et la formule (9) donnerait à la limite avec $k \to \infty$

$$x_m = x_i,$$

ce qui est impossible, puisque $i \neq m$.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un indice μ satisfaisant à la condition (6).

D'après (5) on a donc pour $x = x_m + h_n$ où $n > \mu$:

$$F(x_m + h_n) = F(x_m) + h_n f(x_m) \quad \text{pour} \quad n > \mu,$$

donc, comme $x_0 = x_m$:

$$\frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0)}{h_n} = f(x_0) \quad \text{pour} \quad n > \mu,$$

ce qui donne tout de suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0)}{h_n} = f(x_0).$$

Le nombre réel x_0 étant supposé arbitraire, la formule (1) se trouve ainsi établie pour tous les x réels c. q. f. d.

Sur un théorème de M. Sierpiński.

Par

Stefan Banach (Lwów).

M. W. Sierpiński a démontré récemment [1]) ce

Théorème: *$f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$,... étant une suite infinie de fonctions définies dans un ensemble infini E* (formé d'éléments quelconques) *et ne prenant que les valeurs appartenant à E, il existe deux fonctions de même nature, $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ telles que toute fonction de la suite considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration plus simple de ce théorème.

Démonstration.

Décomposons l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints $E_0, E_1, E_2, \ldots$, dont chacun a la même puissance que l'ensemble E, et décomposons l'ensemble E_0 en une infinité dénombrable d'ensembles $E_{0,1}, E_{0,2}, E_{0,3}, \ldots$, dont chacun a la même puissance que E_0 (donc aussi que E).

Définissons maintenant dans l'ensemble E la fonction $\psi(p)$ de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Or, définissons la fonction $\varphi(p)$, d'abord seulement dans l'ensemble $E - E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble $E_{0,n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

On vérifie sans peine que, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la fonction

$$\theta_n(p) = \varphi\, \psi^n\, \varphi\, \psi(p) \tag{1}$$

[1]) Fund. Math. t. XXIV, p. 209.

transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble $E_{0,n}$. La fonction $\theta_n^{-1}(p)$ (inverse de la fonction $\theta_n(p)$) est ainsi définie dans l'ensemble $E_{0,n}$ et transforme $E_{0,n}$ en E.

Définissons maintenant la fonction $\varphi(p)$ dans l'ensemble

$$E_0 = E_{0,1} + E_{0,2} + E_{0,3} + \cdots,$$

en posant

$$\varphi(p) = f_n\,\theta_n^{-1}(p) \quad \text{pour} \quad p \in E_{0,n} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement (d'après $\theta_n(E)=E_{0,n}$)

$$\varphi\,\theta_n(p) = f_n(p) \quad \text{pour} \quad p \in E,$$

ce qui donne, d'après (1):

$$f_n(p) = \varphi^2\,\psi^n\,\varphi\,\psi(p) \quad \text{pour} \quad p \in E, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et le théorème de M. Sierpiński est démontré.

Sur les ensembles de mesure nulle.

Par

Emile Borel (Paris).

Une méthode fort générale pour définir des ensembles de mesure nulle consiste à partir d'un ensemble énumérable de points fondamentaux, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, que l'on supposera denses dans l'intervalle 0, 1. Pour fixer les idées, on peut supposer que les a_n sont les nombres rationnels (hypothèse A) ou les nombres décimaux (hypothèse B) ou les nombres binaires de la forme $\frac{A}{2^p}$ (hypothèse C), etc. Adoptons l'hypothèse A et considérons l'ensemble E_k défini comme l'ensemble de points intérieurs à l'un au moins des intervalles

$$E_k \qquad a_n - \varphi_k(n), \qquad a_n + \varphi_k(n),$$

les $\varphi_k(n)$ étant des fonctions décroissantes de n, telles que les séries

$$\sum \varphi_k(n) = s_k \tag{2}$$

soient convergentes. On supposera que s_k tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment; l'ensemble des points communs à tous les E_k forme alors un ensemble E de mesure nulle, défini par les fonctions $\varphi_k(n)$.

D'après un théorème connu, quelque rapide que soit la décroissance des fonctions $\varphi_k(n)$, on peut trouver une fonction $\varphi(n)$ décroissant au moins aussi rapidement que chacune d'elles, c'est-à-dire telle que l'on ait, quels que soient k et n

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi_k(n)} < A_k, \tag{3}$$