In the following „relation tables", a dot in row p and column q indicates that p stands to q in the relation described in the heading of the table.

Assertion of „Strict implication" with respect to T ($p \prec q$ in T)

	1	2	3	4
1	•			
2	•	•		
3	•		•	
4	•	•	•	•

Assertion of „Strict equivalence" with respect to T. ($p \equiv q$ in T)

	1	2	3	4
1	•			
2		•		
3			•	
4				•

Assertion of „Strict impossibility" with respect to T. (p^* in T)

1	
2	
3	
4	•

„Effective" implication. ($p = pq$)

	1	2	3	4
1	•			
2	•	•		
3	•		•	
4	•	•	•	•

„Effective" equality. ($p = q$)

	1	2	3	4
1	•			
2		•		
3			•	
4				•

Assertion of „Material implication" with respect to T. ($p \supset q$ in T)

	1	2	3	4
1	•	•		
2	•	•		
3	•	•	•	•
4	•	•	•	•

Assertion of „Material equivalence" with respect to T. ($p \equiv q$ in T)

	1	2	3	4
1	•	•		
2	•	•		
3			•	•
4			•	•

Assertion of „Material negation" with respect to T. (p' in T)

1	
2	
3	•
4	•

While the *element* $p \prec q$ cannot be defined in terms of the „Boolean" symbols K, $\times$, $'$, $=$, these tables show that the *relation* „$p \prec q$ in T" is identical with the Boolean relation „$p = pq$" (at least in this example); and Theorem 24 shows that this will hold true in every example of a Lewis system.

Similarly, the relation „$p \equiv q$ in T" is seen to be identical with the relation „$p = q$"; and Theorem 19 shows that this will be true not only in this example but in every example of a Lewis system.

February, 1935, Harvard University.

Sur l'existence des plans tangents aux surfaces applicables sur le plan.

Par

Henri Lebesgue (Paris).

Considérons une surface rectifiable $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$; c'est-à-dire un système de trois fonctions continues telles que, lorsque le point de coordonnées rectangulaires u, v décrit une courbe de longueur finie ou infinie l, le point dont les coordonnées rectangulaires spatiales sont les valeurs des fonctions x, y, z décrive une courbe de longueur au plus égale à Kl, K étant un nombre fixe, indépendant de la courbe considérée. Si l'on passe des variables u et v aux variables $u_1 = Ku$ et $v_1 = Kv$, la courbe décrite par le point x, y, z sera de longueur au plus égale à celle décrite par le point u_1, v_1. Je suppose ce changement effectué, c'est-à-dire K ramené à l'unité.

Alors on a, pour tout système d'accroissements δu et δv,

$$\frac{[x(u+\delta u, v+\delta v) - x(u, v)]^2}{\delta u^2 + \delta v^2} + \frac{[y(u+\delta u, v+\delta v) - y(u, v)]^2}{\delta u^2 + \delta v^2} + \\ + \frac{[z(u+\delta u, v+\delta v) - z(u, v)]^2}{\delta u^2 + \delta v^2} \leqslant 1.$$

Posons

$$\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho) = \frac{x(u_0 + \varrho\cos\varphi,\ v_0 + \varrho\sin\varphi) - x(u_0, v_0)}{\varrho},$$

et définissons de façon analogue les fonctions $\eta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\zeta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$. Il résulte de l'inégalité précédente que ces trois fonctions sont, en valeur absolue, au plus égales à 1.

La même inégalité entraîne aussi:

$$\left|\frac{\xi(u_0, v_0, \varphi+\delta\varphi, \varrho)-\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)}{\delta\varphi}\right|=$$

$$=\left|\frac{x[u_0+\varrho\cos(\varphi+\delta\varphi), v_0+\varrho\sin(\varphi+\delta\varphi)]-x[u_0+\varrho\cos\varphi, v_0+\varrho\sin\varphi]}{\varrho\,\delta\varphi}\right|\leqslant 1,$$

donc $\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\eta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\zeta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ sont, en tant que fonctions de la seule variable φ, à nombres dérivés bornés. De sorte que, pour u_0, v_0 choisis fixes, ces fonctions de φ, dépendant du paramètre ou indice ϱ, forment des familles de fonctions également continues.

Si donc on choisit des valeurs positives et tendant vers zéro de ϱ pour lesquelles les fonctions $\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ convergent pour une infinité dénombrable de valeurs de φ, choisie partout dense dans $(0, 2\pi)$, les fonctions ξ convergent uniformément vers une limite; on pourra ainsi supposer que $\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\eta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\zeta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ tendent toutes trois uniformément vers des limites.

Si, pour u_0, v_0, φ fixes, la fonction $\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ tend vers une limite déterminée d quand ϱ tend vers zéro par valeurs positives, nous dirons que x a, au point u_0, v_0, une dérivée à droite égale à d dans la direction φ. Si x a, au point u_0, v_0, une dérivée à droite égale à d dans la direction φ et égale à $-d$ dans la direction $\varphi+\pi$, nous dirons que d est la dérivée de x, au point considéré, dans la direction φ.

ξ étant de module inférieur à 1, la fonction $x(u_0+\varrho\cos\varphi, v_0+\varrho\sin\varphi)$, considérée comme fonction de ϱ seul, a presque partout une dérivée déterminée, les valeurs exceptionnelles de ϱ formant un ensemble de mesure nulle sur l'axe des ϱ. Ceci revient à dire que sur toute droite $\dfrac{u}{\cos\varphi}-\dfrac{v}{\sin\varphi}+h=0$ les points en lesquels il n'existe pas de dérivée pour x dans la direction φ forment un ensemble dont les projections sur les axes des u et des v sont de mesures linéaires nulles; donc, en faisant varier h, on voit que les points du plan en lesquels il n'existe pas de dérivée pour x dans la direction φ forment au plus un ensemble de mesure superficielle nulle. Maintenant nous considérons un ensemble Φ de directions φ partout dense dans $(0, 2\pi)$ et en infinité dénombrable; les points u, v en lesquels il n'y aura pas une dérivée déterminée pour chacune des trois fonctions x, y, z et pour chacune de ces directions forment au plus un ensemble E de mesure superficielle nulle.

Ainsi, pourvu que l'on ait choisi u_0, v_0 hors de E, on pourra donner à ϱ toute la série des valeurs positives tendant vers zéro et les fonctions ξ, η, ζ tendront uniformément vers des limites déterminées qu'on peut noter $\xi(u_0, v_0, \varphi, 0)$, $\eta(u_0, v_0, \varphi, 0)$, $\zeta(u_0, v_0, \varphi, 0)$ et qui sont des fonctions continues de φ. De sorte que, lorsque φ tend vers une valeur φ_0 et que ϱ tend vers zéro, les fonctions $\xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\eta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$, $\zeta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ tendent encore vers les limites indiquées.

En termes géométriques: *presque en tout point* $x(u_0, v_0)$, $y(u_0, v_0)$ $z(u_0, v_0)$ *d'une surface rectifiable, — les points exceptionnels correspondent au plus à ceux d'un ensemble de points* u, v *de mesure superficielle nulle, — on peut à chaque direction issue de* u_0, v_0, *associer une tangente à la surface, ces tangentes formant un cône continu. Aux courbes du plan* u, v *tangentes en* u_0, v_0 *à une direction correspondent, sur la surface, des courbes admettant la tangente que nous avons associée à la direction.*

On peut assujettir les points u_0, v_0 à d'autres conditions sans que l'ensemble exceptionnel du plan u, v cesse d'avoir une mesure superficielle nulle. Plaçons-nous dans l'hypothèse où la surface est applicable sur le plan, c'est-à-dire où les courbes correspondantes de la surface et du plan u, v ont toujours des longueurs égales, finies ou infinies; alors, puisque les trois coordonnées d'un point d'une courbe rectifiable sont, presque partout sur la courbe, dérivables par rapport à l'arc de la courbe et fournissent des dérivées dont la somme des carrés est égale à un, nous pourrons supposer, en conséquence d'un raisonnement déjà fait, qu'aux points hors de E on a la relation

$$[\xi(u_0, v_0, \varphi, 0)]^2+[\eta(u_0, v_0, \varphi, 0)]^2+[\zeta(u_0, v_0, \varphi, 0)]^2=1$$

pour toute direction φ de l'ensemble Φ, puisque ces fonctions ξ, η, ζ sont les dérivées des coordonnées des points des courbes correspondant aux droites du plan u, v par rapport à la longueur de l'arc de ces courbes. Mais, puisque ξ, η, ζ sont des fonctions continues de φ, la relation précédente a lieu pour toute direction φ issue de u_0, v_0, qu'elle fasse ou non partie de Φ. La courbe dont les trois coordonnées sont de la forme $x(u_0, v_0)+\xi(u_0, v_0, \varphi, 0)$ est l'intersection du cône de tangentes dont parle l'énoncé précédent avec la sphère de rayon un et dont le centre est le point étudié de la surface.

Cette directrice sphérique γ est la limite vers laquelle tend uniformément, quand ϱ tend vers zéro, la courbe $\gamma(\varrho)$, lieu du point dont les trois coordonnées sont de la forme $x(u_0, v_0) + \xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$. Or nous n'avons utilisé que très partiellement l'inégalité du début; elle donnait aussi:

$$1 \geqslant \frac{[\xi(u_0, v_0, \varphi + \delta\varphi, \varrho) - \xi(u_0, v_0, \varphi, \varrho)]^2}{\delta\varphi^2} + \\ + \frac{[\eta(u_0, v_0, \varphi + \delta\varphi, \varrho) - \eta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)]^2}{\delta\varphi^2} + \\ + \frac{[\zeta(u_0, v_0, \varphi + \delta\varphi, \varrho) - \zeta(u_0, v_0, \varphi, \varrho)]^2}{\delta\varphi^2}.$$

La longueur de l'arc de $\gamma(\varrho)$ limité par les points qui correspondent à φ' et φ'' est donc au plus $|\varphi'' - \varphi'|$ et il en est par suite de même pour γ. Prenons $\varphi' = 0$, $\varphi'' = 2\pi$; l'arc correspondant de γ est tracé sur la sphère de rayon un et joint deux points diamétralement opposés de cette sphère, donc sa longueur est au moins égale à π, et puisqu'elle doit être au plus égale à $|\varphi'' - \varphi'|$, elle est exactement égale à π.

Si maintenant on prend φ compris entre 0 et π, on a:

$$\text{longueur de arc } (0, \varphi) \text{ de } \gamma \leqslant \varphi,$$

$$\text{longueur de arc } (\varphi, \pi) \text{ de } \gamma \leqslant \pi - \varphi,$$

$$\text{long. de arc } (0, \varphi) + \text{long. de arc } (\varphi, \pi) = \text{long. de arc } (0, \pi) = \pi$$

et par suite ce sont toujours les égalités qui conviennent, γ est un grand cercle de la sphère et il y a conservation des angles quand on passe des directions dans le plan u, v aux directions des tangentes à la surface qui leur sont associées.

Donc, *presque en tout point d'une surface applicable sur le plan il existe un plan tangent et il y a correspondance avec conservation des angles entre les directions du plan et les directions de tangentes à la surface.* En d'autres termes, la correspondance est un déplacement en ce qui concerne le premier ordre infinitésimal.

C'est uniquement pour avoir plus immédiatement le résultat que j'ai pris le cas d'une surface applicable sur le plan; si l'on avait eu affaire à la surface $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ applicable sur une surface analytique A, dont u et v donnent une représentation propre, les changements à apporter à nos raisonnements se seraient réduits à celui-ci: Désignant par $s(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$ la plus courte distance sur A des points de A correspondant aux valeurs u_0, v_0; $u_0 + \varrho\cos\varphi$, $v_0 + \varrho\sin\varphi$ des paramètres, on aurait remplacé ϱ dans les dénominateurs par $s(u_0, v_0, \varphi, \varrho)$. *L'énoncé précédent s'étend donc à toute surface applicable sur une surface analytique.*

Les exemples de surfaces non analytiques applicables sur le plan ou sur une surface analytique, que j'ai donnés autrefois, se rattachaient presque tous à l'existence de transformations de l'espace euclidien en lui même:

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z)$$

qui conservent les longueurs et qui ne sont ni des déplacements, ni des symétries. Bien entendu, ces transformations univoques et continues dans le sens $x, y, z | X, Y, Z$ ne sont pas biunivoques.

Le raisonnement qui nous a servi s'applique immédiatement à ces transformations; on en conclut: *presque en tout point une transformation de l'espace en lui-même qui conserve les longueurs est tangente à un déplacement ou à une symétrie.* Les points x, y, z exceptionnels forment un ensemble de mesure spatiale nulle.