Pour toute fonction $f(t)$ et pour tout ensemble dénombrable H, il existe une fonction $F(t)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n} = f(t)$$

pour tout t et pour toute suite $h_n \epsilon H$ convergente vers 0.

Démonstration. Décomposons l'ensemble de tous les nombres réels en ensembles dénombrables, disjoints et tels que les points t et $t+h$ appartiennent à un même ensemble toutes les fois que $h \epsilon H$. Soit K un de ces ensembles. En vertu du th. (T), il existe alors une fonction $F_K(t)$ telle que $F'_K(t)=f(t)$ pour $t \epsilon K$. On obtient évidemment la fonction cherchée $F(t)$, en posant $F(t)=F_K(t)$ pour $t \epsilon K$.

Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Dans cette Note je m'occupe de la notion de *transformation involutoire,* dont un cas particulier est p. ex. la transformation antipodique de la sphère euclidienne. Dans la partie **1** je traite les espaces arbitraires localement connexes et unicohérents. Dans les parties suivantes je me borne à la surface sphérique S_2, à 2 dimensions, et j'en démontre quelques propriétés topologiques liées avec les transformations antipodiques et avec les rotations. Une de ces propriétés sera appliquée dans la partie **6** à généraliser une inégalité appartenant à la théorie des fonctions analytiques.

R_2 désignera le plan des nombres complexes, S_1 l'ensemble des points z de R_2 tels que $|z|=1$, R_1 l'ensemble des nombres réels. Y^X désignera, comme d'habitude, l'ensemble des transformations continues de X en sous ensembles de Y.

1. Une transformation $a \epsilon X^X$ sera dite *involution*, lorsque $a[a(x)]=x$ pour tout $x \epsilon X$. Il est évident que chaque involution est une homéomorphie, c. à d. une transformation biunivoque et bicontinue.

Lemme. *Soit $f \epsilon S_1^X$ une transformation d'un espace connexe X, telle que l'on a*

$$f[a(x)] = -f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon X$$

où a est une involution. Il n'existe alors aucune fonction $\varphi \epsilon R_1^X$ telle que l'on ait

$$f(x) = e^{i\varphi(x)} \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon X.$$

Démonstration. Dans le cas contraire, on aurait $a^{i\varphi[a(x)]} = -e^{i\varphi(x)}$ et, en conséquence, $e^{i\varphi(x)} = e^{i\varphi[a(x)]+i\pi}$ pour tout $x \in X$. L'espace X étant connexe, il existerait donc un entier k tel que

$$\varphi(x) = \varphi[a(x)] + \pi + 2k\pi,$$

d'où, en substituant $a(x)$ à x, on aurait $\varphi[a(x)] = \varphi(x) + \pi + 2k\pi$ et, par addition des deux formules, $2(2k+1)\pi = 0$, ce qui est impossible.

En posant dans ce lemme $X = S_1$ et $a(x) = -x$, on conclut que *toute transformation $f \in S_1^{S_1}$ telle que l'on a $f(-x) = -f(x)$ est essentielle* [1]), ce qui constitue le cas particulier d'un théorème de M. K. Borsuk [2]) demontré par une autre voie.

Théorème 1. *Etant données une transformation $g \in R_2^X$ d'un espace connexe, localement connexe et unicohérent X et une involution $a \in X^X$, il existe toujours un point $x \in X$ tel que $g[a(x)] = g(x)$* [3]).

Démonstration. Supposons que l'on ait $g[a(x)] \neq g(x)$ pour tout $x \in X$. Posons donc

$$f(x) = \frac{g(x) - g[a(x)]}{|g(x) - g[a(x)]|}.$$

On a $f \in S_1^X$ et $f[a(x)] = -f(x)$. L'espace X étant localement connexe et unicohérent, il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$ [4]), contrairement au lemme.

En posant dans ce théorème $X = R_2$ et $g(x) = x$, on obtient le

Théorème 2. *Pour toute involution $a \in R_2^{R_2}$, il existe un point $x \in R_2$ tel que $a(x) = x$.*

Le th. 1 donne en vertu d'un lemme de M. K. Borsuk [5]) le théorème suivant:

[1]) S. Eilenberg, *Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. XXIV (1935), p. 162, th. 1.

[2]) K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. XX (1933), p. 178, th. I.

[3]) Cf. K. Borsuk, l. c., th. II.

[4]) Pour les espaces X compacts, voir S. Eilenberg l. c., p. 167, th. 7 et p. 162, th. 1. Pour $X = R_2$, voir ibidem, p. 168, th. 9. La démonstration pour le cas général paraîtra dans Fund. Math. XXVI.

[5]) l. c, p. 188.

Théorème 3. *Soient X un espace connexe, localement connexe et unicohérent, $a \in X^X$ une involution et $X = X_1 + X_2 + X_3$ une décomposition de X en ensembles fermés. Il existe alors un $x \in X$ et un $i = 1, 2$ ou 3 pour lesquels on a $x \in X_i$ et $a(x) \in X_i$* [6]).

2. Dans la suite, nous allons nous occuper du cas $X = S_2$. Les involutions $a \in S_2^{S_2}$ se rangent en 3 classes selon le nombre des solutions de l'équation $a(x) = x$.

Dans le cas où ce nombre est 0, la transformation a est topologiquement équivalente à la transformation antipodique [7]); dans ce cas nous désignerons le point $a(x)$ par x^* et l'ensemble $a(X)$ pour $X \subset S_2$ par X^*.

Dans le cas où l'équation $a(x) = x$ admet exactement 2 solutions, que nous désignerons par p_1 et p_2, la transformation a et topologiquement équivalente à la rotation d'angle π autour d'un axe passant par les pôles de S_2 [8]); au lieu de $a(x)$ et de $a(X)$ nous écrirons dans ce cas $x^\cdot$ et $X^\cdot$.

Toutes les autres involutions de S_2 équivalent topologiquement à la symétrie par rapport au plan équateur [8]) et ne présentent aucun intérêt pour nos recherches.

3. ***Théorème 4.*** *Tout ensemble $X \subset S_2$, connexe et tel que $X = X^*$, coupe S_2 entre tout couple de points y, y^*.*

Démonstration. Supposons par contre qu'il existe un continu $K \subset S_2 - X$ tel que $y, y^* \in K$. L'ensemble connexe X se trouve alors dans une région-composante du complémentaire du continu $K + K^*$. Désignons-la par C. On a $(K + K^*)^* = K + K^*$, d'où soit $C = C^*$, soit $C \cdot C^* = 0$. La deuxième équation est impossible, car $X = X^*$. On a donc $C = C^*$, en contradiction avec le th. 2, puisque C est homéomorphe à R_2.

Théorème 5. *Pour tout ensemble $X \subset S_2$, ouvert, connexe et tel que $X \cdot X^* = 0$, il existe un ensemble $Y \subset S_2$, ouvert, connexe, tel que $X \subset Y$, $Y \cdot Y^* = 0$ et que $S_2 - Y$ soit connexe.*

[6]) Cf. K. Borsuk, l. c., p. 178, th. III; B. Knaster, *Ein Zerlegungnssatz über unikohärente Kontinua*, Congrès international des mathématiciens, Zürich 1932.

[7]) B. v. Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. 80, (1919) p. 36.

[8]) B. v. Kerékjártó, l. c.; S. Eilenberg, *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, Fund. Math. XXII (1934), p. 39.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par A la composante de $S_2 - X$ qui contient X^*. L'ensemble A est donc un continu. Nous allons prouver que $A + A^* = S_2$.

On a $X^* \subset A$ et $X \subset A^*$; restent donc à considérer les points $x \in S_2$ appartenant à une composante B de $S_2 - X$, différente de A. Comme $X^* \subset A$, on a $B \cdot X^* = 0$ et $B^* \cdot X = 0$, d'où $X^* + B^* \subset A$, puisque l'ensemble $X^* + B^* \subset S_2 - X$ est connexe. On a donc $B^* \subset A$ et finalement $B \subset A^*$. L'égalité $A + A^* = S_2$ est donc établie.

La sphère S_2 étant unicohérente, le produit $K = A \cdot A^*$ des continus A et A^* est un continu. Comme $K = K^*$, les ensembles X et X^* se trouvent en vertu du th. 4 dans des composantes de $S_2 - K$ différentes. Pour obtenir l'ensemble cherché, il ne reste qu'à désigner par Y la composante de $S_2 - K$ qui contient X.

4. *Théorème 6.* *Tout ensemble* $X \subset S_2$, *connexe et tel que* $X = X^{\cdot}$, *coupe* S_2 *entre* p_1 *et* p_2.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par contre, qu'il existe un continu $K \subset S_2 - X$ tel que $p_1, p_2 \in K$. L'ensemble connexe X se trouve alors dans une région-composante du complémentaire du continu $K + K^{\cdot}$. Désignons-la par C. On a $(K + K^{\cdot})^{\cdot} = K + K^{\cdot}$ d'où soit $C = C^{\cdot}$, soit $C \cdot C^{\cdot} = 0$. La deuxième égalité est impossible, car $X = X^{\cdot}$. On a donc $C = C^{\cdot}$, en contradiction avec le th. 2, puisque C est homéomorphe à R_2, p_1 *non* $\in C$ et p_2 *non* $\in C$.

Théorème 7. *Tout ensemble* $X \subset S_2$, *connexe, tel que* $X = X^{\cdot}$ *et que* p_1, $p_2 \in X$, *coupe* S_2 *entre tout couple de points* y, $y^{\cdot}$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons qu'il existe un continu $K \subset S_2 - X$ pour lequel $y, y^{\cdot} \in K$. En posant $Y = K + K^{\cdot}$, on obtiendrait un continu tel que $Y = Y^{\cdot}$ et que $Y \cdot X = 0$. En vertu du th. 6, Y couperait S_2 entre les points p_1 et p_2, contrairement à l'hypothèse que l'ensemble connexe X contient ces points.

Théorème 8. *Pour tout ensemble* $X \subset S_2$, *ouvert, connexe et tel que* $X \cdot X^{\cdot} = 0$, *il existe un ensemble* $Y \subset S_2$ *ouvert, connexe, tel que* $X \subset Y$, $Y \cdot Y^{\cdot} = 0$ *et que* $S_2 - Y$ *soit connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons prouver d'abord que X ne coupe pas S_2 entre p_1 et p_2. Dans le cas contraire, il existerait en effet une courbe simple fermée $Z \subset X$ coupant S_2 entre p_1 et p_2. Désignons

par K_2 la fermeture de la composante de $S_2 - Z$ qui contient p_1. On a évidemment: $K_2 \cdot K_2^{\cdot} \neq 0$, $Z = Fr(K_2)$ [9]) et $Z^{\cdot} = Fr(K_2^{\cdot})$. Comme $Z \cdot Z^{\cdot} = 0$, on peut donc supposer que $K_2 \subset K_2^{\cdot}$, d'où $K_2 \supset K_2^{\cdot}$ et finalement $Z = Z^{\cdot}$, ce qui est impossible.

Aucun des ensembles ouverts X et $X^{\cdot}$ ne coupant S_2 entre p_1 et p_2, on conclut de $X \cdot X^{\cdot} = 0$ que $X + X^{\cdot}$ ne coupe non plus S_2 entre p_1 et et p_2. Soit $K \subset S_2 - (X + X^{\cdot})$ un continu contenant p_1 et p_2. D'après le th. 7, le continu $K + K^{\cdot}$ coupe S_2 entre tout couple $y, y^{\cdot}$, en particulier les ensembles X et $X^{\cdot}$ se trouvent dans des composantes différentes de $S_2 - (K + K^{\cdot})$. Il ne reste qu'à désigner par Y celle de ces composantes qui contient X.

5. Les th. 6—8, qui concernent la rotation d'angle π, peuvent être établis pour la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ autour d'un axe passant par les pôles. On doit se baser alors sur deux propositions suivantes: 1° en identifiant chaque point de la sphère avec ses images successives données par cette rotation, on obtient encore une sphère, 2° tout domaine simplement connexe, situé sur cette dernière et qui ne contient aucun de deux points singuliers (images des pôles), vérifie le théorème de la monodromie.

6. Nous allons appliquer le th. 8 pour démontrer un lemme de la théorie des fonctions analytiques.

Soit $f(z)$ *une fonction holomorphe dans l'intérieur* E *du cercle-unité; si* $f(0) = 0$ *et* $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$ *pour tout couple* $z_1, z_2 \in E$, *alors on a*

$$|f'(0)| \leqslant 1.$$

Dans le cas particulier où la fonction $f(z)$ est univalente, ce lemme a été démontré par M. L. B i e b e r b a c h [10]). Or, nous allons prouver que dans le cas où la fonction $f(z)$ n'est pas univalente, c'est l'inégalité $|f'(0)| < 1$ qui a lieu.

Considérons la fonction $\frac{1}{z}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$. On voit aussitôt que c'est une involution de S_2 et qu'elle admet deux points invariants (1 et —1). On peut donc poser $z^{\cdot} = \frac{1}{z}$. La condition: $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$

[9]) Pour tout $X \subset S_2$, on désigne par $Fr(X)$ la frontière de l'ensemble X, c. à d. l'ensemble $\overline{X} \cdot (\overline{S_2 - X})$.

[10]) L. B i e b e r b a c h, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung*, Math. Ann. 77 (1916), pp. 153—17.

pour tout couple $z_1, z_2 \in E$ équivaut dans cette notation à la condition $f(E) \cdot [f(E)]^{*} = 0$.

L'ensemble $f(E)$ étant ouvert et connexe, il existe en vertu du th. 8 un ensemble $Y \subset S_2$ ouvert, simplement connexe, tel que $f(E) \subset Y$ et que $Y \cdot Y^{*} = 0$. Soit $f_1(z)$ la représentation conforme de E sur Y, telle que $f_1(0) = 0$. Le lemme étant déjà etabli dans le cas des fonctions univalentes, on a $|f_1'(0)| \leqslant 1$.

Considérons la fonction $g(z) = f_1^{-1}[f(z)]$, qui n'est certainement pas univalente. On a $g(0) = 0$ et $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in E$. En vertu du lemme de Schwartz, on a donc $|g'(0)| < 1$. Or, $g'(0) = \frac{f'(0)}{f_1'(0)}$, puisque $f(0) = 0$. On en tire $|f'(0)| < f_1'(0)$ et finalement $|f'(0)| < 1$, c. q. f. d.

Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur.

Par

Arnaud Denjoy (Paris).

Introduction.

1. Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur un segment ab $(a \leqslant x \leqslant b)$. Selon une définition particulièrement commode, nous dirons que $f(x)$ possède au point x une *différentielle d'ordre n* si $x+h$ appartenant à ab, $f(x+h)$ est la somme d'un polynome en h et d'un infiniment petit d'ordre supérieur à n, h étant l'infiniment petit principal.

Le coefficient de $\frac{h^n}{n!}$ dans le polynome, soit $f_n(x)$, sera appelé le n^e *quotient différentiel de f au point x*, et le produit $h^n f_n(x)$ recevra le nom de *différentielle* n^e de f au point x.

Le principal problème que nous avons en vue est d'examiner si et dans quelle mesure $f(x)$ est déterminée par son n^e quotient différentiel, puis d'effectuer le calcul de $f(x)$ supposant connu $f_n(x)$.

2. D'après la définition adoptée, $f(x)$ admet *à fortiori* une différentielle de tout ordre entier p si $1 \leqslant p \leqslant n$, et l'égalité

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + h f_1(x) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f_p(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{n!} [f_n(x) + \varepsilon(x, h)]$$

détermine, pour h non nul, un nombre $\varepsilon(x, h)$ tendant vers 0 avec h, x demeurant invariable.