Caractère (2*b*). *L'ensemble* $H_{n-1} \geqslant K_0$ *des points au voisinage desquels* φ_n *est non totalisable sur* P, *quand on attribue pour variation à sa totale sur le contigu* $c_m d_m$ *à* P *la valeur* $\theta_{m,n-1}$, H_{n-1} *est non-dense sur* P.

Soit $\bar{\omega}$ une portion de P sans point commun avec H_{n-1}, $\alpha\beta$ les extrémités de $\bar{\omega}$. La fonction $\mu(x)$, égale à φ_n sur $\bar{\omega}$, à $\frac{\theta_m}{i_m}$ sur le contigu i_m à $\bar{\omega}$, est totalisable. Sa totale entre α et x ne diffère que par une constante de $f_{n-1}(x, P)$ sur $\bar{\omega}$. Dès lors, on connaît de la fonction $f_{n-2}(x, P)$ 1° la dérivée approximative égale à $f_{n-1}(x, P)$ sur une pleine épaisseur de $P - H_{n-1}$, 2° les variations de $f_{n-2}(x, P)$ sur chaque contigu à P n'ayant aucune de ses extrémités sur H_{n-1}.

63 c. $f_{n-2}(x,P)$ étant résoluble d'ordre $n-1$, l'ensemble $H_{n-2} \geqslant H_{n-1}$ des points où sa dérivée approximative $f_{n-1}(x, P)$ n'est pas totalisable est non-dense sur P. Sur tout intervalle contigu à H_{n-2}, une totalisation simple nous donnera $f_{n-2}(x, P)$, à une fonction linéaire additive près, en tenant compte de la constante arbitraire ajoutable à $f_{n-1}(x, P)$.

De proche en proche, on aboutira à un ensemble $H \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_{n-1}$, H étant non-dense sur P et $f(x)$ étant connu à l'addition près d'un polynome de degré $n-1$ sur chaque contigu à H,

Par le caractère 1*a* de la continuité de cette dernière totale, en tout point, on a $f(x)$ sur tout segment contigu à H.

64. On conclut de là, comme dans le cas de la totalisation simple, que, *par une suite dénombrable d'opérations*, on résout le problème de l'intégration de φ_n pour la totalité du segment ac.

65. Dans le cas où la fonction donnée inconnue $f(x)$ est supposée posséder en chaque point de ab une différentielle d'ordre n, elle est résoluble d'ordre n, d'après le théorème II. Donc, on passera, par l'opération que nous venons de décrire, de son n^e quotient différentiel ordinaire $f_n(x)$ supposé donné à la fonction $f(x)$ supposée inconnue.

La même conclusion vaut si $f(x)$ possède en tout point, au moins d'un côté, deux coefficients différentiels n^{es} extrêmes finis, et si $\varphi_n(x)$ est en chaque point égal à l'un d'eux.

Sur l'existence des continus indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Je me propose de démontrer que *tout espace métrique compact de dimension* $\geqq 2$ *contient un continu indécomposable* [1]).

Désignons par z la variable complexe, par S_1 la circonférence $|z| = 1$, par Q_2 le disque $|z| \leqq 1$, par Y^X la famille des fonctions continues qui transforment l'espace X en sous-ensembles de l'espace Y.

Lemme I [2]). *Si* f *est une transformation essentielle d'un espace métrique et compact* A *en* Q_2, *alors* f *est une transformation essentielle de* $A_1 = f^{-1}(S_1)$ *en* S_1.

Désignons par x les points de A, par u les points de A_1, par Γ_1 la famille des $\varphi \in S_1^{A_1}$ qui sont inessentielles, par Γ_2 la famille des $\psi \in S_1^{A_1}$, qui sont extensibles sur A relativement à S_1. Posons $\varphi_0(u) = 1$; il vient $\varphi_0 \in \Gamma_1$ et $\varphi_0 \in \Gamma_2$. Or, Γ_1 est connexe et Γ_2, d'après un théorème de M. K. Borsuk [3]), ouvert et fermé. Donc $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$.

Supposons que la transformation f de A_1 en S_1 soit inessentielle, c. à d. que $f \in \Gamma_1$; donc $f \in \Gamma_2$ et il existe une fonction $g \in S_1^A$ telle que $g(u) = f(u)$.

Posons: $f_t(x) = (1-t) f(x) + t \cdot g(x)$, $0 \leqq t \leqq 1$.

On aura: $f_0(x) = f(x)$; $f_1(x) = g(x) \in S_1$; $f_t(x) \in Q_2$; $f_t(u) = f(u)$. Donc, la transformation f de A en Q_2 est inessentielle, contrairement à l'hypothèse.

En utilisant un lemme de M. Eilenberg [4]), on obtient le

1) Solution d'un problème posé par M. P. Alexandroff.

2) Les lemmes I, II et le théorème I s'étendent aux transformations essentielles en éléments n-dimensionnels.

3) Borsuk, Monatsh. f. Math. Phys. 38 (1931), p. 382—383.

4) Fund. Math. XXIV, p. 164—165.

Corollaire I. Si f est une transformation essentielle de A en Q_2, alors $A_1 = f^{-1}(S_1)$ contient un constituant K tel que f est une transformation essentielle de K en S_1, donc $f(K) = S_1$.

Lemme II. *Soit f une transformation essentielle de A en Q_2, $J \subset Q_2$ une ligne simple fermée, H celui des deux domaines déterminés dans le plan par J, qui est contenu dans Q_2. Alors f est une transformation essentielle de l'ensemble $f^{-1}(\overline{H})$ en $\overline{H} = H + J$.*

J'omets la démonstration, qui ne présente aucune difficulté.

Les lemmes I, II et le corollaire I entraînent le

Corollaire II. Si f est une transformation essentielle de A en Q_2, $J \subset Q_2$ une ligne simple fermée, alors A contient un continu K tel que $f(K) = J$.

Théorème I. *Soit f une transformation essentielle de A en Q_2 et $C \subset Q_2$ un continu. Alors il existe un continu $L \subset A$ tel que $f(L) = C$.*

Il existe une suite de lignes simples fermées $J_n \subset Q_2$ telle que $\lim_{n\to\infty} J_n = C$ [5]). D'après le corollaire II, il existe un continu $K_n \subset A$ tel que $f(K_n) = J_n$, $n = 1, 2, \ldots$ De la suite $\{K_n\}$ nous pouvons extraire une suite convergente $\{K_{n_s}\}$, $s = 1, 2, \ldots$ Soit $L = \lim_{s\to\infty} K_{n_s}$. On a $L \subset A$, L est fermé et connexe, enfin en vertu de la continuité de f, on aura: $f(L) = \lim_{s\to\infty} f(K_{n_s}) = \lim_{s\to\infty} J_{n_s} = \lim_{n\to\infty} J_n = C$, c. q. f. d.

Théorème II. *Tout espace A métrique, compact et de dimension $\geqq 2$ contient un continu indécomposable.*

Il existe [6]) une transformation essentielle f de A en Q_2. Soit C_0 un continu indécomposable contenu dans Q_2. D'après le thèorème I A contient un continu L_0 tel que $f(L_0) = C_0$. Or, L_0 contient alors un continu indécomposable L_1 tel que $f(L_1) = C_0$ [7]). Le théorème est ainsi démontré.

[5]) Comp. p. ex. Fund. Math. XVI, p. 157 (mutatis mutandis).
[6]) Alexandroff, Math. Ann. 106, p. 170—171.
[7]) Knaster-Mazurkiewicz, Fund. Math. XXI, p. 87—88.

Warszawa 23/VI 1935.

On the absolute integrability of Fourier transforms.

By

Einar Hille (New Haven) and J. D. Tamarkin (Providence).

1. Introduction. In their important paper [1] [1]) Hardy and Littlewood proved that if $\varphi(\theta)$ belongs to a Lebesgue class L_p over $(-\pi, \pi)$, $p > 1$, and if $\{c_m\}$, $m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, is the sequence of complex Fourier coefficients of $\varphi(\theta)$ then

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^p (|m|+1)^{p-2} \leqq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\theta)|^p \, d\theta,$$

where C_p is a constant depending only on p. This constant tends to ∞ as $p \to 1$, and the result does not hold when $p = 1$. It does hold however in the special case where $\varphi(\theta)$ ist the limit function of a function

$$\psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

analytic in the unit circle $|w| < 1$, and such that

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(r e^{i\theta})| \, d\theta$$

is bounded for $0 \leqq r < 1$. In this case the result of Hardy and Littlewood can be stated in the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|/(n+1) \leqq C_1 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\theta)| \, d\theta$$

[1]) The numbers in brackets refer to the list at the end of this paper.