so gibt es für jedes $\varphi \in K'$ *zwei* fremde Intervalle von der Länge $\frac{1}{m} < \frac{1}{n+2}$ mit rationalen Endpunkten, nämlich: $[u_0, u_1]$, $[u_2, u_3]$, derart dass $\operatorname*{Min}_{u_i \leq t \leq u_{i+1}} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{u_i \leq t \leq u_{i+1}} f(t)$, $i = 0, 2$.

Man kann daher statt Hilfssatz 2 (p. 410) folgenden Hilfssatz 2^b formulieren. Es sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$; $A^*(\alpha, \beta)$ sei die Menge der $f \in C^1$ mit folgenden Eigenschaften: zu jedem y mit $\operatorname*{Min}_{\alpha \leq t \leq \beta} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{\alpha \leq t \leq \beta} f(t)$ gibt es zwei beliebig kleine, fremde Intervalle mit rationalen Endpunkten: $[\gamma_i, \zeta_i] \subset [\alpha, \beta]$ $i = 1, 2$ derart, dass $\operatorname*{Min}_{\gamma_i \leq t \leq \zeta_i} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{\gamma_i \leq t \leq \zeta_i} f(t)$. Dann ist $A^*(\alpha, \beta)$ eine Residualmenge.

Ist jetzt $S^* = (C^1 - H^1) \prod_{i=1}^{\infty} A^*(\alpha_i, \beta_i)$, wo $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2] \dots$ die Folge aller Teilintervalle von $[0, 1]$ mit rationalen Endpunkten bezeichnet und $f \in S^*$ ist, so kann man in bekannter Weise zu jedem y mit $\operatorname*{Min}_{\alpha \leq t \leq \beta} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{\alpha \leq t \leq \beta} f(t)$ ein System von abgeschlossenen in $[\alpha, \beta]$ enthaltenen Intervallen mit rationalen Endpunkten: $I[r_1, r_2 \dots r_k]$, $k = 1, 2 \dots$; $r_i = 0$ oder 1, $i = 1, 2 \dots k$, bestimmen mit folgenden Eigenschaften: $I[r_1, r_2 \dots r_k, r_{k+1}] \subset I[r_1, r_2 \dots r_k]$; wenn die diadischen Folgen $r_1 \dots r_k, r'_1 \dots r'_k$ nicht übereinstimmen, so ist $I[r_1 \dots r_k]\, I[r'_1 \dots r'_k] = 0$; $\delta\{I(r_1 \dots r_k)\} \to 0$ für $k \to \infty$ und schliesslich $\operatorname*{Min}_{t \in I[r_1 \dots r_k]} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{t \in I[r_1 \dots r_k]} f(t)$. Das System $I[r_1 \dots r_k]$ ist ein determinierendes System für eine perfekte in $[\alpha, \beta]$ enthaltene Menge Q_y und man hat für $t \in Q_y$: $f(t) = y$, w. z. b. w.

Warszawa, 2/V 1935.

Sur un ensemble projectif de classe 2 dans l'espace des ensembles fermés plans [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de donner un exemple fort simple d'un ensemble projectif de classe 2 dans l'espace de tous les ensembles fermés plans, contenus dans le carré Q $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$, métrisé d'une façon connue d'après M. F. Hausdorff. Je prouverai notamment qu'un tel exemple est fourni par l'ensemble de tous les ensembles fermés situés dans le carré Q qui jouissent de la propriété que toute droite $x = a$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, les rencontre en une infinité indénombrable de points.

Soit M un espace métrique complet et séparable. On appelle *ensembles analytiques* de l'espace M les ensembles contenus dans M et qui sont des images continues de l'espace de Baire à 0 dimensions (ou, ce qui revient au même, de l'ensemble de tous les nombres irrationnels) [2]).

Désignons par P_1 les ensembles analytiques de l'espace M, et définissons par l'induction les ensembles P_n et C_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ de l'espace M comme il suit: les ensembles C_n sont des complé-

[1]) Présenté dans la séance du 31 Mai de la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie).

[2]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 135. Pour les autres définitions équivalentes des ensembles analytiques d'un espace métrique complet et séparable, voir mon livre *Introduction to General Topology*, Toronto 1934, p. 156, 145 et 151—152; F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1927 p. 209 (II) et 211 (III).

mentaires (par rapport à M) des ensembles P_n, et les ensembles P_{n+1} sont des images continues des ensembles C_n [1]).

Utilisons maintenant les notations de la Note de MM. Kuratowski et Szpilrajn de *Fund. Math.* t. XVIII, p. 161 ss. Soit X l'intervalle $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ et Y le carré $(0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$.

En s'appuyant sur le théorème 2 de la p. 236 de la *Topologie* I de M. Kuratowski (au lieu des popositions (II) et (III) de la p. 162 de la note citée des *Fund. Math.* t. XVIII), on démontre d'une façon tout à fait analogue à celle du théorème 5 de MM. Kuratowski et Szpilrajn (*Fund. Math.* XVIII, p. 165) ce

Lemme. *Soit n un nombre naturel donné. Pour que la classe $\Phi(\mathbf{K})$ soit contenue dans la classe des ensembles P_n (dans X), il faut et il suffit que $\mathbf{K}$ constitue un ensemble P_n (dans 2^Y).*

Soit maintenant $\mathbf{M}$ la classe de tous les ensembles fermés de l'espace Y qui sont coupés par toute droite $y=a$ (où $0 \leqslant a \leqslant 1$) en une infinité indémonbrable de points.

Théorème. *La classe $\mathbf{M}$ est (dans 2^Y) un ensemble C_2 qui n'est pas un P_2.*

Démonstration. Il existe, comme on sait, un ensemble linéaire E situé dans l'intervalle $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ et qui est un C_2 sans être un P_2 [2]). Comme E est un C_2, il existe un ensemble analytique plan H, situé dans carré $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ et tel que $E = CPCH$. Or, en modifiant un peu la démonstration de la proposition prouvée par M. Mazurkiewicz et par moi dans le t. VI de *Fund. Math.*, p. 163, on démontre qu'il existe un ensemble fermé F_0 situé dans le cube $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$ et tel que H est l'ensemble de tous les points (a, b) du carré $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ tels que la droite $x=a,\ y=b$ coupe l'ensemble F_0 en une infinité indénombrable de points. On voit sans peine que $E = \Gamma(F_0, \mathbf{M})$.

Il existe donc un ensemble fermé $F_0 \subset X \times Y$ tel que l'ensemble $\Gamma(F_0, \mathbf{M})$ n'est pas un P_2. La classe $\Phi(\mathbf{M})$ n'est donc pas contenue dans la classe des ensembles P_2 et, d'après notre lemme, $\mathbf{M}$ n'est pas un ensemble P_2 (dans 2^Y).

[1]) Cf. mon livre cité p. 190 et G. Steinbach, *Beiträge zur Mengenlehre*, Inaugural-Diss., Bonn 1933, p. 35; C. Kuratowski, *Topologie I* (Warszawa 1933), p. 234; cf. aussi ma Note dans *Fund. Math.* t. VII, p. 237.

[2]) Voir p. ex. le livre cité de M. Lusin, p. 290.

Or, soient $\mathbf{M}'$ le complémentaire de $\mathbf{M}$ par rapport à l'espace 2^Y, F un ensemble fermé contenu dans $X \times Y$ et T l'ensemble de tous les points (a, b) du plan, tels que la droite $x=a,\ y=b$ coupe l'ensemble F en une infinité indénombrable de points. D'après un théorème démontré par M. Mazurkiewicz et par moi [1]), généralisé à l'espace à 3-dimensions, T est un ensemble analytique [2]). Or, on voit sans peine que $\Gamma(F, \mathbf{M}') = PCT$: c'est donc un ensemble P_2.

D'après notre lemme, l'ensemble $\mathbf{M}'$ est donc un P_2 (dans 2^Y) et par conséquent son complémentaire $\mathbf{M}$ est un C_2 (dans 2^Y).

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on démontre sans peine que l'ensemble $\mathbf{N}$ de tous les ensembles fermés contenus dans Y et ayant sur toute droite $y=a$ où $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ un ensemble au plus dénombrable de points est (dans 2^Y) un ensemble C_1 qui n'est pas un P_1 (donc un complémentaire analytique non mesurable B).

Il est encore à remarquer qu'on peut aussi définir un simple exemple d'un ensemble projectif de classe 3 (un C_3 qui n'est pas un P_3) dans l'espace de tous les ensembles fermés contenus dans le cube $K(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$, métrisé comme d'habitude. C'est notamment l'ensemble de tous les ensembles fermés F contenus dans le cube K et jouissant de la propriété suivante: il existe pour tout nombre a de l'intervalle $(0, 1)$ un nombre b de cet intervalle, tel que la droite $x=a,\ y=b$ a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec F.

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 166.

[2]) C. Kuratowski, *Fund. Math.* t. XVII, p. 261 et *Topologie I*, p. 262 (Théorème 2); cf. aussi S. Saks, *Fund. Math.* t. XIX, p. 218.