second order $\partial^2\Phi_2/\partial x\,\partial y = \partial^2\Phi_2/\partial y\,\partial x$ almost everywhere. Then the function $\Phi(x,y)$ almost everywhere possesses the derivatives $\partial\Phi/\partial x$ and $\partial\Phi/\partial y$, as well the derivatives $\partial^2\Phi/\partial x\,\partial y$, $\partial^2\Phi/\partial y\,\partial x$, with the restriction, however, that the latter are to be understood with respect to the set only on which $\partial\Phi/\partial x$ and $\partial\Phi/\partial y$ exist; so the condition (a) of Theorem B may be replaced by

$$(3.1)\quad \Phi^*(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x} = \varphi(x,y) \quad \textit{almost everywhere in } S_0.$$

We shall also observe that, given an arbitrary enumerable set N in S_0, the function Φ may be so constructed that the relation in (3.1) be satisfied, in particular, at every point of the set[13] N.

References.

1. Besicovitch, *On differentiation of Lebesgue double integrals*, *Fund. Math.*, this vol., pp. 209—216.
2. Busemann u. Feller, *Zur Differentiation des Lebesguesche Integrale*, *ibid.*, vol. 22 (1934), pp. 226—256.
3. Jessen, Marcinkiewicz and Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, *ibid.*, this vol., pp. 217—234.
4. Looman, *Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes*, *ibid.*, vol. 4 (1923), pp. 246—285.
5. Riesz F., *Sur les points de densité au sens fort*, *ibid.*, vol. 22 (1934), pp. 221—225.
6. Saks, *Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral*, *ibid.*, vol. 22 (1934), pp. 257—261.
7. Ward, *On the differentiation of additive functions of rectangles*, to appear in „*Fundamenta*".
8. Zygmund, *On the differentiability of multiple integrals*, *ibid.*, vol. 23 (1934), p. 143—149.

[13]) Cf. Eilenberg et Saks, *Sur la dérivation des fonctions dans des ensembles dénombrables*, *Fund. Math.*, this vol., p. 264—265.

Über die stetigen Abbildungen der Strecke.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Bezeichnungen. Sind a, b reelle Zahlen, so bezeichnen wir mit (a, b) das offene, mit $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a, b. R^k bezeichnet den k-dimensionalen cartesischen Raum, $\sigma(P, Q)$ die Entfernung zweier Punkte P, Q aus R^k. Sind A und B zwei Punktmengen, so ist $\sigma(A, B) = \inf \sigma(P, Q)$, wo $P \in A$ und $Q \in B$, $\delta(A)$ der Diameter der Punktmenge $A \subset R^k$; ist $A \subset R^k$, $\lambda > 0$, so bezeichnet $U(A, \lambda)$ die Menge aller Punkte $P \in R^k$, die der Ungleichung $\sigma(P, A) < \lambda$ genügen. C^k bezeichnet die Menge der in $[0, 1]$ definierten und stetigen Funktionen f, die der Bedingung $f(t) \in R^k$ genügen. C^k wird durch die Formel: $\varrho(f, g) = \underset{0 \leq t \leq 1}{\mathrm{Max}}\, \sigma(f(t), g(t))$; $f \in C^k$, $g \in C^k$ metrisiert. Wenn $f \in C^k$, $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$, so ist $f[\alpha, \beta]$ die Menge der Punte $f(t)$ mit $t \in [\alpha, \beta]$. Wenn $P \in f[0, 1]$, $Q \in f[0, 1]$, so bezeichnet $\sigma_f(P, Q)$ die relative Entfernung von P und Q in Bezug auf $f[0, 1]$ [1]).

H. Jarník hat folgenden Satz bewiesen [2]):

Es gibt in C^2 eine Residualmenge W^2, so dass jedes $f \in W^2$ folgende Eigenschaft besitzt: ist $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, so ist jeder Punkt der Kurve $f[\alpha, \beta]$ ein irregulärer Punkt dieser Kurve.

H. Knaster hat mir die Vermutung mitgeteilt, dass folgender Satz richtig ist.

Satz. *Es gibt in C^2 eine Residualmenge W^*, so dass für $f \in W^*$ die Kurve $f[0, 1]$ mit der Universalkurve von Sierpiński homöomorph ist.*

[1]) Fund. Math. I, p. 167—169.

[2]) Jarník, Monatsh. f. Math. Phys. 41, p. 408—423, insb. p. 408, Satz 3, 2 und p. 417—423.

Zweck der vorliegenden Abhandlung ist der Beweis dieses Satzes. Die Beweismethode ist im wesentlichen dieselbe wie bei Jarník. Zum Schluss zeige ich, dass der Satz 1,1 in der zitierten Abhandlung von Jarník schärfer formuliert werden kann.

Sei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Wir bezeichnen mit $B^*(\alpha, \beta, 2n)$ die Menge aller $f \in C^2$, welche folgende Eigenschaften besitzen:

(I) $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

(II) Es gibt ein k derart, dass $[0, 1]$ enthält $2k$ paarweise fremde Intervalle $[\gamma_i, \zeta_i]$, $i = 1, 2 \ldots 2k$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $f[\gamma_i, \zeta_i]$ ist eine Strecke.

b) Der Durchschnitt $f[\gamma_i, \zeta_i] \cdot f[\gamma_{i+2}, \zeta_{i+2}]$ besteht aus einem Punkt, welcher innerer Punkt der beiden Strecken ist.

c) Setzt man $L_1 = \sum_{i=1}^{k} f[\gamma_{2i-1}, \zeta_{2i-1}]$, $L_2 = \sum_{i=1}^{k} f[\gamma_{2i}, \zeta_{2i}]$, so ist:

$$L_1 L_2 = 0, \tag{1}$$

$$\delta(L_j) < \sigma_f(f(\alpha), f(\beta)) + \frac{1}{2n} \qquad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$\sigma(f(\alpha), L_j) < \frac{1}{2n} > \sigma(f(\beta), L_j) \qquad j = 1, 2. \tag{3}$$

Hilfssatz 1. *$B^*(\alpha, \beta, 2n)$ ist dicht in C^2.*

Sei $g \in C^2$, n eine feste natürliche Zahl. Wir können offenbar $h \in C^2$ so bestimmen, dass $h(\alpha) \neq h(\beta)$, $\varrho(g, h) < \frac{1}{2n}$. Die Zahl $\sigma_\varphi(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ ist ein unterhalb stetiges Funktional von $\varphi \in C^2$, daher kann man $\lambda > 0$ so bestimmen, dass für $\varrho(\varphi, h) < \lambda$ die Ungleichung bestehe:

$$\sigma_\varphi(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) > \sigma_h(h(\alpha), h(\beta)) - \frac{1}{8n}. \tag{4}$$

In $h[0, 1]$ kann man einen einfachen Bogen M mit Endpunkten $h(\alpha)$, $h(\beta)$ bestimmen, so dass:

$$\delta(M) < \sigma_h(h(\alpha), h(\beta)) + \frac{1}{8n}. \tag{5}$$

Wir setzen jetzt:

$$\lambda_1 = \text{Min.}\left(\frac{\lambda}{4}, \frac{1}{8n}\right). \tag{6}$$

Der zusammenhängende ebene Bereich $U\left(M, \frac{2\lambda_1}{3}\right)$ wird von M nicht zerschnitten, enthält daher einen einfachen Bogen N mit Endpunkten u, v und folgenden Eigenschaften:

$$MN = 0; \qquad N \subset U\left(M, \frac{2\lambda_1}{3}\right), \tag{7}$$

$$\sigma(u, h(\alpha)) < \frac{1}{2n} > \sigma(v, h(\beta)). \tag{8}$$

Sei

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\sigma(M, N) < \frac{\lambda_1}{3}.$$

Die Mengen $U\left(M, \frac{\lambda_2}{2}\right)$ und $U\left(N, \frac{\lambda_2}{2}\right)$ sind zusammenhängende ebene Bereiche. Daher kann man eine Folge von $2k+2$ verschiedenen Punkten p_i, $i = 1 \ldots 2k+2$, bestimmen, derart dass:

$$p_1 = h(\alpha); \quad p_2 = u; \quad p_{2k+1} = h(\beta); \quad p_{2k+2} = v, \tag{9}$$

(10) keine drei Punkte der Folge mit mod 2 kongruenten Indizes sind kollinear,

$$p_{2i-1} \in U\left(M, \frac{\lambda_2}{2}\right); \qquad p_{2i} \in U\left(N, \frac{\lambda_2}{2}\right), \tag{11}$$

$$\sigma(p_i, p_{i+2}) < \frac{\lambda_2}{2}. \tag{12}$$

Jede der $2k$ Strecken $\overline{p_i p_{i+2}}$, $i = 1, 2 \ldots 2k$, verlängern wir nach beiden Seiten um $\frac{\lambda_2}{4}$ und bezeichnen die so erhaltene Strecke mit S_i, ihre Endpunkte mit q_i, q_i'. Nun kann man in $[0, 1]$ $2k$ paarweise fremde Intervalle $[\tau_i, \tau_i']$ bestimmen, so dass (wegen $S_{2i-1} \subset U(M, \lambda_2)$; $S_{2i} \subset U(N, \lambda_2) \subset U(M, \lambda_1)$)

$$h(\tau_i) \in M; \qquad \sigma(h(\tau_i)), q_i) < \lambda_1, \tag{13}$$

$$\alpha, \beta \text{ non } \in \sum_{i=1}^{2k} [\tau_i \tau_i'], \tag{14}$$

$$\delta(h[\tau_i, \tau_i']) < \lambda_1. \tag{15}$$

Wir setzen: $\gamma_i = \tau_i + \frac{1}{3}(\tau_i' - \tau_i)$; $\zeta_i = \tau_i + \frac{2}{3}(\tau_i' - \tau_i)$ und definieren $f(t)$ wie folgt:

(16) $$f(t) = h(t) \quad \text{für} \quad t \in [0, 1] - \sum_{i=1}^{2k} (\tau_i, \tau_i'),$$

(17) $$f(\gamma_i) = q_i; \qquad f(\zeta_i) = q_i',$$

(18) $$f(t) \text{ ist linear für } t \in \sum_{i=1}^{2k} \{(\tau_i, \gamma_i) + (\gamma_i, \zeta_i) + (\zeta_i, \tau_i')\}.$$

$f[\tau_i, \tau_i']$ besteht aus den Strecken: $\overline{h(\tau_i)\, q_i}$, S_i und $\overline{q_i' h(\tau_i')}$; wegen (13), (15) und $\delta(S_i) \leqq \lambda_2$ ist $\delta(f[\tau_i, \tau_i']) < 2\lambda_1 + \lambda_2 < 3\lambda_1$, was in Vereinigung mit (15), (16) die Ungleichung ergibt:

(19) $$\varrho(f, h) < 4\lambda_1 < \frac{1}{2n},$$

also

(20) $$\varrho(f, g) < \frac{1}{n}.$$

Nun zeigen wir, dass $f \in B^*(\alpha, \beta, 2n)$. Wegen (16) hat man (I). $f[\gamma_i, \zeta_i]$ ist eine Strecke für $i = 1, 2 \dots 2k$. $f[\gamma_i, \zeta_i]\, f[\gamma_{i+2}, \zeta_{i+2}]$ reduziert sich wegen (10) auf den Punkt p_{i+2}, und derselbe ist innerer Punkt der beiden Strecken. Man hat also IIa), IIb). Setzt man: $L_1 = \sum_{i=1}^{k} f[\gamma_{2i-1}, \zeta_{2i-1}] = \sum_{i=1}^{k} S_{2i-1}$ und $L_2 = \sum_{i=1}^{k} f[\gamma_{2i}, \zeta_{2i}] = \sum_{i=1}^{k} S_{2i}$, so hat man wegen der Bedeutung von λ_2:

(21) $$L_1 L_2 \subset U(M, \lambda_2)\, U(N, \lambda_2) = 0,$$

d. h. II c) (1). Die Bedingung II c) (3) folgt aus (8), (9). Es erübrigt sich noch II c) (2) zu beweisen. Es ist zunächst:

(22) $$\delta(L_i) < \delta(M) + 2\lambda_1 < \sigma_h(h(\alpha), h(\beta)) + \frac{3}{8n}.$$

Aus (19), (6) folgt aber $\varrho(f, h) < \lambda$, und somit:

(23) $$\sigma_h(h(\alpha), h(\beta)) < \sigma_f(f(\alpha), f(\beta)) + \frac{1}{8n},$$

(24) $$\delta(L_i) < \sigma_f(f(\alpha), f(\beta)) + \frac{1}{2n},$$

d. h. II c) (2).

Aus (20), $f \in B^*(\alpha, \beta, 2n)$ und der evidenten Inclusion:

$$B^*(\alpha, \beta, 2n_1) \subset B^*(\alpha, \beta, 2n) \quad \text{für} \quad n_1 > n$$

folgt unmittelbar der Hilfssatz 1.

Wir bezeichnen mit $B(\alpha, \beta, n)$ die Menge aller $\psi \in C^2$ mit folgenden Eigenschaften:

III) $\psi(\alpha) \neq \psi(\beta)$,

IV) $\psi[0, 1]$ enthält zwei Kontinua K_1, K_2 von folgender Beschaffenheit:

(25) $$K_1 K_2 = 0,$$

(26) $$\delta(K_j) < \sigma_\psi(\psi(\alpha), \psi(\beta)) + \frac{1}{n} \qquad j = 1, 2,$$

(27) $$\sigma(K_j, \psi(\alpha)) < \frac{1}{n} > \sigma(K_j, \psi(\beta)) \qquad j = 1, 2.$$

Hilfssatz 2. *Ist $f \in B^*(\alpha, \beta, 2n)$, so gibt es ein $\eta > 0$ derart, dass aus $\varrho(f, \psi) < \eta$ $\psi \in B(\alpha, \beta, n)$ folgt.*

Nach dem Hilfssatz 5 von Jarník [3]) kann $\eta_1 < 0$ so bestimmt werden, dass für $\varphi \in C^2$, $\varrho(\varphi, f) < \eta_1$ die Mengen $\sum_{i=1}^{k} \varphi[\gamma_{2i-1}, \zeta_{2i-1}]$ und $\sum_{i=1}^{k} \varphi[\gamma_{2i}, \zeta_{2i}]$ Kontinua sind. Man kann weiter $\eta_2 > 0$ so bestimmen, dass für $\varrho(\varphi, f) < \eta_2$ die Ungleichung besteht:

(28) $$\sigma_\varphi(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) > \sigma_f(f(\alpha), f(\beta)) - \frac{1}{4n}.$$

Jetzt setzen wir:

(29) $$\eta = \operatorname{Min}\left(\eta_1, \eta_2, \frac{1}{3}\sigma(f(\alpha), f(\beta)), \frac{1}{3}\sigma(L_1, L_2), \frac{1}{8n}\right).$$

Man verifiziert leicht, dass wenn $\varrho(f, \psi) < \eta$ ist, und wenn man:

(30) $$K_1 = \sum_{i=1}^{k} \psi[\gamma_{2i-1}, \zeta_{2i-1}], \qquad K_2 = \sum_{i=1}^{k} \psi[\gamma_{2i}, \zeta_{2i}]$$

setzt, alsdann die Bedingungen (III) und (IV) (25), (26), (27) erfüllt sind.

[3]) l. c. [2]), p. 418.

Aus den Hilfssätzen 1, 2 folgt, *dass $B(\alpha, \beta, n)$ eine offene in C^2 dichte Menge enthält.*

Beweis des Satzes. Sei V^2 die Menge aller $f \epsilon C^2$, für die $\dim f[0,1] = 1$ ist. V^2 ist eine Residualmenge [4]). Sei $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \ldots$ die Folge aller Systeme rationaler Zahlen mit $0 \leqq \alpha_i < \beta_i \leqq 1$. Wir setzen:

$$W^* = V^2 \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} B(\alpha_i, \beta_i, n). \tag{31}$$

Sei $f \epsilon W^*$. Nach einem Satz von Whyburn [5]) ist ein ebenes, eindimensionales Peanokontinuum mit der ebenen Universalkurve von Sierpiński homöomorph, wenn es keinen Zerschneidungspunkt im kleinen enthält. Nehmen wir an, $f[0,1]$ enthalte einen Zerschneidungspunkt im kleinen p. Dann gibt es eine in $f[0,1]$ offene, zusammenhängende Menge $G \subset f[0,1]$, so dass:

$$G = p + G_1 + G_2; \quad G_1 \neq 0 \neq G_2; \quad \bar{G}_1 G_2 + G_1 \bar{G}_2 = 0. \tag{32}$$

G_1, G_2 sind in $f[0,1]$ offen und

$$p \,\epsilon\, \bar{G}_1 \bar{G}_2, \tag{33}$$

weil sonst auch G nicht zusammenhängend wäre. Sei $\mu > 0$, so dass:

$$U(p, \mu) f[0,1] \subset G. \tag{34}$$

Wir können $\eta > 0$ so bestimmen, dass aus $q_i \epsilon f[0,1]$, $i = 1, 2$; $\sigma(q_1, q_2) < \eta$ die Ungleichung $\sigma_f(q_1, q_2) < \frac{\mu}{4}$ folge. Die Punkte $f(\gamma)$ mit rationalen $\gamma \epsilon [0,1]$ liegen dicht in $f[0,1]$, also in G_1, G_2. Deswegen und gemäss (33) gibt es ein Paar von rationalen Zahlen α_m, β_m derart, dass $0 \leqq \alpha_m < \beta_m \leqq 1$, dass von den beiden Punkten $f(\alpha_m), f(\beta_m)$ der eine in G_1, der andere in G_2 liegt und dass:

$$\sigma(f(\alpha_m), p) < \mathrm{Min}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\mu}{4}\right) > \sigma(f(\beta_m), p). \tag{35}$$

Durch Umnumerierung von G_1, G_2 kann man erlangen, dass:

$$f(\alpha_m) \,\epsilon\, G_1; \quad f(\beta_m) \,\epsilon\, G_2. \tag{36}$$

[4]) l. c. [2]), p. 409, 416–417.

[5]) Ann. de la Soc. Pol. d. Math. IX (1930), p. 172.

Wir bestimmen die natürliche Zahl n so, dass:

$$U\left(f(\alpha_m), \frac{1}{n}\right) f[0,1] \subset G_1; \quad U\left(f(\beta_m), \frac{1}{n}\right) f[0,1] \subset G_2; \quad \frac{1}{n} < \frac{\mu}{4}. \tag{37}$$

Da $f \epsilon W^* \subset B(\alpha_m, \beta_m, n)$, so enthält $f[0,1]$ zwei Kontinua K_1, K_2 mit den Eigenschaften: $K_1 K_2 = 0$ und:

$$\delta(K_i) < \sigma_f(f(\alpha_m), f(\beta_m)) + \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, \tag{38}$$

$$\sigma(K_i, f(\alpha_m)) < \frac{1}{n} > \sigma(K_i, f(\beta_m)) \qquad i = 1, 2. \tag{39}$$

Aus (35) folgt $\sigma(f(\alpha_m), f(\beta_m)) < \eta$, also $\sigma_f(f(\alpha_m), f(\beta_m)) < \frac{\mu}{4}$, also wegen (37), (38): $\sigma(K_i) < \frac{\mu}{2}$, $i = 1, 2$. Aus (35), (37), (39) folgt $\sigma(K_i, p) < \frac{\mu}{2}$, $i = 1, 2$. Somit wegen $K_i \subset U(p, \mu)$ und (34) hat man $K_i \subset G$, $i = 1, 2$. Aus (37), (39) folgt $K_i G_j \neq 0$, $i, j = 1, 2$. Da nun $K_1 K_2 = 0$, so kann p höchstens in einem dieser Kontinuen enthalten sein und man darf annehmen, dass p non ϵK_1. Dann ist aber:

$$K_1 \subset G - p = G_1 + G_2. \tag{40}$$

$$K_1 = K_1 G_1 + K_1 G_2; \quad K_1 G_1 \neq 0, \quad K_1 G_2 \neq 0; \tag{41}$$
$$\overline{K_1 G_1}\, K_1 G_2 + K_1 G_1 \overline{K_1 G_2} \subset \bar{G}_1 G_2 + G_1 \bar{G}_2 = 0.$$

Also ist K_1 kein Kontinuum, im Widerspruch mit der Voraussetzung. Somit ist unser Satz bewiesen.

In der zitierten Abhandlung hat Jarník folgenden Satz über C^1 bewiesen (Satz 1, 1, p. 409):

Es gibt in C^1 eine Residualmenge S^1, so dass jedes $f \epsilon S^1$ folgende Eigenschaft besitzt: ist $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, so ist $\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}} f(t) < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}} f(t)$ und zu jedem y mit $\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}} f(t)$, gibt es unendlichviele Werte von t, welche den Bedingungen $\alpha \leqq t \leqq \beta$, $f(t) = y$ genügen.

Ich behaupte: *statt „unendlichviele" kann man „unabzählbarviele" schreiben.*

Der Beweis findet sich eigentlich implizite bei Jarník. Wenn nämlich (p. 411–412), $n \geqq 3$, $\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}} f(t) + \frac{1}{n} < y < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}} f(t) - \frac{1}{n}$, so gibt es für jedes $\varphi \in K'$ *zwei* fremde Intervalle von der Länge $\frac{1}{m} < \frac{1}{n+2}$ mit rationalen Endpunkten, nämlich: $[u_0, u_1]$, $[u_2, u_3]$, derart dass $\underset{u_i \leq t \leq u_{i+1}}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{u_i \leq t \leq u_{i+1}}{\mathrm{Max}} f(t)$, $i = 0, 2$.

Man kann daher statt Hilfssatz 2 (p. 410) folgenden Hilfssatz 2^b formulieren. Es sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$; $A^*(\alpha, \beta)$ sei die Menge der $f \in C^1$ mit folgenden Eigenschaften: zu jedem y mit $\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}} f(t)$ gibt es zwei beliebig kleine, fremde Intervalle mit rationalen Endpunkten: $[\gamma_i, \zeta_i] \subset [\alpha, \beta]$ $i = 1, 2$ derart, dass $\underset{\gamma_i \leq t \leq \zeta_i}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{\gamma_i \leq t \leq \zeta_i}{\mathrm{Max}} f(t)$. Dann ist $A^*(\alpha, \beta)$ eine Residualmenge.

Ist jetzt $S^* = (C^1 - H^1) \prod_{i=1}^{\infty} A^*(\alpha_i, \beta_i)$, wo $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2] \dots$ die Folge aller Teilintervalle von $[0, 1]$ mit rationalen Endpunkten bezeichnet und $f \in S^*$ ist, so kann man in bekannter Weise zu jedem y mit $\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}} f(t)$ ein System von abgeschlossenen in $[\alpha, \beta]$ enthaltenen Intervallen mit rationalen Endpunkten: $I[r_1, r_2 \dots r_k]$, $k = 1, 2 \dots$; $r_i = 0$ oder 1, $i = 1, 2 \dots k$, bestimmen mit folgenden Eigenschaften: $I[r_1, r_2 \dots r_k, r_{k+1}] \subset I[r_1, r_2 \dots r_k]$; wenn die diadischen Folgen $r_1 \dots r_k$, $r_1' \dots r_k'$ nicht übereinstimmen, so ist $I[r_1 \dots r_k]\, I[r_1' \dots r_k'] = 0$; $\delta\{I(r_1 \dots r_k)\} \to 0$ für $k \to \infty$ und schliesslich $\underset{t \in I[r_1 \dots r_k]}{\mathrm{Min}} f(t) < y < \underset{t \in I[r_1 \dots r_k]}{\mathrm{Max}} f(t)$. Das System $I[r_1 \dots r_k]$ ist ein determinierendes System für eine perfekte in $[\alpha, \beta]$ enthaltene Menge Q_y und man hat für $t \in Q_y$: $f(t) = y$, w. z. b. w.

Warszawa, 2/V 1935.

Sur un ensemble projectif de classe 2 dans l'espace des ensembles fermés plans [1].

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de donner un exemple fort simple d'un ensemble projectif de classe 2 dans l'espace de tous les ensembles fermés plans, contenus dans le carré Q $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$, métrisé d'une façon connue d'après M. F. Hausdorff. Je prouverai notamment qu'un tel exemple est fourni par l'ensemble de tous les ensembles fermés situés dans le carré Q qui jouissent de la propriété que toute droite $x = a$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, les rencontre en une infinité indénombrable de points.

Soit M un espace métrique complet et séparable. On appelle *ensembles analytiques* de l'espace M les ensembles contenus dans M et qui sont des images continues de l'espace de Baire à 0 dimensions (ou, ce qui revient au même, de l'ensemble de tous les nombres irrationnels) [2].

Désignons par P_1 les ensembles analytiques de l'espace M, et définissons par l'induction les ensembles P_n et C_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ de l'espace M comme il suit: les ensembles C_n sont des complé-

[1]) Présenté dans la séance du 31 Mai de la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie).

[2]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 135. Pour les autres définitions équivalentes des ensembles analytiques d'un espace métrique complet et séparable, voir mon livre *Introduction to General Topology*, Toronto 1934, p. 156, 145 et 151—152; F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1927 p. 209 (II) et 211 (III).