Eine Bemerkung über Erzeugende in kompakten Gruppen.

Von

J. Schreier (Lwów).

In einer in diesen *Fundamenta* erschienenen Note [1]), wurde von Herrn Ulam und mir bewiesen, daß es in jeder kompakten und zusammenhängenden metrischen Gruppe G zwei Elemente gibt, die eine in G dichte Untergruppe erzeugen.

Außerdem wurde dort gezeigt, daß die Menge der Paare $p, q \subset G$, die diese Eigenschaft besitzen, im Raume aller Paare, d. h. im kartesischen Produkt G^2, eine Menge von zweiter Baire'schen Kategorie bildet, während ihre Komplementärmenge von erster Kategorie ist.

Da G^2 selbst eine kompakte, metrische Gruppe ist, kann in G^2 gemäß den Resultaten von A. Haar [2]) ein Maß eingeführt werden, welches nach J. v. Neumann [3]) eindeutig wird, wenn man das Maß von ganz G^2 auf 1 normiert.

Es soll hier gezeigt werden, daß die Menge des Paare p, g die eine in G dichte Untergruppe erzeugen, in G^2 das Haarsche Maß Eins besitzt (da diese Menge ein G_δ ist, so werden wir in dieser Weise auf kürzerem Wege das Resultat der unter [1]) zitierten Note in verschärfter Form wiedererhalten).

Nach J. v. Neumann [4]) kann G als Gruppe $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ unendlicher Matrizen treu und stetig dargestellt werden. Die endlichen Ab-

[1]) J. Schreier et S. Ulam, *Sur les nombres de générateurs...* Fund. Math. XXIV, S. 302.

[2]) A. Haar, *Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Ann. of Math. 34 (1933), S. 147–169.

[3]) J. v. Neumann, *Zur Theorie des Haarschen Maßes*, Compositio Math. 1.

[4]) J. v. Neumann, *Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. of Math. 34 (1933), S. 170–190.

schnitte dieser Matrizen bilden lineare kompakte Faktorgruppen $\mathfrak{G}^{(n)}$ von $\mathfrak{G}^{(\infty)}$.

Wenn A eine Teilmenge von $\mathfrak{G}^{(n)2}$, ist so bezeichnen wir mit A^* die Menge derjenigen Paare $x, y \in \mathfrak{G}^{(\infty)}$, deren n-te Abschnitte zu A gehörende Paare p, q sind.

Q_n sei die Menge derjenigen Paare $p, q \subset \mathfrak{G}^{(n)}$ die eine in $\mathfrak{G}^{(n)}$ dichte Untergruppe erzeugen. Da $\mathfrak{G}^{(n)}$ linear, zusammenhängend und kompakt ist, folgt aus einem Satze von H. Auerbach [5]), daß Q_n eine die Bedingung

$$\mu^{(n)}(Q_n) = 1 \tag{1}$$

erfüllende G_δ-Menge ist, wenn $\mu^{(n)}$ das durch die Bedingung $\mu^{(n)}(\mathfrak{G}^{(n)2}) = 1$ eindeutig festgelegte Maß in $\mathfrak{G}^{(n)2}$ bezeichnet.

Es sei

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n^*. \tag{2}$$

Aus der v. Neumannschen Definition der Entfernung [6]) für die Matrizengruppe $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ folgt sofort, daß ein Paar $x, y \in Q$ eine in $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ dichte Untergruppe erzeugt. Wir haben also zu zeigen, daß

$$\mu(Q) = 1 \tag{3}$$

ist, wenn μ das durch die Bedingung $\mu(\mathfrak{G}^{(\infty)2}) = 1$ eindeutig bestimmte Maß in $\mathfrak{G}^{(\infty)2}$ bezeichnet.

Es ist aber

$$\mu(Q_n^*) = \mu^{(n)}(Q_n), \tag{4}$$

denn die Funktion $f(A) = \mu(A^*)$ $[A \subset \mathfrak{G}^{(n)2}]$, wie man leicht bestätigt, alle Postulate eines Haarschen Maßes in $\mathfrak{G}^{(n)2}$ nebst $f(\mathfrak{G}^{(n)2}) = 1$ erfüllt, muß also mit $\mu^{(n)}$ übereinstimmen. Aus (2), (4) und (1) folgt aber (3), w. z. b. w.

Man kann nun den *Satz* so fassen:

In einer metrischen, zusammenhängenden und kompakten Gruppe erzeugt fast jedes Elementenpaar eine überalldichte Untergruppe.

[5]) H. Auerbach, *Sur les groupes linéaires bornés (III)*, Studia Math. V, p 43–49.

[6]) Vgl. die unter [4]) zitierte Arbeit, S. 177, Fußnote.