Sur la dérivation des fonctions dans des ensembles dénombrables.

Par

S. Eilenberg et S. Saks (Varsovie).

Le but de cette note est de démontrer le théorème (T) suivant:

(T) *Etant donnée une suite* $\{a_n\}$ *de points et une suite* $\{\lambda_n\}$ *de nombres (finis ou non), il existe une fonction continue* $F(t)$ *telle que*

(1) $$F'(a_n)=\lambda_n \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

Démonstration. On définit facilement par induction: 1^0 une suite $\{\delta_n\}$ de nombres positifs, décroissante et convergente vers zéro, 2^0 une suite $\{f_n(t)\}$ de fonctions continues, partout différentiables et telles que pour tout $n=1,2,\ldots$:

(2) $f_n(t)$ *s'annule identiquement dans tout intervalle* $(a_i-\delta_n,\ a_i+\delta_n)$ *où* $i=1,2,\ldots,n-1$,

(3) $$|t-a_i|\geqslant\delta_n \quad \textit{entraîne} \quad |f_n(t)-f_n(a_i)|\leqslant\frac{|t-a_i|}{n^2}$$ *pour* $i=1,2,\ldots,n-1$.

(4) $$\sum_{k=1}^{n}f_k'(a_n)=\lambda_n$$ et (5) $$|f_n(t)|<\frac{1}{n^2}.$$

Posons $F(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(t)$ et $F_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(t)$. En vertu de (5), la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(t)$ converge uniformément. La fonction $F(t)$ est donc continue.

Pour prouver qu'elle satisfait à la condition (1), faisons correspondre à tout nombre $h\neq 0$ ($|h|\leqslant\delta_1$) un entier $N=N(h)$ tel que $\delta_N\geqslant|h|\geqslant\delta_{N+1}$. En vertu de (2) et de (3), on a pour tout n et pour tout h tel que $|h|<\delta_n$

$$\left|\frac{F(a_n+h)-F(a_n)}{h}-\frac{F_n(a_n+h)-F(a_n)}{h}\right|=$$
$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_k(a_n+h)-f_k(a_n)}{h}\right|=\left|\sum_{k=N(h)+1}^{\infty}\frac{f_k(a_n+h)-f_k(a_n)}{h}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=N(h)+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{N(h)}.$$

Comme $N(h)\to\infty$ quand $h\to 0$, on en tire en vertu de (4) que $F'(a_n)=F_n'(a_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k'(a_n)=\lambda_n$, c. q. f. d.

Ce raisonnement est bien proche de celui employé par M. N. Lusin pour démontrer que, *pour toute fonction mesurable et presque partout finie* $f(t)$, *il existe une fonction continue* $F(t)$ *telle que* $F'(t)=f(t)$ *presque partout* [1]. On pourrait même démontrer le théorème suivant, plus général que le théorème (T), qui vient d'être établi:

Pour toute fonction mesurable et presque partout finie $f(t)$ *et pour tout ensemble dénombrable* A, *il existe une fonction continue* $F(t)$ *telle que* $F'(t)=f(t)$ *presque partout, et en particulier, partout dans* A.

M. W. Sierpiński a prouvé récemment [2]) que *pour toute fonction* $f(t)$ *et pour toute suite* $\{h_n\}$ *convergente vers* 0, *il existe une fonction* $F(t)$ *telle que l'on ait,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n}=f(t),$$

quel que soit t [2]).

Ce théorème, dans une forme un peu plus générale, peut être déduit du théorème (T). Notamment:

[1]) N. Lusin, *Sur la notion de l'intégrale*, Annali di Mat. (3), XXVI (1917), pp. 77—129.

[2]) W. Sierpiński, *Sur une propriété de fonctions quelconques d'une variable réelle*, Fund. Math. XXV (1935), p. 1.

Pour toute fonction $f(t)$ et pour tout ensemble dénombrable H, il existe une fonction $F(t)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n}=f(t)$$

pour tout t et pour toute suite $h_n \epsilon H$ convergente vers 0.

Démonstration. Décomposons l'ensemble de tous les nombres réels en ensembles dénombrables, disjoints et tels que les points t et $t+h$ appartiennent à un même ensemble toutes les fois que $h \epsilon H$. Soit K un de ces ensembles. En vertu du th. (T), il existe alors une fonction $F_K(t)$ telle que $F'_K(t)=f(t)$ pour $t \epsilon K$. On obtient évidemment la fonction cherchée $F(t)$, en posant $F(t)=F_K(t)$ pour $t \epsilon K$.

Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Dans cette Note je m'occupe de la notion de *transformation involutoire,* dont un cas particulier est p. ex. la transformation antipodique de la sphère euclidienne. Dans la partie **1** je traite les espaces arbitraires localement connexes et unicohérents. Dans les parties suivantes je me borne à la surface sphérique S_2, à 2 dimensions, et j'en démontre quelques propriétés topologiques liées avec les transformations antipodiques et avec les rotations. Une de ces propriétés sera appliquée dans la partie **6** à généraliser une inégalité appartenant à la théorie des fonctions analytiques.

R_2 désignera le plan des nombres complexes, S_1 l'ensemble des points z de R_2 tels que $|z|=1$, R_1 l'ensemble des nombres réels. Y^X désignera, comme d'habitude, l'ensemble des transformations continues de X en sous ensembles de Y.

1. Une transformation $a \epsilon X^X$ sera dite *involution*, lorsque $a[a(x)]=x$ pour tout $x \epsilon X$. Il est évident que chaque involution est une homéomorphie, c. à d. une transformation biunivoque et bicontinue.

Lemme. *Soit $f \epsilon S_1^X$ une transformation d'un espace connexe X, telle que l'on a*

$$f[a(x)]=-f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon X$$

où a est une involution. Il n'existe alors aucune fonction $\varphi \epsilon R_1^X$ telle que l'on ait

$$f(x)=e^{i\varphi(x)} \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon X.$$