Sur une hypothèse de M. Lusin.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Nicolas Lusin a exprimé récemment [1]) l'hypothèse L suivante (dont la certitude lui paraît hors de doute):

L. Tout ensemble de points dont la puissance est aleph-un est un complémentaire analytique.

1. L'hypothèse de M. Lusin et l'hypothèse du continu.

Tout d'abord nous nous occuperons des relations entre l'hypothèse L de M. Lusin et l'hypothèse du continu H ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

La famille de tous les complémentaires analytiques (d'un espace euclidien) étant de puissance $2^{\aleph_0}$ et la famille de tous les ensembles (de cet espace) de puissance $\aleph_1$ étant de puissance $2^{\aleph_1}$, il résulte de l'hypothèse L que

$$(1) \qquad 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} \text{ [2])}.$$

L'hypothèse L entraîne donc la formule (1), qui est incompatible avec l'hypothèse H, puisque, d'après l'inégalité connue de Cantor, $2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Donc:

L'hypothèse L de M. Lusin est incompatible avec l'hypothèse du continu.

Or, il est à remarquer que *sans admettre l'hypothèse du continu nous ne savons pas démontrer que l'hypothèse de M. Lusin est fausse.* En d'autres termes, *sans admettre l'hypothèse du continu nous ne*

[1]) *Fund. Math.* t. XXV, p. 129.

[2]) C'est la *seconde hypothèse du continu* de M. Lusin qui lui paraît exempte de contradiction de même manière que l'est l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (l. c., p. 130).

savons pas démontrer qu'il existe un ensemble (linéaire) de puissance $\aleph_1$ qui ne soit pas un complémentaire analytique. Cependant, en admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, nous pouvons démontrer l'existence d'un tel ensemble.

D'autre part, *sans admettre l'hypothèse du continu nous ne savons pas démontrer qu'il existe un complémentaire analytique de puissance $\aleph_1$.* Un tel ensemble existe évidemment si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Or, *nous savons démontrer sans admettre l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble (linéaire) de puissance $\aleph_1$ qui n'est pas analytique* (Tel est tout ensemble de puissance $\aleph_1$ ne contenant aucun sous-ensemble parfait). Quant à la proposition qu'il existe un ensemble analytique (linéaire) de puissance $\aleph_1$, elle est équivalente à l'hypothèse du continu (ce qui résulte tout de suite du théorème que tout ensemble analytique non dénombrable est de puissance du continu).

2. Conséquences de l'hypothèse de M. Lusin.

I. *Il résulte de l'hypothèse L que tout ensemble de points de puissance $\aleph_1$ est de mesure nulle et toujours de 1^re catégorie.*

En effet, soit E un ensemble de points (situé dans l'espace à m dimensions) de puissance $\aleph_1$. D'après l'hypothèse L l'ensemble E est un complémentaire analytique, donc mesurable (au sens de M. Lebesgue). Or, l'ensemble E ne peut pas être de mesure positive, puisque tout ensemble de mesure positive contient un sous-ensemble non mesurable, et un tel sous-ensemble E_1 de E serait encore de puissance $\aleph_1$, donc, d'après l'hypothèse L, un complémentaire analytique, ce qui est impossible. L'ensemble E est donc de mesure nulle.

Supposons maintenant que l'ensemble E n'est pas toujours de 1^re catégorie. Comme on sait, tout ensemble qui n'est pas toujours de 1^re catégorie contient un sous-ensemble qui ne jouit pas de la propriété de Baire (au sens restreint).

Soit E_1 un tel sous-ensemble de E: d'après l'hypothèse L c'est encore un complémentaire analytique, ce qui est impossible, tout complémentaire analytique jouissant de la propriété de Baire (au sens restreint).

Notre assertion est ainsi démontrée complètement.

II. *Il résulte de l'hypothèse L la propriété **P** suivante du nombre cardinal $\aleph_2$:*

P. *Tout ensemble M de puissance $\aleph_2$ contient une suite dénombrable de sous-ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$, telle que deux éléments distincts quelconques p et q de M sont toujours séparables au moyen de deux ensembles de cette suite* (c'est-à-dire qu'il existe deux ensembles disjoints de cette suite, dont l'un contient p et l'autre q).

En effet, comme j'ai démontré plus haut, il résulte de l'hypothèse L que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ et, comme j'ai démontré ailleurs [1]), l'inégalité $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ équivaut à la proposition ***P***.

3. Autres hypothèses de M. Lusin.

La certitude de la proposition L paraît à M. Lusin hors de doute. Or, il a énoncé encore (l. c.) une autre proposition L_1 dont la vérité lui paraît (pour le moment) seulement *probable.* C'est la proposition:

L_1. *La somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B est un ensemble projectif de classe $\leqslant 2$.*

Il est ici à remarquer que la proposition L_1 entraîne aussi la formule (1) (la famille de tous les ensembles projectifs étant de puissance $2^{\aleph_0}$). La proposition L_1 est donc aussi incompatible avec l'hypothèse du continu. Or, *sans admettre l'hypothèse du continu nous ne savons pas démontrer qu'il existe une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B qui ne soit pas un ensemble $PC(A)$* (projection d'un complémentaire analytique), donc qui ne soit pas un ensemble projectif de classe $\leqslant 2$. En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ nous savons démontrer l'existence d'un tel ensemble.

M. Lusin exprime encore (l. c.) l'hypothèse (probable) que toute somme d'une suite transfinie du type Ω définie effectivement d'ensembles mesurables B est un ensemble qui est à la fois $PC(A)$ et $CPC(A)$.

Or, il est ici à remarquer qu'*on peut définir effectivement une suite transfinie du type Ω d'ensembles (linéaires) analytiques dont la somme est un ensemble $PC(A)$ qui n'est pas un $CPC(A)$.*

En effet, on peut définir effectivement un crible normal universel à 4 dimensions U, en modifiant un peu la construction que j'ai donné pour un pareil crible à 3 dimensions [2]).

[1]) C. R. Soc. Sc. Varsovie Cl. III, XXVII (1934), p. 128 (note du 1 XII. 1934).
[2]) *Fund. Math.* t. XVII, p. 1.

Le crible U jouit de cette propriété que, quel que soit le crible normal C à 3 dimensions, il existe un nombre réel a, tel que l'ensemble de tous les points (a, y, z, t) de l'espace à 4 dimensions qui appartiennent à U est le crible C.

Soit E l'ensemble analytique situé dans l'espace à 3 dimensions et criblé au moyen du crible U. On voit sans peine que E est un ensemble analytique universel à 3 dimensions, c'est-à-dire que, quel que soit l'ensemble analytique plan H, il existe un nombre réel a, tel que l'intersection de l'ensemble E par le plan $x = a$ est l'ensemble H.

Soit CE le complémentaire de E par rapport à l'espace à 3 dimensions: ce sera évidemment un complémentaire analytique universel à 3 dimensions. Désignons par

$$(2) \qquad CE = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha + \ldots \qquad (\alpha < \Omega).$$

le développement de CE en série de constituantes déterminées par le crible U [1]).

La projection PCE de l'ensemble CE sur le plan XOY est évidemment un ensemble $PC(A)$ universel plan, c'est-à-dire que les intersections de l'ensemble PCE par les droites $x = a$ donnent tous les ensembles $PC(A)$ linéaires. Il en résulte, comme on sait, que l'intersection de l'ensemble PCE par la droite $D\,(x = y)$ est un ensemble $PC(A)$ qui n'est pas un $CPC(A)$ [2]).

Or, d'après (2) nous trouvons:

$$(3) \quad D \cdot PC(E) = D \cdot PE_0 + D \cdot PE_1 + \ldots + D \cdot PE_\omega + \ldots + D \cdot PE_\alpha + \ldots \quad (\alpha < \Omega).$$

Les ensembles $D \cdot PE_\alpha$ $(\alpha < \Omega)$, en tant que projections des ensembles mesurables B, sont des ensembles analytiques. La formule (3) fournit donc un développement de l'ensemble PCE en une série transfinie (du type Ω) effectivement définie d'ensembles analytiques. Notre assertion est ainsi démontrée.

[1]) Cf. N. Lusin, *Fund. Math.* t. XVII, p. 5.
[2]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 290 et W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIV, p. 82—83.