n)$ se rattachent à la considération des ensembles définis au moyen de l'hypothèse que nous avons appelée hypothèse C dans les premières lignes de cette note. L'étude de ces ensembles et de ceux qui se rattachent à l'hypothèse B est grandement facilitée par l'emploi des notations binaire et décimale.

M. Besicovitch définit la mesure fractionnaire d'un ensemble en considérant les intervalles l_k à l'intérieur desquels peuvent être enfermés les points de l'ensemble, mais il substitue aux sommes de Lebesgue les sommes des puissances fractionnaires des l_k, c'est-à-dire les sommes

$$(22)\qquad \sum l_k^s \qquad s < 1.$$

Il existe un nombre s_0, qui peut être 0 ou 1, tel que la série (22) converge pour $s > s_0$ et diverge pour $s < s_0$. Dans les cas où s_0

est égal à *zero* ou à *un*, on serait amené à considérer des séries telles que les suivantes, pour $s_0 = 1$, en posant $l_k = \frac{1}{\lambda^k}$:

$$\sum l_k (\log \lambda_k)^n,$$

$$\sum l_k (\log \log \lambda_k)^n,$$

et dans le cas où $s_0 = 0$, des séries telles que les suivantes:

$$\sum \frac{1}{(\log \lambda_k)^n},$$

$$\sum \frac{1}{(\log \log \lambda_k)^n},$$

séries qui sont données seulement à titre d'exemple, car la variété des possibilités est considérable. Il y a un très vaste champ de recherches à explorer.

Signalons enfin, pour mémoire, l'étude des cas où la croissance des fonctions considérées ne serait pas *régulière*, c'est-à-dire en relation simple avec la fonction exponentielle.

Les ensembles définis par les intervalles fondamentaux normaux rattachés à des ensembles énumérables classiques sont assurément fort particuliers; ils donnent toutefois des exemples en fait fort généraux et permettent d'étudier très complètement la classification des ensembles de mesure nulle. Je souhaite que les brèves indications qui précèdent encouragent à poursuivre cette étude ceux qui s'intéressent à la théorie des ensembles.

A set of axioms for plane analysis situs.

By

R. L. Moore (Austin).

As far as I know, Veblen was the first to conceive the idea of basing geometry on a set of axioms in terms of what he called „chunks" (of space). He had this idea as early as 1905 and discussed it with me at that time. In 1913 Huntington published a paper [1]) in which he founded geometry on a set of postulates in terms of „sphere" and „inclusion"; and Whitehead and Nicod have given some thought to related questions.

Huntington makes much use of what may be termed the convexity of his undefined spatial elements. It is natural that he should do so in founding a *geometry*. The notion of the convexity of these elements is intimately [2]) related to the notion *straight line* which is one of the fundamental elements of *geometry*.

For many years I have endeavored to found point-set theoretic *analysis situs* on the basis of a set of axioms in terms of the notion of what I shall call „piece" and the relation „embedded in". In so far as I was endeavoring to found *analysis situs*, as opposed to *geometry*, I would naturally avoid postulating that these pieces be convex, the notions convexity and colinearity being foreign to analysis situs. In April, 1930, I delivered [3]), at The University of Texas, a set of five lectures in which I dealt with a set of Axioms in

[1]) *A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion,* Math. Ann., Bd. LXXIII, 522—559.

[2]) In order that three given points of a Euclidean space should be colinear it is necessary and sufficient that they may be lettered A, B and C in such a way that B is contained in every convex region that contains both A and C.

[3]) As University of Texas research lecturer for the session 1929—1930.