Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme

(Erste Mitteilung).

Von

E. Zermelo (Freiburg i. Br.).

Die folgenden Betrachtungen bringen eine nähere Ausführung der im September 1932 auf der Mathematiker-Versammlung im Bad Elster (vgl. D. Math. Vg. Bd. 41, S. 85—88) von mir vorläufig und andeutungsweise vorgetragenen Gedanken und gründen sich im Wesentlichen auf den Begriff der „fundierenden Relationen", den ich schon im 1930 in meiner Arbeit über *„Grenzzahlen und Mengenbereiche"* (diese Zeitschrift Bd. 16, S. 29—47) im besonderen Falle der ε-Beziehung (der Einordnung eines Elementes in eine Menge) verwendet habe. Ich beginne daher mit einer allgemeinen Charakterisierung dieses Begriffes, der in gewissem Sinne eine Erweiterung der Cantor'schen „Wohlordnung" darstellt, um dann zu seiner Anwendung auf die Syllogistik der Satzsysteme überzugehen.

§ 1. Fundierende Relationen und wohlgeschichtete Mengen.

(1) **Definition.** Durch eine binäre Relation $x \mathfrak{f} y$ wird ein Bereich S „wohlfundiert", wenn jeder Unterbereich $T \subset S$ (der nicht verschwindet) mindestens ein „Anfangselement" t_0 enthält, das zu *keinem* Elemente t von T in der Beziehung $t \mathfrak{f} t_0$ steht.

(2) In einem wohlfundierten Bereiche S gibt es *keine unbegrenzt rückschreitende* Kette der Form

$$a_1 \mathfrak{f} a, \quad a_2 \mathfrak{f} a_1, \quad a_3 \mathfrak{f} a_2, \ldots,$$

da für den aus $a, a_1, a_2, \ldots$ gebildeten Teilbereich A unsere Forderung (1) nicht erfüllt wäre. Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend* für die Fundierung von S. Wäre nämlich $T \subset S$ ein Teilbereich *ohne* Anfangselement und t ein beliebiges Element von T, so gäbe es in T ein $t_1 \mathfrak{f} t$, ein $t_2 \mathfrak{f} t_1$, ein $t_3 \mathfrak{f} t_2$ in infinitum entgegen unserer Annahme, da sie alle auch in S liegen.

(3) Mit einem Bereiche S ist auch jeder seiner *Teilbereiche* T wohlfundiert. Denn enthielte T einen Teilbereich T_1 *ohne* Anfangselement, so wäre das auch ein Teilbereich von S, und jedem Elemente t_1 von T_1 entspräche mindestens ein $t \mathfrak{f} t_1$ in T_1 und S wäre nicht wohlfundiert.

(4) Jeder wohlfundierte Bereich S enthält mindestens ein Ur-Anfangselement s_0, das zu keinem weiteren Elemente s in der Beziehung $s \mathfrak{f} s_0$ steht. Die Gesamtheit aller solchen Elemente s_0 bezeichnen wir als die „Basis" des Bereiches S.

(5) In einem wohlfundierten Bereiche S ist *niemals* $a \mathfrak{f} a$, *niemals* gleichzeitig $a \mathfrak{f} b$ und $b \mathfrak{f} a$, oder gleichzeitig $a \mathfrak{f} b$, $b \mathfrak{f} c$ und $c \mathfrak{f} a$, d. h. es sind alle *zyklischen* Relationen dieser Art

$$a_1 \mathfrak{f} a, \quad a_2 \mathfrak{f} a_1, \ldots, \quad a \mathfrak{f} a_n$$

ausgeschlossen, da sonst für die aus a, aus a, b, bzw. aus a, b, c u. s. w. gebildeten Teilbereiche kein Anfangselement existierte.

(6) Gilt in einem wohlfundierten Bereiche S zugleich die „Trichotomie", wonach für zwei beliebige Elemente a, b immer mindestens eine der Relationen $a \mathfrak{f} b$, $a = b$, $b \mathfrak{f} a$ bestehen muß, so ist der Bereich durch unsere Relation zugleich „linear geordnet" und zwar „wohlgeordnet". Denn aus $a \mathfrak{f} b$, $b \mathfrak{f} c$ folgt dann immer $a \mathfrak{f} c$, d. h. es gilt das Gesetz der „Transitivität", weil wegen (5) weder $a = c$ noch $c \mathfrak{f} a$ gelten kann. Ist $T \subset S$ ein beliebiger Teilbereich und t_0 ein Anfangselement von T, so ist für jedes andere $t \in T$ stets $t_0 \mathfrak{f} t$, d. h. t_0 ist das *einzige* Anfangselement, das „erste" Element von T in der linearen Anordnung.

(7) **Satz.** Jeder wohlfundierte Bereich S läßt sich „entwickeln" in eine wohlgeordnete Folge von „Schichten" $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ derart, daß die Elemente jeder Schicht Q_α in den vorangehenden Q_β „wurzeln", daß nämlich, wenn a ein Element von Q_α und $x \mathfrak{f} a$, immer x einer *niederen* Schicht Q_β angehört und daß ferner jede Schicht Q_α *alle* in den vorangehenden wurzelnden, aber noch nicht ihnen angehörenden Elemente a enthält.

Beweis. Die Gesamtheit Q der Ur-Anfangselemente q, die „Basis" des Bereiches, bildet die erste Schicht $Q_0 = P_1$, die Gesamtheit der in Q wurzelnden Elemente die nächste Schicht Q_1, die Gesamtheit der in $P_2 = Q_0 + Q_1$ wurzelnden, aber nicht in P_2 liegenden Elemente, die Schicht Q_2 u. s. w. Allgemein, wenn α irgend eine endliche oder transfinite Ordnungszahl ist und jeder verangehenden $\beta < \alpha$ eine unseren Bedingungen genügende Schicht Q_β entspricht, so sei $P_\alpha = \Sigma Q_\beta$, d. h. der zu Q_α gehörende „Abschnitt", die Vereinigung aller *vorangehenden* Schichten und Q_α enthalte alle in P_α wurzelnden Elemente von S, die *nicht* in P_α liegen. Dann ist in der Tat

$$S = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_\alpha + \ldots$$

Wäre nämlich R die Gesamtheit der in *keiner* Schicht Q_α vorkommenden Elemente und r_0 ein Anfangselement von R, so könnte es kein Basiselement sein, weil es sonst zu Q_0 gehörte, und jedes Element x, das zu r_0 in der Beziehung $x \mathfrak{f} r_0$ stände, gehörte einer Schicht und damit auch einem Abschnitte P_α an, und die Vereinigung aller dieser P_α wäre selbst ein Abschnitt P_ϱ, in welchem r_0 wurzelte, also müßte r_0 selbst der zugehörigen Schicht Q_ϱ angehören — gegen die Annahme.

Eine durch $\mathfrak{f}$ wohlfundierte Menge S heißt daher auch eine „wohlgeschichtete Menge"

$$S = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots = \sum_{\alpha \geqq 0} Q_\alpha.$$

(8) Besteht eine Relation $b \mathfrak{f} a$, wo b der Schicht Q_β und a der Schicht Q_α angehört, so ist immer $\beta < \alpha$, da jedes a nur in P_α, d. h. in vorangehenden Schichten Q_β wurzelt.

(9) **Satz.** Ist ein Bereich S wohlfundiert auf eine Basis Q und diese wieder durch Hinzufügung neuer zwischen ihren Elementen bestehender Relationen $q_1 \mathfrak{f} q_2$ wohlfundiert auf eine neue Basis $Q^* \subset Q$, so ist nach der Hinzufügung auch S wohlfundiert auf Q^*.

Ist $T \subset S$ ein nicht verschwindender Teilbereich von S und t_0 ein Anfangselement von T in der ursprünglichen Fundierung, so braucht dies noch kein Anfangselement im neuen Sinne zu sein, sofern t_0 ein Element von Q ist. Die Gesamtheit aller solchen Elemente $t_0 = q$ von T bilden dann eine (nicht verschwindende) Teilmenge Q' von Q, und jedes Anfangselement q^* dieser Teilmenge bei der neuen Fundierung $\mathfrak{f}'$ ist zugleich Anfangselement von T, da kein weiteres Element t von T, ob es nun zu Q' oder zu $T - Q'$ gehört, zu t_0 in der Relation $t_0 \mathfrak{f}' q^*$ stehen kann. Also ist auch S wohlfundiert auf Q^*.

Anwendungen.

1) Auf die ε-Relation des Enthaltenseins $x \varepsilon m$, wenn x Element der Menge m sein soll. Die Elemente eines „Normalbereiches" sind dann wohlfundiert auf die Gesamtheit der „Urelemente" als Basis.

2) Auf die „echte" Subsumption $m \subset n$ (wobei die Identität ausgeschlossen ist) zweier Mengen. Die (nicht verschwindenden) Untermengen einer *endlichen* Menge sind dann wohlfundiert auf die Gesamtheit der „Einheitsmengen" $\{a\}$, welche nur je *ein* Element enthalten. Diese Eigenschaft kann als *Definition* der endlichen Menge verwendet werden, wie dies durch A. Tarski, Fund. Math. Bd. 6, S. 54—55, ausgeführt wurde.

§ 2. Anwendung auf die Beweistheorie.

Die fundierende Relation, um die es sich hier handelt, ist die zwischen „Grund" und „Folge", welche zwischen „Sätzen" $a, b, c, \ldots$ bestehen oder nicht bestehen kann. Wir sagen „p folgt aus $a, b, c, \ldots$" und schreiben $a, b, c, \ldots \rightarrow p$, wenn mit der Wahrheit von $a, b, c, \ldots$ auch die von p gesetzt sein soll, und nennen den Komplex $a, b, c, \ldots$ den „Grund", den Satz p die „Folge" und den dieser Formel innewohnenden Sinn die „Begründung" des Satzes p. Diese Relation ist „binär", wenn entweder nur ein einziger Satz zur Begründung ausreicht, oder aber alle begründenden Sätze a, b, c zu einem „Komplex" $A = abc\ldots$ zusammengefaßt werden. In jedem Falle heiße der Komplex A, die „Hypothese", das „Vorderglied", der Satz p die „These", das „Hinterglied" der Relation. Ist a ein einzelner zur Begründung von p erforderlicher oder verwendeter Satz, so sagen wir „a begründet p" und schreiben $a \mathfrak{f} p$, auch wenn a zur Begründung von p nicht ausreichen sollte. In diesem Sinne der „teilweisen Begründung" gilt nun das

Theorem. Ist ein System S von Sätzen p „wohlfundiert" durch die „Begründungs-" oder „Folgerelation" $a \rightarrow p$, so sind alle Sätze des Systems „wahr", insofern die Sätze seiner „Basis" es sind. Die Sätze sind aus denen der Basis, die man hier die „Voraussetzung" nennt, „abgeleitet", „bewiesen", und das System selbst ist der „Beweis".

Beweis des Theorems. Angenommen, ein Teil U der fraglichen Sätze (die dann gewiß nicht zur Basis Q gehören) wäre falsch, so enthielte U mindestens einen Satz u_0, der als „Anfangselement" zu keinem weiteren Satze u von U in der „Folgerelation" $u \rightarrow u_0$ steht. Da aber u_0 kein Basis-Element ist, so gibt es einen Satz v_1 in $V = S - U$, für den $v_1 \rightarrow u_0$ wäre, ja *alle* zur Begründung von u_0 dienenden Sätze $v_1, v_2, v_3, \ldots$ wären in V enthalten, wären „wahr" und damit wäre auch u_0 selbst wahr — entgegen unserer Annahme.

Definition. Ein (direkter) *Beweis* ist ein durch Folgerung (Begründung) wohlfundiertes System von Sätzen, zu denen der zu beweisende gehört, und dessen Basis aus lauter wahren Sätzen besteht, welche die Voraussetzung des Satzes bilden.

Das typische Beispiel eines solchen „Beweises" bildet das Schlußverfahren der „vollständigen Induktion". Das System S besteht hier aus Sätzen p_n, welche den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe eineindeutig entsprechen, wobei für jedes n die Folgerung $p_{n-1} \rightarrow p_n$ erwiesen sei und die Gültigkeit des Satzes p_1 (des einzigen der Basis) angenommen wird. Dieses System ist „wohlfundiert", denn jedes Teilsystem T enthält ein p_n mit *kleinstem* Index, sodaß das entsprechende p_{n-1} nicht mehr zu T gehört. Wesentlich für die Gültigkeit dieses Schlußverfahrens ist also die Eigenschaft der Zahlenreihe, daß unter beliebig vielen Zahlen eine die *kleinste* ist und daß *jeder* Zahl n (außer der ersten) eine unmittelbar vorangehende $n-1$ entspricht.

§ 3. Grundrelationen und abgeleitete Sätze.

Jede mathematische Theorie bezieht sich auf einen (im Allgemeinen unendlichen) Bereich von Elementen oder Gegenständen (z. B. Zahlen, Punkten, Figuren u. s. w.), zwischen denen gewisse „Grundrelationen" z. B.

$$a < b, \qquad a + b = c, \qquad a \text{ liegt auf der Geraden } b\,c$$

bestehen oder nicht bestehen können. Aus diesen Grundrelationen werden nun weitere Relationen abgeleitet durch die logischen Operationen der Konjunktion und Disjunktion („und" und „oder") in Verbindung mit der Negation ($\bar{s} =$ Nicht-s), angewendet auf endliche oder unendliche Gesamtheiten von Sätzen in endlicher oder unendlicher Wiederholung. So bedeutet die Konjunktions-Aussage

$\mathfrak{K}(S_1)$, daß *alle* Sätze des Teilbereiches S_1 von S *gleichzeitig* gelten sollen, die Disjunktions-Aussage $\mathfrak{D}(S_1)$, daß von allen Sätzen von S_1 *mindestens einer* gelten soll. Damit die so abgeleiteten Sätze „wohldefiniert" seien, jeder „circulus in definiendo" vermieden werde, machen wir die Annahme, daß das ganze so entstehende Satzsystem S durch die definierenden Relationen „wohlfundiert" sei auf die Gesamtheit Q der Grundrelationen als „Basis". Die „fundierende" Relation $a\,\mathfrak{f}\,b$ kann hier von dreierlei Art sein: 1) a ist einer der Sätze, deren *Konjunktion* b ist, 2) a ist ein Glied der durch b dargestellten *Disjunktion* oder 3) b ist die *Negation* von a, $b = \bar{a}$.

Im letzteren Falle ist natürlich auch a die Negation von b, aber es ist nicht als solche *definiert*, und darauf kommt es hier an. Andernfalls wäre ja gleichzeitig $a\,\mathfrak{f}\,b$ und $b\,\mathfrak{f}\,a$, was dem Wesen der Fundierung widerstreitet, da dann der Teilbereich $\{a, b\}$ „auf sich selbst beruhte". Die definierenden Relationen dürfen in dieser Hinsicht eben nicht ohne weiteres durch logisch äquivalente andere ersetzt werden.

Nun sei Q irgend ein „geschlossener Bereich", eine „Menge" von Grundrelationen q. Dann bilden wir die Menge aller durch die definierenden Operationen der Konjunktion, Disjunktion und Negation aus ihnen hervorgehenden „abgeleiteten Sätze erster Stufe" Q_1. Setzen wir hier $P_2 = Q + Q_1$, so können wir mit P_2 ebenso verfahren und erhalten weitere „Schichten" $Q_2, Q_3, \ldots Q_\omega, \ldots, Q_\alpha$, wobei immer jede Schicht Q_α alle die aus der Gesamtheit der vorangehenden $P_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} Q_\beta$ unmittelbar abgeleiteten Sätze umfaßt, die noch nicht in P_α enthalten sind. Indem nun α die ganze transfinite Zahlenreihe durchläuft, entsteht successive ein „wohlfundiertes" System aller aus Q mittelbar oder unmittelbar abgeleiteten Sätze, die zunächst alle als *verschieden* betrachtet werden, auch wo sie wie s und $\bar{\bar{s}}$ logisch äquivalent sein sollten.

Das so gebildete Satzsystem S ist in der Tat „wohlfundiert" auf diese Grundrelationen, mit Q als „Basis". Ist nämlich T irgend ein Unterbereich von S, so gibt es unter den in ihm vertretenen Schichten Q_α eine solche von niederstem Index α_0, und jeder dieser Schicht angehörige Satz t_0 hängt dann, sofern er nicht selbst der Basis Q angehört, unmittelbar nur von Sätzen aus niederen Schichten Q_β $(\beta < \alpha_0)$ ab, die in T nicht vorkommen. Nach oben hin kann dieses

„wohlgeschichtete" Satzsystem beliebig, z. B. mit einer wohldefinierten „Grenzzahl" π (vgl. meine Note in Fund. Math. Bd. 16), abgeschlossen werden und besitzt dann alle Eigenschaften einer „Menge". In dieser allgemeinen Form läßt sich jede auf einen bestimmten Urbereich von Elementen und bestimmte Grundrelationen gegründete mathematische Disziplin darstellen, so die Arithmetik der rationalen, algebraischen Zahlen und Funktionen, die Analysis der reellen und komplexen Zahlen und Funktionen, ebenso die Geometrie jedes Raumes von gegebener Dimensionenzahl, auch die Mengenlehre eines gegebenen „Normalbereiches" (a. a. O., S. 46). Etwas anders verhält es sich dagegen mit der Theorie der „offenen" Bereiche, wie der „*allgemeinen* Körpertheorie", der *allgemeinen* Geometrie oder der *allgemeinen*, über *alle* Normalbereiche ausgedehnten Mengenlehre.

§ 4. Die Wahrheitsverteilung in Satzsystemen.

Die eigentliche Logik und damit die mathematische Wissenschaft beginnt erst mit der Verteilung der Sätze eines Systemes in „wahre" und „falsche", in solche, die als „gültig" oder „ungültig" angesehen werden. Wir gehen aus von einer willkürlichen „Wahrheitsverteilung" der „Basis" $Q = V_0 + U_0$ und übertragen sie auf das ganze auf Q fundierte System $S = V + U$ nach folgenden syllogistischen Regeln:

1) Jede Konjunktion und jede Disjunktion wahrer Sätze ist wahr, jede Konjunktion und Disjunktion falscher Sätze ist falsch.

2) Jede „gemischte" Konjunktion (von teils wahren, teils falschen Sätzen) ist falsch, jede „gemischte" Disjunktion ist wahr.

3) Jede Negation eines wahren Satzes ist falsch, jede Negation eines falschen Satzes ist wahr.

Gäbe es Sätze t des Systems S, die bei einer Wahrheitsverteilung nicht eindeutig mitverteilt würden, so bildeten sie einen Teilbereich T mit einem „Anfangselement" t_0, einem Satze, der nach der gemachten Annahme kein Basiselement wäre und unmittelbar nur von bereits verteilten Sätzen des Bereiches $S - T$ abhinge, also nach den Regeln 1)—3) in bezug auf seine Zugehörigkeit doch wieder eindeutig bestimmt wäre.

Von zwei Sätzen s, r des Systems sagen wir, sie seien „äquivalent", wenn sie bei *jeder* Wahrheitsverteilung zur selben „Hälfte" gehören, immer *gleichzeitig* wahr oder falsch sind; wir sagen, sie seien „kontravalent" oder „widerstreiten" einander, wenn sie bei *jeder* Verteilung immer zu *verschiedenen* Hälften gehören.

Alle unter sich äquivalenten Sätze a, a', a'', bilden eine „Klasse" A, der eine andere Klasse $\overline{A}$ der widerstreitenden Sätze $b, b', b'', \ldots$ entspricht.

Sind zwei Sätze a, b einem dritten c äquivalent, so sind sie unter einander äquivalent. Jeder Satz ist sich selbst äquivalent und kein Satz widerstreitet sich selbst. (Ein „widerspruchsvoller" Satz ist vielmehr ein solcher, der bei jeder Verteilung zu den „falschen" gehört, ein „absolut falscher Satz"; vgl. S. 144).

Jeder Satz a widerstreitet seiner Negation $\bar{a}$ und ist äquivalent seiner doppelten Negation $\bar{\bar{a}}$. Die Konjunktion $a\,\bar{a}$ (a und $\bar{a}$) ist immer falsch, d. h. in *jeder* Wahrheitsverteilung, „absolut falsch"; die Disjunktion $a + \bar{a}$ (a oder $\bar{a}$) ist immer, bei jeder Wahrheitsverteilung, wahr, „absolut wahr". Der „Satz vom Widerspruch" und der vom „ausgeschlossenen Dritten" sowie der von der „doppelten Verneinung" ergeben sich also hier als einfache Folgen der „syllogistischen Regeln".

Alle „absolut wahren" Sätze sind unter einander äquivalent, ebenso alle „absolut falschen" Sätze unter einander.

Weiter ergibt sich aus denselben Regeln das

Theorem. Die Negation einer aus den Sätzen $a, b, c, \ldots$ gebildeten Konjunktion k ist immer äquivalent der aus den Negaten $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ gebildeten Disjunktion l'; ebenso das Negat eines aus $a, b, c, \ldots$ gebildeten Disjunktion l äquivalent der Konjunktion k' der Negate $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$

Denn *entweder* 1) sind bei einer Verteilung $a, b, c, \ldots$ *alle wahr*, dann sind es auch k und l; zugleich sind dann *alle* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ falsch und damit auch k' und l' falsch und $\bar{k}'$ und $\bar{l}'$ sind wahr. *Oder* 2) sind alle $a, b, c, \ldots$ falsch und damit auch k und l falsch, zugleich alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ wahr und k' und l' wahr, also $\bar{k}'$ und $\bar{l}'$ falsch. *Oder* 3) sind einige $a, b, c, \ldots$ wahr, andere falsch; dann ist k falsch und l wahr, zugleich aber auch k' falsch und l' wahr. D. h. in allen Fällen ist immer k wahr, wenn l' falsch ist, und l wahr, wenn k' falsch ist, und umgekehrt.

Als „Wahrheitsbereich" V bezeichnen wir jeden Teilbereich des Satzsystemes S, der bei einer „Verteilung" die „wahren"

Sätze enthält; entsprechend als „Falschheitsbereich" einen U, der bei einer Verteilung die falschen Sätze umfaßt. Der *Durchschnitt* $V^*(s)$ *aller* V-*Bereiche*, die einen gegebenen Satz s enthalten, umfaßst alle Sätze t, welche immer wahr sind, wenn s wahr ist, also alle aus s *folgenden* Sätze und heiße der „Folgebereich von s".

Der Durchschnitt $U^*(s)$ aller Falschheitsbereiche U, welche s enthalten, umfaßt alle Sätze, die immer falsch sind, wenn s falsch ist, d. h. alle Sätze, *aus denen s folgt*, und heiße der „Ursprungsbereich von s". Der Durchschnitt aller Wahrheits- *und* Falschheitsbereiche, welche s enthalten, umfaßt alle Sätze des Systems, die mit s zugleich wahr und falsch sind, also alle mit s *äquivalenten* Sätze; er ist zugleich der Durchschnitt des Folge- und des Ursprungsbereiches von s und heiße der „Äquivalenzbereich von s": $A^*(s) = U^*(s)\ V^*(s)$.

Ist z. B. s ein „Axiomensystem" einer auf die Grundrelationen gegründeten mathematischen Theorie, z. B. der Arithmetik oder der euklidischen Geometrie, so umfaßt $A^*(s)$ alle äquivalenten Axiomensysteme, $V^*(s)$ alle Sätze der aus s fließenden Theorie, insbesondere alle *allgemeineren* Axiomensysteme, und $U^*(s)$ alle *spezielleren* Axiomensysteme.

Liegt ein Satz t im Folgebereich $V^*(s)$, „folgt" also aus s, so ist er auch „syllogistisch ableitbar" aus s, und zwar bereits innerhalb des gemeinsamen „Wurzelbereiches" oder „Definitionsbereiches" $W(s, t)$ von s und t. Es ist dies der Durchschnitt aller s und t enthaltenden „Wurzelbereiche" W, nämlich aller solchen, die mit jedem in ihnen enthaltenen abgeleiteten Sätze auch seine sämtlichen „Wurzeln" enthalten, d. h. mit jeder Negation $\bar{a}$ den verneinten Satz a, und mit jeder Konjunktion oder Disjunktion ihre sämtlichen Glieder. Dann entspricht jeder beliebigen Wahrheitsverteilung des Gesamtsystems auch eine solche von $W(s, t)$, und jeder Durchschnitt V' mit einem Wahrheitsbereiche V enthält entweder s nicht oder er enthält zugleich auch t. Der Bereich W enthält alle zur Ableitung von t erforderlichen Zwischensätze, und ihre „Wertung", ihre Wahrheitsverteilung, erfolgt in ihm nach den syllogistischen Regeln.

Demnach wäre also jeder aus s folgende Satz auch „beweisbar", aber zunächst nur im absoluten, „infinitistischen" Sinne. Ein solcher „Beweis" enthält zumeist *unendlich viele* Zwischensätze, und es ist noch nicht gesagt, in wie weit und durch welche Hilfsmittel er auch unserem *endlichen* Verstande einleuchtend gemacht werden kann. Im Grunde ist *jeder* mathematische Beweis, z. B. das Schluß-

verfahren der „vollständigen Induktion" durchaus „infinitistisch" und doch vermögen wir ihn einzusehen. Feste Grenzen der Verständlichkeit gibt es hier augenscheinlich nicht.

§ 5. Symmetrie und Kategorizität.

Die Urelemente, die den mathematischen Theorien zugrunde gelegt werden und zwischen denen die „Grundrelationen" gelten (oder nicht gelten) sollen, sind in der Regel *gleichberechtigt*. Die „Axiome" bleiben bestehen, wenn die Urelemente unter einander vertauscht werden, sie sind „symmetrisch", d. h. gegen diese Permutationen „invariant", und das gleiche gilt auch von einem Teil der abgeleiteten Sätze. Dagegen brauchen die „Grundrelationen" durchaus nicht selbst „invariant" oder „symmetrisch" zu sein. Vielmehr gehen sie durch diese Permutationen $\mathfrak{P}$ *in einander* über, sie erfahren eine gewisse Gruppe $\mathfrak{H}$ von Permutationen unter einander, die eine Untergruppe *aller* Permutationen der Basis darstellt und als „Hauptgruppe" bezeichnet werden soll. „Symmetrisch" sind dann alle solche Sätze des Systems, die bei Permutationen der Hauptgruppe in sich übergehen. Z. B. ist jede Konjunktion und jede Disjunktion symmetrisch, wenn sie über alle solchen Sätze (z. B. Grundrelationen) erstreckt wird, die durch Permutationen von $\mathfrak{H}$ in einander übergehen. Nun kann es vorkommen, daß ein symmetrischer Satz (z. B. Axiomensystem) die Eigenschaft hat, daß *alle* Wahrheitsbereiche, in denen er vorkommt, durch Permutationen der Hauptgruppe aus einander hervorgehen. Dann heißt der Satz „kategorisch".

Theorem. Jeder symmetrische Satz ist äquivalent einer Disjunktion von kategorischen Sätzen.

Beweis. Jeder Wahrheitsbereich V enthält einen für ihn charakteristischen „erzeugenden" Satz v, der keinem anderen (vollständigen) Wahrheitsbereiche angehört. Es ist dies die Konjunktion aller ihm angehörenden Grundrelationen q und der Negate $\bar{q}$ aller ihm *nicht* angehörenden, und durch ihn ist nach § 4 die ganze Wahrheitsverteilung eindeutig bestimmt. Gehört nun ein Satz s gleichzeitig den Wahrheitsbereichen $V, V', V''\dots$ und nur diesen an, so ist er dann und nur dann wahr, wenn mindenstens einer der „Erzeugenden" $v, v', v''\dots$ wahr ist. Er ist also äquivalent der *Disjunktion* aller dieser Erzeugenden. Ist der Satz selbst *symmetrisch*, so gehört er mit jedem V gleichzeitig immer den durch Permutation aus V hervorgehenden Wahrheitsbereichen an, er enthält also mit v zugleich die Disjunktion v^* aller aus v durch Permutation hervorgehenden Sätze, und diese Disjunktion v^* ist selbst „kategorisch". Sollte es außer den so aus V hervorgehenden Wahrheitsbereichen noch weitere V_α, V_β, ... geben, denen s angehört, so entsprechen auch diesen weitere „elementar-symmetrische" oder „kategorische" Sätze v_α^*, v_β^*, v_γ^*, ... und s ist dann und nur dann wahr, wenn einer dieser Sätze wahr ist, d. h. s ist „äquivalent" der Disjunktion aller dieser kategorischen Sätze, w. z. b. w.

Die vorstehenden Ausführungen bilden erst den *Anfang* einer noch nicht abgeschlossenen Untersuchung, welche die Begründung einer „infinitistischen" echt mathematischen Syllogistik und Beweistheorie zum Ziele hat. Einer ehrenvollen Einladung der Redaktion folgend, habe ich hier meine vorläufigen Ergebnisse für diesen Festband zusammengestellt in der Hoffnung, in einer weiteren Mitteilung die erforderlichen Ergänzungen nachholen zu können.

The mathematical structure of Lewis's theory of strict implication.

By

Edward V. Huntington (Cambridge, U. S. A.).

Introduction.

The development of any abstract mathematical theory may be described, in the last analysis, as a process of writing down, one after another, a series of expressions — this process involving the motor activity of some human agent. The human agent, in actually working out the development of the theory, constantly passes judgment upon a variety of expressions, deciding (on the basis of previously agreed upon rules of procedure) which expressions are to be written down as „accepted" expressions in the theory, and which are to be rejected.

The term „expression" is here used in a general sense, to denote any sequence of a finite number of marks on paper, to be read, say, from left to right. The marks which occur in existing abstract mathematical theories may be roughly described as of two kinds: (1) letters, each of which may stand for an „element" or „class of elements" within the system; and (2) signs, each of which may stand for an „operation" or „relation" among the elements. In any particular mathematical theory the marks which are to appear in the theory are (or should be) listed in advance, to indicate the „universe of discourse" within which the theory is to be developed.

In order to start such a theory going at all, one must have at least one expression which is agreed upon as an „accepted" expression. In any particular theory, the expressions which are accepted as the starting point of that theory are (or should be) listed in advance and may be called a „set of formal postulates" for the system in question.