deren Elemente durch die Folgen $\mathfrak{K} = \{K_i^n\}$ *gemäß die Bedingungen* 1), 2), 3), 4) *mit* $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_r$ *gegeben sind.*

Für $n \neq 1$ *kann* $\mathfrak{B}$ *dargestellt werden als*

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}^n}{\mathfrak{R}^n_A}\,\mathfrak{A}^{n-1}_R.$$

Dabei ist $\mathfrak{R}^n_A$ *die größte Untergruppe von* $\mathfrak{R}^n$, *deren Elemente in* A *liegen,* $\mathfrak{A}^{n-1}_R$ *die größte Untergruppe von* $\mathfrak{A}^{n-1}$, *deren Elemente in* R *beranden* [9]).

Der Beweis von (2) ist dem von (1) fast wörtlich gleich.

[9]) Diese Ausnahmestellung von $n = 1$ kommt daher, daß nur 0-dimensionale Zykel Komponenten haben können, die (vgl. [4])) keine Zykel sind. Dagegen gilt der Satz für $n = 0$, wobei für $\mathfrak{A}^{-1}$ die Einheitsgruppe einzusetzen ist. Der Beweis liegt auf der Hand.

Sur les ensembles analytiques nuls.

Par

N. Lusin (Moscou).

1. Les ensembles analytiques nuls. Un ensemble est dit *nul*, s'il est dépourvu d'éléments. Les ensembles analytiques nuls sont définis au moyen de cribles rectilignes C qui sont coupés par toute droite parallèle à l'axe $0Y$ en un ensemble bien ordonné conformément à la direction positive de $0Y$.

Comme un ensemble analytique nul est un ensemble mesurable B, son complémentaire $(-\infty, +\infty)$ est décomposé en un nombre dénombrable (ou fini) de constituantes mesurables B

$$(1) \qquad (-\infty, +\infty) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_\alpha + \dots / \beta.$$

Le plus petit des indices β tels que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{\beta+1}, \dots / \Omega$ sont nulles est dit *degré* du crible C définissant un ensemble analytique nul. Si le degré β du crible considéré C est de première espèce, $\beta = \beta^* + 1$, la constituante $\mathcal{E}_{\beta^*}$ n'est pas nulle, $\mathcal{E}_{\beta^*} \neq 0$; elle est dite *constituante supérieure.* Si le degré β est de seconde espèce, il n'y a aucune constituante supérieure dans le développement (1).

2. Les cribles bien ordonnés. Parmi les cribles rectilignes C définissant les ensembles analytiques nuls, les plus simples sont les cribles Γ dits *bien ordonnés.*

Par définition même, est bien ordonné tout crible rectiligne Γ dont la projection orthogonale sur l'axe $0Y$ est bien ordonnée. Nous nous bornons ici à considérer les cribles rectilignes dont les éléments sont des ensembles de classe 0, ou bien, simplement, sont des portions, pris en un nombre dénombrable (ou fini) et situés sur des droites parallèles à l'axe $0X$.

Désignons par G la projection orthogonale du crible Γ sur l'axe $0Y$ et par γ un nombre fini ou transfini qui correspond à l'ensemble bien ordonné G. Nous dirons que γ est le *type* du crible bien ordonné Γ.

Il est clair que

(2) $$\beta \leqslant \gamma + 1$$

et que, parmi les cribles Γ bien ordonnés de type γ, il y en a effectivement dont le degré β est précisément égal à $\gamma+1$. Pour le voir, il suffit de prendre un crible Γ de type γ formé d'éléments identiques, excepté leur distance de l'axe $0X$.

Considérons maintenant les cribles bien ordonnés Γ de type donné γ dont le degré β atteint effectivement son maximum $\gamma+1$, $\beta=\gamma+1$. Dans ce cas la constituante supérieure existe réellement et coïncide avec $\mathcal{E}_\gamma$, $\mathcal{E}_\gamma \neq 0$.

Cet ensemble $\mathcal{E}_\gamma$ dépend évidemment du crible considéré Γ et est sûrement mesurable B. Il importe maintenant de déterminer précisément sa nature possible.

3. Les cribles dérivés. Tout d'abord, nous nous plaçons sur le terrain général et nous prenons un crible rectiligne C définissant un ensemble analytique quelconque, mesurable B ou non. Le complémentaire $\mathcal{E}$ de l'ensemble analytique E est décomposé complètement en ses constituantes, toutes mesurables B,

(3) $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots/\Omega.$$

Pour examiner la nature de la constituante $\mathcal{E}_\alpha$, nous formons la suite des *cribles dérivés* successifs $C^{(\alpha)}$ provenant du crible donné C:

(4) $$C \equiv C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots, C^{(\alpha)}, \ldots/\Omega.$$

Nous rappelons ici qu'on obtient un crible dérivé $C^{(\alpha)}$, *si α est de première espèce*, $\alpha=\alpha^*+1$, en enlevant de chacun des éléments du crible précédent, déjà défini, $C^{(\alpha^*)}$, tout point dont l'abscisse n'appartient à aucune des projections sur l'axe $0X$ des éléments de $C^{(\alpha^*)}$ situés *au-dessus* de l'élément considéré de $C^{(\alpha^*)}$. Et, *si α est de seconde espèce*, on obtient le crible dérivé $C^{(\alpha)}$ en regardant comme éléments de $C^{(\alpha)}$ les parties communes aux éléments correspondants des cribles $C^{(\alpha')}$, $\alpha'<\alpha$, déjà définis.

Ceci étant, prenons un point irrationnel x quelconque dans l'axe $0X$ et désignons par P_x une droite menée par x et parallèle à l'axe $0Y$.

D'après la définition même du crible dérivé $C^{(\alpha)}$, il est clair que la droite P_x ne coupe pas le crible $C^{(\alpha)}$ dans le cas et dans ce cas seul où le point x appartient à l'ensemble-somme

(5) $$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_{\alpha'} + \ldots/\alpha,$$

α étant un nombre quelconque, fini ou transfini, et $\alpha'<\alpha$.

Donc, *l'ensemble-somme $\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\ldots/\alpha$ est identique au complémentaire de la projection sur l'axe $0X$ du crible $C^{(\alpha)}$.*

4. La quatrième inégalité de M. Sierpiński. Le problème qui nous occupe consiste à reconnaître la nature de la constituante $\mathcal{E}_\alpha$. Or, d'après ce qui précède, il est clair qu'évaluer la nature de $\mathcal{E}_\alpha$, c'est apprécier celle de l'ensemble-somme $\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots+\mathcal{E}_{\alpha'}+\ldots/\alpha$ et, en fin de compte, c'est déterminer la nature des éléments du crible dérivé $C^{(\alpha)}$.

Le problème que nous nous proposons a reçu depuis longtemps de M. Sierpiński une solution presque complète [1]): tel est le sens même de ses importantes *quatre inégalités.* Il est cependant nécessaire de faire observer que ces inégalités ne sont applicables qu'aux *constituantes apparentes:* dans le cas des *constituantes réelles* on ne sait rien.

L'ensemble des trois premières inégalités de M. Sierpiński nous donne une base solide pour la recherche de la *borne inférieure* de la classe de la constituante apparente $\mathcal{E}_\alpha$, tandis que la quatrième inégalité de M. Sierpiński nous donne, et ceci d'une manière directe, la *borne supérieure* de cette classe.

Pour le moment, nous nous contenterons d'étendre la quatrième inégalité de M. Sierpiński aux constituantes réelles.

Il est cependant nécessaire de faire quelques remarques préliminaires pour éclaircir la forme symbolique que j'ai adoptée pour cette inégalité.

Nous prenons comme base du raisonnement l'ensemble des points *irrationnels* en enlevant de l'axe $0X$ les points rationnels. C'est le *domaine fondamental.* L'ensemble des points irrationnels compris dans un intervalle quelconque (a, b) aux extrémités rationnelles est dit *portion* du domaine fondamental.

[1]) Voir ma Communication faite au IXe Congrès International des Mathématiciens (Zurich 1932), *Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques*, parue dans les *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, Série II, Vol. II (1933—XI), p. 276.

Nous considérons les classes de M. Ch. de la Vallée Poussin

$$K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots,\ K_\omega, \ldots,\ K_\alpha, \ldots / \Omega. \tag{6}$$

La classe initiale K_0 de cette classification est formée des ensembles E qui sont des sommes de portions, *ainsi que leurs complémentaires* CE. L'opération fondamentale qui sert à définir les classes successives de cette classification est l'opération *lim* du passage à la limite. Chaque classe K_α de cette classification contient des ensembles de *trois* espèces. D'abord, les ensembles dits *accessibles inférieurement de classe* α*:* ce sont les sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α; nous les désignons par *Inf.* α. Puis, les ensembles dits *éléments de classe* α; ce sont des ensembles inaccessibles inférieurement et qui sont en même temps des parties communes à une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α; nous les désignons par *él.* α. Enfin, les ensembles restants de classe α dits *inaccessibles des deux côtés de classe* α; nous les désignons par *Inac.* α.

Ce sont les *éléments* qui jouent le rôle principal dans la classification de M. Ch. de la Vallée Poussin: chaque ensemble *Inf.* α est une somme d'une infinité dénombrable d'éléments de classes $<\alpha$, et chaque ensemble *Inac.* α est une somme d'une infinité dénombrable d'éléments de classes $\leqslant\alpha$, les éléments des deux sommes n'ayant aucun point commun deux à deux.

Faisons maintenant une convention. Si l'ensemble quelconque E est d'une nature inconnue, mais si nous savons que E est ou bien de classe $<\alpha$, ou bien un *Inf.* α, nous écrirons

$$E \leqslant \mathit{Inf.}\ \alpha.$$

De même, si E est de classe $<\alpha$ ou bien un ensemble bilatéral [1]) de classe α ou bien un *él.* α, nous écrirons

$$E \leqslant \mathit{él.}\ \alpha.$$

Enfin, si nous savons simplement que E est de classe $\leqslant\alpha$, nous écrirons

$$\mathit{cl.}\ E \leqslant \alpha.$$

[1]) On appelle *bilatéral* un ensemble de classe α qui est à la fois un *Inf.* α et une partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles de classe $<\alpha$. Les ensembles bilatéraux existent seulement dans les classes K_α où α est de *seconde espèce*.

Ceci rappelé, nous passons maintenant à la quatrième inégalité de M. Sierpiński que nous pouvons écrire sous la forme symbolique

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \textit{tout élément du crible } C^{(\omega\alpha)} \leqslant \textit{él.}\,(2\alpha) \\ \textit{tout élément du crible } C^{(\omega\alpha+n)} \leqslant \textit{Inf.}\,(2\alpha+1), \quad n \geqslant 1 \ \text{(fini)}. \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après l'hypothèse posée, les éléments du crible initial $C^{(1)}$ sont des ensembles de classe 0. Il en résulte que les éléments des cribles dérivés $C^{(n)}$, n étant un entier positif (fini), sont: *ou bien* des ensembles de classe 0 *ou bien* des ensembles de classe 1 accessibles inférieurement, ce que nous écrivons sous la forme de l'inégalité symbolique $\leqslant$ *Inf.* 1. Ceci prouve que la quatrième inégalité de M. Sierpiński est satisfaite pour $\alpha = 0$.

Supposons donc que l'inégalité (IV) est vérifiée pour tous les nombres α' inférieurs à α et montrons ensuite que cette inégalité est encore vraie pour le nombre α lui-même.

Il y a lieu de distinguer deux cas:

Premier cas: le nombre α est de *seconde espèce*. Dans ce cas, nous avons $\alpha = \lim \alpha_k$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \ldots$ Comme l'inégalité (IV) est supposée vraie pour le crible $C^{(\alpha_k)}$, en écrivant le nombre α_k sous la forme $\alpha_k = \omega\,\bar{\alpha}_k + \nu_k$, où ν_k est un nombre fini, $\nu_k \geqslant 0$, nous avons:

$$\text{les éléments du crible } C^{(\alpha_k)} \leqslant \textit{él.}\ (2\bar{\alpha}_k), \qquad \text{si } \nu_k = 0.$$
$$\text{les éléments du crible } C^{(\alpha_k)} \leqslant \textit{Inf.}\ (2\bar{\alpha}_k + 1), \quad \text{si } \nu_k > 0.$$

D'autre part, la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ est croissante. Il en résulte que les nombres $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k, \ldots$ forment eux-mêmes une suite croissante ou bien stationnaire. D'où on conclut que le nombre $\bar{\alpha}$, limite de la suite $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$, satisfait à l'égalité

$$\alpha = \omega\,\bar{\alpha}. \tag{7}$$

Or, les éléments du crible $C^{(\alpha)}$ sont manifestement les parties communes aux éléments des cribles précédents $C^{(\alpha_k)}$. Ceci nous amène à l'inégalité symbolique désirée

$$\text{les éléments du crible } C^{(\alpha)} \leqslant \textit{él.}\,(2\bar{\alpha})$$

où α vérifie l'égalité (7).

Deuxième cas: le nombre α est de *première espèce.* Dans ce cas nous avons

$$\alpha = \omega\bar{\alpha} + n$$

où n est un entier positif. Comme $\omega\bar{\alpha} < \alpha$, nous avons, d'après l'inégalité (IV), l'inégalité symbolique:

$$\text{les éléments du crible } C^{(\omega\bar{\alpha})} \leqslant \acute{e}l.\,(2\bar{\alpha}).$$

D'après la définition même du crible $C^{(\alpha)}$ pour l'exposant α de première espèce, nous en concluons immédiatement que les inégalités symboliques successives sont vérifiées:

$$\begin{array}{ll}\text{les éléments du crible} & C^{(\omega\bar{\alpha}+1)} \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1)\\ \quad " \quad " \quad " \quad " & C^{(\omega\bar{\alpha}+2)} \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1)\\ \quad " \quad " \quad " \quad " & C^{(\omega\bar{\alpha}+3)} \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Nous obtenons donc finalement

$$\text{les éléments du crible } C^{(\alpha)} \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1)$$

où $\alpha = \omega\bar{\alpha} + n$, $n \geqslant 1$ (fini),

c. q. f. d.

5. La première évaluation de la constituante supérieure. La quatrième inégalité de M. Sierpiński nous permet de faire la première évaluation de la constituante supérieure.

En effet, d'après l'inégalité (IV), nous sommes amenés à conclure que nous avons, pour la projection du crible $C^{(\omega\bar{\alpha}+\nu)}$, $\nu \geqslant 0$ (fini), l'inégalité *unique:*

(8) $$\textit{projection de } C^{(\omega\bar{\alpha}+\nu)} \textit{ sur } 0X \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1)$$

quel que soit le nombre α, fini ou transfini, et le nombre entier $\nu \geqslant 0$ (fini).

Or, nous avons vu que l'ensemble-somme $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots/\alpha$ est identique au complémentaire de la projection orthogonale du crible $C^{(\alpha)}$ sur l'axe $0X$. On en conclut immédiatement que nous avons les inégalités simultanées:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots/\alpha \leqslant \acute{e}l.\,(2\bar{\alpha}+1)$$

et

$$E + \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_{\alpha+1} + \ldots/\Omega \leqslant Inf.\,(2\bar{\alpha}+1).$$

Nous obtenons donc finalement

(9) $$\begin{cases} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots/\alpha \leqslant \acute{e}l.\,(2\bar{\alpha}+1)\\ cl.\ \mathcal{E}_\alpha \leqslant 2\bar{\alpha}+1\end{cases}$$

où $\alpha = \omega\bar{\alpha} + \nu$, $\nu \geqslant 0$ (fini).

En particulier, si $\gamma = \omega\bar{\gamma} + \nu$, $\nu \geqslant 0$ (fini), nous avons

(10) $$cl.\ \mathcal{E}_\gamma \leqslant 2\bar{\gamma}+1$$

C'est l'évaluation désirée.

6. La notation des nombres transfinis. On sait que, si α et β sont des nombres transfinis quelconques soumis à la seule condition $\beta < \alpha$, il existe un nombre transfini (ou fini) γ tel que

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Nous pouvons convenir d'écrire cette égalité

(11) $$\gamma = \alpha - \beta.$$

C'est une simple *notation commode.*

Il est cependant nécessaire de prévenir le lecteur que la notation que nous adoptons maintenant s'oppose à la notation classique, d'après laquelle le nombre immédiatement précédant un nombre transfini donné α de première espèce est noté

$$\alpha - 1$$

tandis que, avec la notation adoptée, nous avons l'égalité

$$\alpha = \alpha - 1$$

quel que soit le nombre α *transfini.* Il paraît incontestable que la notation classique $\alpha - 1$ du précédent immédiat d'un α de première espèce est due à une illusion d'ordre psychologique plutôt qu'à des motifs théoriques.

Passons maintenant à d'autres notations des nombres transfinis.

On sait que tout nombre *tranfini* α peut être écrit sous la forme

$$\alpha = \omega\bar{\alpha} + \nu$$

où ν est un nombre entier (fini), $\nu \geqslant 0$.

Nous convenons d'écrire

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega}, \tag{12}$$

cette notation ayant lieu dans le cas et dans ce cas seul où $\alpha \geqslant \omega$.

De même, on sait que tout nombre *transfini* α peut être écrit sous la forme

$$\alpha = \omega^{\bar{\alpha}} + \omega^{\bar{\alpha}_1} + \omega^{\bar{\alpha}_2} + \ldots + \omega^{\bar{\alpha}_k},$$

où $\bar{\alpha} \geqslant \bar{\alpha}_1 \geqslant \bar{\alpha}_2 \geqslant \ldots > \bar{\alpha}_k$, k étant un entier positif, $k \geqslant 1$ (fini).

Nous pouvons convenir d'écrire

$$\bar{\alpha} = \log_\omega \alpha$$

ou simplement

$$\bar{\alpha} = \log \alpha. \tag{13}$$

On voit bien que, avec cette notation, nous avons

$$\log(\alpha\beta) = \log\alpha + \log\beta$$

et que

$$\lim\left(\frac{\alpha}{\omega} - \log\alpha\right) = \Omega,$$

lorsque α croît *transfiniment*, c'est-à-dire si $\lim \alpha = \Omega$.

Cela posé, nous revenons à l'évaluation (10) faite pour la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$. Avec les notations posées, nous pouvons écrire l'inégalité finale (10) du numéro précédent sous la forme

$$cl.\ \mathcal{E}_\gamma \leqslant 2\frac{\gamma}{\omega} + 1. \tag{14}$$

Or, nous allons voir que cette évaluation est encore très grossière et que le terme logarithmique $\log\gamma$ est complètement suffisant. On ne peut ne pas être frappé de ce fait: nous n'avons pas introduit l'hypothèse que le crible considéré C est *bien ordonné*.

7. La seconde évaluation de la constituante supérieure. Considérons un crible bien ordonné Γ quelconque dont les éléments sont des ensembles de classe 0. Soient γ le type du crible Γ et $\mathcal{E}_\gamma$ la constituante supérieure, $\mathcal{E}_\gamma \neq 0$. L'évaluation de la classe de $\mathcal{E}_\gamma$ est basée sur les considérations suivantes:

Lemme I. *Si* $\gamma = \omega^{\bar{\gamma}}$, *on a* $\mathcal{E}_\gamma \leqslant$ *él.* $\{[2(\log\gamma) - 1] + 1\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Ici la marche du raisonnement par recurrence est la plus naturelle.

La proposition est vraie pour $\bar{\gamma} = 1$. En effet, dans ce cas le crible Γ est de type ω et admet pour éléments les ensembles e_n de classe 0. Il est évident que la constituante supérieure $\mathcal{E}_\omega$ correspondant au crible considéré Γ est *l'ensemble limite complet* des ensembles $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m, \ldots$, c'est-à-dire est un ensemble *él.* (2). On a donc l'inégalité $\mathcal{E}_\omega \leqslant$ *él.* (2).

Supposons la proposition vraie pour tous les nombres $\bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}' < \bar{\gamma}$, et montrons sa vérité pour la nombre $\bar{\gamma}$ lui-même.

Il y a lieu de distinguer deux cas:

P r e m i e r c a s: $\bar{\gamma}$ est de *première espèce*: $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^* + 1$. Dans ce cas, le crible bien ordonné Γ, comme étant de type $\omega^{\bar{\gamma}^*}\cdot\omega$, peut être partagé en une infinité de cribles bien ordonnés partiels $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m, \ldots$, chacun de type $\omega^{\bar{\gamma}^*}$, de manière que le crible Γ_{m+1} soit situé *au-dessus* du crible précédent Γ_m.

Cela posé, désignons par $\mathcal{E}^{(m)}$ la constituante supérieure du crible partiel Γ_m. D'après l'hypothèse faite, nous avons

$$\mathcal{E}^{(m)} \leqslant \text{él.}\ [2\bar{\gamma}^* - 1) + 1]. \tag{15}$$

Désignons par H l'ensemble limite complet des ensembles $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \ldots, \mathcal{E}^{(m)}, \ldots$. Si x est un point de H, x appartient à une infinité d'ensembles $\mathcal{E}^{(m)}$. Donc, la perpendiculaire P_x coupe réellement une infinité de cribles Γ_m et chacun d'eux est coupé en un ensemble bien ordonné de type $\omega^{\bar{\gamma}^*}$. Donc, P_x coupe le crible donné Γ en un ensemble bien ordonné de type $\omega^{\bar{\gamma}^*}\cdot\omega = \omega^{\gamma}$. Nous en concluons que x appartient à la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$ de Γ.

Si x n'appartient pas à H, la perpendiculaire P_x coupe au plus un nombre fini de cribles partiels Γ_m de manière que chacun d'eux soit coupé en un ensemble de type $\omega^{\bar{\gamma}^*}$. Il s'en suit que le crible donné Γ est coupé par P_x en un ensemble bien ordonné de type sûrement inférieur à γ, $\gamma = \omega^{\bar{\gamma}^*}\cdot\omega$. Donc, le point x n'appartient pas à la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$ du crible donné Γ.

On en conclut que l'ensemble H est identique à $\mathcal{E}_\gamma$.

Or, l'ensemble H est l'ensemble limite complet des ensembles $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \ldots, \mathcal{E}^{(m)}, \ldots$, dont chacun satisfait à l'inégalité (15). Il 'sen suit que l'ensemble limite complet des ensembles $\mathcal{E}^{(m)}$ doit être écrit sous la forme $\leqslant \acute{e}l.\,[(2\bar{\gamma}^{*}-1)+3]$.

Nous sommes ainsi amenés à conclure que l'ensemble H peut être écrit sous la forme

$$H \leqslant \acute{e}l.\,\{[2(\log\gamma)-1]+1\}$$

et que nous avons finalement

$$\mathcal{E}_{\gamma} \leqslant \acute{e}l.\,\{[2(\log\gamma)-1]+1\}. \tag{16}$$

D e u x i è m e c a s: $\bar{\gamma}$ est de *seconde espèce:* $\bar{\gamma}=\lim\bar{\gamma}_m$, où $\bar{\gamma}_1<\bar{\gamma}_2<\ldots<\bar{\gamma}_m<\ldots$. Dans ce cas, le crible bien ordonné Γ, comme étant de type $\gamma=\omega^{\bar{\gamma}}=\lim\omega^{\bar{\gamma}_m}$, peut être partagé en une infinité de cribles partiels bien ordonnés $\Gamma_1, \Gamma_2,\ldots, \Gamma_m,\ldots$ de types $\gamma_1=\omega^{\bar{\gamma}_1}$, $\gamma_2=\omega^{\bar{\gamma}_2},\ldots$, $\gamma_m=\omega^{\bar{\gamma}_m},\ldots$ respectivement, et ceci de manière que le crible Γ_{m+1} soit situé *au-dessus* du crible précédent Γ_m.

Cela posé, désignons par $\mathcal{E}^{(m)}$ la constituante supérieure du crible partiel Γ_m. D'après l'hypothèse faite, nous avons

$$\mathcal{E}^{(m)} \leqslant \acute{e}l.\,[(2\bar{\gamma}_m-1)+1]. \tag{17}$$

Ici $m=1,2,3,\ldots$

Désignons par H l'ensemble limite complet des ensembles $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)},\ldots, \mathcal{E}^{(m)},\ldots$

Les mêmes considérations que dans le cas précédent nous montrent que la constituante supérieure $\mathcal{E}_{\gamma}$ du crible donné Γ est l'ensemble limite complet H des ensembles $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)},\ldots, \mathcal{E}^{(m)},\ldots$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}_{\nu}=H.$$

Or, l'ensemble limite complet des ensembles $\mathcal{E}^{(m)}$, comme satisfaisant à l'inégalité (17), doit être nécessairement un $\acute{e}l.\,[(2\bar{\gamma}-1)+1]$.

Il en résulte que

$$\mathcal{E}_{\gamma} \leqslant \acute{e}l.\,\{[2(\log\gamma)-1]+1\}, \tag{18}$$

c. q. f. d.

Lemme II. *Quel que soit le nombre transfini γ, on a*

$$\mathcal{E}_{\gamma} \leqslant \acute{e}l.\,\{[2(\log\gamma)-1]+1\}.$$

D é m o n s t r a t i o n. On sait que tout nombre *transfini* γ peut être écrit sous la forme

$$\gamma=\omega^{\bar{\gamma}}+\omega^{\bar{\gamma}_1}+\omega^{\bar{\gamma}_2}+\ldots+\omega^{\bar{\gamma}_k}$$

où $\bar{\gamma}\geqslant\bar{\gamma}_1\geqslant\bar{\gamma}_2\geqslant\ldots\geqslant\bar{\gamma}_k$, k étant un entier positif (fini).

Ceci étant, divisons le crible bien ordonné considéré Γ en $k+1$ cribles partiels $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2,\ldots, \Gamma_k$ ayant pour types les nombres $\omega^{\bar{\gamma}}, \omega^{\bar{\gamma}_1}, \omega^{\bar{\gamma}_2},\ldots, \omega^{\bar{\gamma}_k}$ respectivement, et désignons leurs constituantes supérieures respectives par $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)},\ldots, \mathcal{E}^{(k)}$.

Il est clair que la constituante supérieure $\mathcal{E}_{\gamma}$ du crible donné Γ est la partie commune aux ensembles $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)},\ldots, \mathcal{E}^{(k)}$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}_{\gamma}=\mathcal{E}^{(0)}\times\mathcal{E}^{(1)}\times\mathcal{E}^{(2)}\times\ldots\times\mathcal{E}^{(k)}.$$

Comme

$$\mathcal{E}^{(i)} \leqslant \acute{e}l.\,[(2\cdot\gamma_i-1)+1] \qquad (i=0,1,2,\ldots,k),$$

il est manifeste que

$$\mathcal{E}_{\gamma} \leqslant \acute{e}l.\,\{[2(\log\gamma)-1]+1\}, \tag{19}$$

c. q. f. d.

Lemme III. *Tout ensemble $\mathcal{E}$ mesurable B et tel que*

$$\mathcal{E} \leqslant \acute{e}l.\,[(2\gamma-1)+1]$$

peut être considéré comme la constituante supérieure $\mathcal{E}_{\gamma}$ d'un crible bien ordonné Γ de type transfini ω_{γ}.

D é m o n s t r a t i o n. La proposition est vraie pour $\gamma=1$. En effet, il est évident que quel que soit un ensemble donné $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\leqslant\acute{e}l.\,(2)$, $\mathcal{E}$ peut être considéré comme la constituante supérieure d'un crible bien ordonné Γ convenablement choisi de type ω, ayant pour éléments des ensembles de classe 0.

Supposons donc la proposition vraie pour tous les nombres γ' inférieures à un nombre donné γ, et démontrons-la pour le nombre γ lui-même.

Nous avons deux cas à considérer.

P r e m i e r c a s. γ est de *première espèce:* $\gamma=\gamma^{*}+1$. Dans ce cas, l'ensemble donné $\mathcal{E}$ est l'ensemble limite complet d'une suite infinie d'éléments

$$\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)},\ldots, \mathcal{E}^{(m)},\ldots$$

de classes *rigoureusement* inférieures à $(2\gamma-1)$ [1]. Ici nous avons

$$2\gamma-1=(2\gamma^{*}+2)-1.$$

[2]) Voir mes *Leçons sur les ensembles analytiques*, p. 80.

Or, d'après l'hypothèse admise, chacun de ces ensembles $\mathcal{E}^{(m)}$ est la constituante supérieure d'un crible Γ_m bien ordonné de type $\leqslant \omega^{\gamma^*}$. Nous pouvons supposer ces cribles Γ_m choisis de manière que le crible Γ_{m+1} soit situé *au-dessus* du crible Γ_m précédent, quel que soit l'entier positif m.

Désignons par Γ la réunion des cribles Γ_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Il est clair que Γ est un crible bien ordonné de type ω^γ et que l'ensemble donné $\mathcal{E}$ est la constituante supérieure de Γ.

Deuxième cas: γ est de *seconde espèce*. Dans ce cas, l'ensemble donné $\mathcal{E}$ est l'ensemble limite complet d'une suite infinie d'éléments

$$\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \ldots, \mathcal{E}^{(m)}, \ldots$$

de classes *rigoureusement* inférieures à γ [1]). Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \ldots$ les classes respectives de ces éléments; nous pouvons toujours supposer que $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \ldots$.

Cela posé, désignons par Γ_m un crible bien ordonné de type ω^{γ_m} dont l'élément $\mathcal{E}^{(m)}$ est la constituante supérieure. Nous pouvons supposer ces cribles Γ_m choisis de la manière précédemment indiquée: le crible Γ_{m+1} est au-dessus du crible Γ_m.

La réunion Γ des cribles Γ_m est un crible bien ordonné de type ω^γ, et on voit bien que l'ensemble donné $\mathcal{E}$ est la constituante supérieure de Γ, c. q. f. d.

Nous pouvons maintenant réunir les trois lemmes établis de la manière suivante:

Théorème. *Tout crible Γ bien ordonné de type γ possède la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$ vérifiant l'inégalité symbolique*

$$\mathcal{E}_\gamma \leqslant \acute{e}l. \{[2(\log\gamma) - 1] + 1\};$$

réciproquement, tout ensemble $\mathcal{E}$ mesurable B vérifiant l'inégalité $\mathcal{E} \leqslant \acute{e}l. \{[2(\log\gamma) - 1] + 1\}$ est la constituante supérieure d'un crible Γ bien ordonné de type γ.

8. L'application à l'étude des constituantes d'ensembles analytiques non mesurables B. Les résultats acquis dans le numéro précédent sur les ensembles analytiques *nuls* nous fournissent le moyen de pénétrer de plus près dans la nature de la succession des constituantes dans le cas d'un ensemble analytique *non mesurable B.*

Soit C un crible rectiligne définissant un ensemble analytique E non mesurable B. Désignons par $\mathcal{E}$ le complémentaire de l'ensemble E, et soit

(A) $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots / \Omega$$

la décomposition de $\mathcal{E}$ en ses constituantes.

Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ est non mesurable B, parmi les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ du dévellopement (A) il y a une infinité non dénombrable de constituantes *non nulles*.

Un problème de haute importance qui peut être posé relativement au dévelloppement (A) est le suivant:

Problème I. *Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toute constituante $\mathcal{E}_\alpha$ du développement* (A) *soit composée d'un et d'un seul point?*

On sait que parmi les problèmes de la théorie des ensembles analytiques ce problème a été regardé comme le plus difficile.

Un autre problème plus souvent signalé comme digne d'intérêt et cependant aussi difficile que le précédent, est le suivant:

Problème II. *Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toute constituante $\mathcal{E}_\alpha$ du développemet* (A) *soit dénombrable (ou finie)?*

Ce problème peut être considéré comme une forme affaiblie du problème I dont l'énoncé est, en effet, plus restrictif.

La problème suivant est d'une forme encore plus affaiblie que le problème II:

Problème III. *Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement* (A) *soient de classes bornées.*

Les difficultés de ce problème sont aussi graves que celles des problèmes I et II, et on sait que l'on n'a pas réussi jusqu'à présent de découvrir ni une loi définissant un tel crible extraordinaire C, ni une preuve d'impossibilité des lois pareilles, tandis que *nous connaissons des lois définissant des cribles C dont les constituantes $\mathcal{E}^\alpha$ ne sont pas de classes bornées.* M. Sierpiński et moi, nous avons examiné les classes des constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ dans certains cas les plus classiques et nous avons constaté:

1° Que les classes constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ *ne sont pas bornées;*

2° Que les classes des $\mathcal{E}_\alpha$ tendent *uniformément* vers Ω, sauf les cas où il y a une infinité non dénombrable de constituantes *nulles;*

3° Que les classes des $\mathcal{E}_\alpha$ tendent vers Ω *en croissant.*

D'ailleurs, dans le cas des constituantes *apparentes*, on peut parfois directement mesurer ces classes: elles sont données par la formule suivante:

$$cl.\ \mathcal{E}_\alpha = 2\frac{\alpha}{\omega} + 1.$$

Or, on peut affaiblir davantage le problème III, en proposant le

Problème IV. *Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ puissent être enfermées respectivement dans des ensembles H_α, $\mathcal{E}_\alpha < H_\alpha$, de classes bornées et sans partie commune?*

Il importe de remarquer que l'existence des ensembles isolateurs H_α de classes bornées ne suppose nullement que les classes des constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ elles-mêmes soient bornées: celles-ci peuvent bien tendre vers Ω.

Il se peut que ce problème est plus attaquable, puisque nous n'instistons en aucune façon sur une détermination *effective* des ensembles isolateurs H_α: nous n'en demandons que l'existence seule. Néanmoins, ce problème présente visiblement les mêmes difficultés que les trois problèmes précédents.

Nous nous bornons ici à démontrer la proposition suivante, qui *met nettement en lumière combien les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ sont dans certains cas serrées l'une contre l'autre:*

Théorème. *Il existe des cribles rectilignes C tels que les constituantes correspondantes $\mathcal{E}_\alpha$ ne peuvent être enfermées dans des ensembles isolateurs H_α de classes bornées.*

Démonstration. Nous commençons par considérer un crible $\widetilde{C}$, dit *universel*, situé dans l'espace $OXYZ$ à trois dimensions et ayant pour éléments les ensembles à deux dimensions de classe 0. Un tel crible $\widetilde{C}$ est coupé par chaque plan $y = y_0$ suivant un crible *rectiligne* C_{y_0} ayant pour éléments des ensembles *linéaires* de classe 0, et il importe de remarquer que tout crible rectiligne C aux éléments de classe 0 peut être obtenu de cette manière.

Soit E un ensemble analytique défini par ce crible universel $\widetilde{C}$ et $\mathcal{E}$ son complémentaire; $\mathcal{E}$ est un ensemble de points à deux dimensions situé dans le plan XOY.

Soit

$$\text{(A')} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots / \Omega$$

le développement du complémentaire $\mathcal{E}$ en une suite des constituantes $\mathcal{E}_\alpha$, toutes mesurables B et à deux dimensions.

Je dis maintenant que ces constituantes planes $\mathcal{E}_\alpha$ ne peuvent être enfermées respectivement dans des ensembles H_α sans partie commune et tous de classes inférieures à β, β étant un nombre fixe, fini ou transfini, donné à l'avance.

En effet, prenons un ensemble linéaire quelconque L mesurable B et dont la classe λ, $cl.\, L = \lambda$, est supérieure à β

$$\lambda > \beta.$$

D'après le théorème du n° 7 (p. 120), quel que soit le nombre γ satisfaisant à l'inégalité

$$\text{(20)} \qquad \lambda < [2(\log\gamma) - 1] + 1,$$

il existe un crible rectiligne Γ bien ordonné de type γ et dont la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$ est identique à l'ensemble L:

$$\mathcal{E}_\gamma \equiv L.$$

Or, l'inégalité (20) est sûrement vérifiée, lorsqu'on pose

$$\text{(21)} \qquad \gamma > \omega^\lambda.$$

Donc, pour tout nombre transfini γ qui surpasse ω^λ, il existe un crible rectiligne Γ bien ordonné de type γ et dont la constituante supérieure $\mathcal{E}_\gamma$ coïncide avec L.

Cela posé, prenons un nombre irrationnel y_0 tel que le crible correspondant C_{y_0} soit identique au crible bien ordonné considéré Γ. Il est clair que la section de la constituante $\mathcal{E}_\gamma$ du développement (A) par la droite $y = y_0$, $z = 0$ coïncide avec la constituante supérieure du crible bien ordonné C_{y_0}, $C_{y_0} \equiv \Gamma$, et par suite est identique à l'ensemble L.

Or, si nous désignons par $\mathcal{E}_\alpha^{(y_0)}$ la section de la constituante $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (A′) par la droite $y=y_0$, $z=0$, nous avons l'égalité

$$(-\infty, +\infty) = \mathcal{E}_0^{(y_0)} + \mathcal{E}_1^{(y_0)} + \mathcal{E}_2^{(y_0)} + \ldots + \mathcal{E}_\gamma^{(y_0)},$$

tous les termes $\mathcal{E}_\alpha^{(y_0)}$ étant nuls lorsque α surpasse γ.

D'après cette égalité, il est manifeste que l'ensemble isolateur H_γ, renfermant la constituante $\mathcal{E}_\gamma$ du développement (A′), doit renfermer la section $\mathcal{E}_\gamma^{(y_0)}$. Donc, H_γ contient nécessairement des points des ensembles précédents $\mathcal{E}_0^{(y_0)}$, $\mathcal{E}_1^{(y_0)}$, $\mathcal{E}_2^{(y_0)}, \ldots /\gamma$, puisque la classe de l'ensemble isolateur H_γ est inférieure à β, pendant que la classe de l'ensemble $\mathcal{E}_\gamma^{(y_0)}$, $\mathcal{E}_\gamma^{(y_0)} \equiv L$, est égale à λ, λ étant supérieur à β.

Nous sommes ainsi amenés à une contradiction, ce qui prouve que les constituantes *planes* $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (A′) ne peuvent être respectivement enfermées dans des ensembles isolateurs H_α de classes bornées.

Il ne reste maintenant qu'à obtenir un développement (A) aux constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ *linéaires* et ne se laissant pas enfermer dans des ensembles isolateurs H_α de classes bornées. Or, pour le faire, il suffit de transformer le domaine à deux dimensions $I_{x,y}$ en un domaine I_t *linéaire* au moyen d'une transformation univoque, réciproque et continue dans les deux sens [1])

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \\ \quad \textit{et} \quad t = F(x,y). \end{cases}$$

Il est clair que si nous ajoutons à ces équations l'identité

$$z = z$$

nous obtenons une transformation du domaine $I_{x,y,z}$ à trois dimensions en le domaine plan $I_{t,z}$. On voit bien que la transformée du crible universel C est alors un crible *rectiligne* C situé dans le plan TOZ, aux éléments de classe 0 et dont les constituantes linéaires sont les transformées des constituantes planes correspondantes du développement (A′). Comme la transformation du domaine $I_{x,y}$ en I_t est univoque, réciproque et continue dans les deux sens, il est manifeste que la transformée du développement (A′) est un développement (A) aux constituantes linéaires ayant la propriété énoncée, c. q. f. d.

[1]) Le domaine plan $I_{x,y}$ est le plan XOY dont on a enlevé les points ayant au moins une coordonnée rationnelle; le domaine linéaire I_t est l'ensemble des points irrationnels de l'axe OT.

Nous complétons ce résultat par la définition suivante: une constituante $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (A) est dite *isolée*, s'il existe un ensemble H_α de classe inférieure à la classe de $\mathcal{E}_\alpha$, qui renferme totalement $\mathcal{E}_\alpha$ et qui ne contient aucun point d'une constituante $\mathcal{E}_{\alpha'}$ différente de $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha' \neq \alpha$.

Voici maintenant le dernier problème:

Problème V. *Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ à partir d'un certain rang soient isolées?*

Dans tous les problèmes I—V il s'agit, bien entendu, des cribles C qui définissent un ensemble analytique *non mesurable* B.

9. Problèmes et généralités. Nous allons maintenant reprendre à un point de vue tout-à-fait général les problèmes posés dans le numéro précédent, et tout particulièrement le *problème II*.

Nous avons vu que ce problème consiste à savoir *si l'on peut définir ou non un crible rectiligne C tel que toute constituante $\mathcal{E}_\alpha$ du développement* (A)

$$\text{(A)} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots /\Omega$$

soit au plus dénombrable?

Ce problème a un très grand intérêt théorique qui tient à ce que tout ensemble parfait P contenu dans $\mathcal{E}$ est totalement couvert par une infinité *dénombrable* (et non transfinie) de constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (A), de sorte qu'au moins une de ces constituantes est nécessairement non dénombrable, donc contenant sûrement à son tour un ensemble parfait P_1, $P_1 < P$. Il s'en suit que la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que le complémentaire $\mathcal{E}$ d'un ensemble analytique E ne contienne aucun sous-ensemble parfait, est que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ soient au plus dénombrables.

On sait que la solution de ce problème est encore à attendre. Ici, j'emploie le mot „solution“ au sens habituel et commun, c'est-à-dire comme une combinaison heureuse de procédés algébriques (formels) et de moyens de la logique abstraite permettant *ou bien* d'obtenir une contradiction verbale, *ou bien* de définir ce crible C extraordinaire. Or, on sait que malgré tous les efforts des longues années, on n'a abouti ni à une contradiction formelle, ni à une détermination d'un crible désiré.

Pendant quelques années j'ai regardé le mot „solution" comme n'admettant aucun autre sens que le sens commun indiqué et à cette époque j'ai fort hésité entre la réponse positive et négative au problème posé. Aujourd'hui j'ai compris l'impossibilité de nous borner à ce sens du mot „solution" et la nécessité catégorique de donner à ce mot un autre sens, sans se placer d'ailleurs, à la façon de M. Hilbert, sur le terrain du *non-contradictoire*. Pour le moment, j'omets ici tous les raisonnements, car leur rédaction détaillée me paraît devoir être longue; je n'en voudrais qu'indiquer brièvement mes conclusions personnelles à ce sujet, sans entrer en discussion sur tous les arguments possibles. Néanmoins, je conserve, cela va sans dire, toute la responsabilité de ce qui pourra paraître criticable dans les considérations auxquelles je consacre ces lignes.

Nous prenons comme point de départ les idées de M. J. Drach relatives aux nombres algébriques. On appelle *nombre algébrique* toute racine d'une équation algébrique à coefficients entiers:

$$\text{(B)} \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

M. J. Drach considère un nombre algébrique comme nombre *idéal* et il introduit, pour désigner l'ensemble des nombres idéaux définis par l'équation algébrique (B), la notation

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

C'est ainsi qu'un nombre *rationnel* quelconque est noté (a_0, a_1), et on peut considérer les entiers a_0 et a_1 comme dénominateur et numérateur de ce nombre rationnel.

Mais un fait de haute importance et qui est une des plus belles idées de M. J. Drach est que *les nombres idéaux ne nous sont jamais donnés directement;* nous ne pouvons pas les atteindre effectivement, „toucher" réellement: ils ne sont donnés qu'au moyen de l'équation algébrique (B), donc au moyen d'un symbole de M. J. Drach $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Néanmoins, nous pouvons encore parler, et ceci d'une manière très légitime, d'une *somme*, *différence*, *produit* et *quotient* des nombres idéaux: aucun lecteur ne s'y trompera, car il est évident pour tous qu'en effectuant sur les nombres idéaux les opérations fondamentales: addition et multiplication, nous opérons en réalité toujours sur des nombres entiers, en déduisant de plusieurs symboles $(a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots, a_{n_k}^{(k)})$ de M. J. Drach un symbole unique final $(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

De même, nous appelons *complémentaire analytique idéal* tout complémentaire analytique $\mathcal{E}$ non mesurable B qui ne contient aucun sous-ensemble parfait. Les autres complémentaires analytiques sont appellés *réels*.

Tout comme les nombres idéaux de M. J. Drach sont formellement définis au moyen d'une équation algébrique (B) et décrits par le symbole de M. J. Drach, les complémentaires idéaux peuvent être formellement définis *au moyen d'un complémentaire analytique universel $\widetilde{\mathcal{E}}$ à deux dimensions*. On sait qu'un tel complémentaire $\widetilde{\mathcal{E}}$ peut être déterminé par une construction géométrique directe et très simple.

Le rôle de ce complémentaire universel $\widetilde{\mathcal{E}}$ peut être comparé à celui de l'équation algébrique (B). En effet, $\widetilde{\mathcal{E}}$ étant situé dans le plan XOY, désignons par H_p l'ensemble des abscisses x_0 telles que la droite $x = x_0$ coupe $\widetilde{\mathcal{E}}$ suivant les complémentaires *réels* ayant chacun un sous-ensemble parfait. D'une manière analogue, soit H_d l'ensemble des abscisses x_0 telles que la droite $x = x_0$ coupe $\widetilde{\mathcal{E}}$ suivant les ensembles dénombrables (ou finis). On sait que H_p est un ensemble projectif de type A_2 $(= PCPE)$ et que H_d est aussi un ensemble projectif de type A_3 $(= PCPCPE)$. Il importe de remarquer que les ensembles H_p et H_d sont parfaitement déterminés par deux constructions géométriques fort simples.

Cela posé, désignons par (H_p, H_d) l'ensemble des points de l'axe $0X$ qui n'appartiennent ni à H_p, ni à H_d. Ce sont des *points idéaux* de l'axe $0X$ et on obtient évidemment tous les *complémentaires analytiques idéaux linéaires*, en coupant le complémentaire universel $\widetilde{\mathcal{E}}$ par les droites parallèles à l'axe $0Y$ et menées par les points de (H_p, H_d).

Il n'est cependant pas inutile d'insister ici sur un point. On peut objecter: „Vous avez supprimé dans l'axe $0X$ tous le points de H_p et de H_d. Or, si H_d est le complémentaire de H_p, de l'axe $0X$ sont enlevés sûrement tous les points possibles et par suite il ne reste pas de points idéaux et, avec ceux-ci, de complémentaires idéaux". Cette argumentation, forte en apparence, ne comporte, en réalité, aucun obstacle. En effet, si l'on prend au sérieux que H_d est le complémentaire de H_p, le type même de H_d doît être CA_2 $(= CPCPE)$ et non pas A_3 $(= PCPCPE)$. Or, il n'y a pas de transformations *formelles* de la définition même (construction) de H_d telles que le type de H_d autérieurement déterminé comme A_2 en ait été abaissé ultérieurement à CA_2. Et si l'on craint les transformations *non formelles* de la définition de H_d, on emploie nécessairement *tous* les points possibles de l'axe $0X$ et, parmi eux, les points idéaux; donc, on adopte un *circulus vitiosus sûr.* Pour ma part, je crois qu'on ne peut craindre une contradiction formelle, à tirer ultérieurement de ce que H_d n'est pas le complémentaire de H_p, pas plus que les mathématiciens préoccupés de faire avancer l'Analyse mathématique ne s'inquiètent des menaces de la théorie de M. Hilbert, qui, peut-être, découvrira un jour que l'Analyse mathématique est contradictoire!

Revenons maintenant aux complémentaires analytiques idéaux. De même que dans le cas des nombres idéaux de M. J. Drach, *nous pouvons considérer les complémentaires idéaux comme définis formellement et décrits par le symbole*

$$(H_p, H_d),$$

de sorte que toute opération sur les complémentaires idéaux n'est qu'une opération sur les ensembles H_p et H_d tout-à-fait réels et dont la construction géométrique est très claire, comme combinaison des notions élémentaires telles que: ensemble universel, somme, partie commune, projection et opération du passage au complémentaire.

Il paraît que cette voie n'est pas stérile, puisqu'on y rencontre des problèmes qu'on ne peut pas trouver en faisant des recherches dans les autres directions.

Parmi ces problèmes on a le problème d'un ensemble semi-universel. On appelle *semi-universel* tout ensemble plan $\mathcal{E}$ composé de tous les complémentaires analytiques linéaires *réels*, situés sur les droites $x = C^{te}$ et qui ne contient aucun complémentaire idéal. On démontre que $\mathcal{E}$ est encore un complémentaire analytique plan et entièrement réel; d'ailleurs, un tel $\mathcal{E}$ semi-universel diffère sensiblement d'un complémentaire analytique universel qui contient des complémentaires idéaux.

Mais il y a plus: on rencontre sur cette voie des problèmes et des principes qui peuvent paraître entièrement invraisemblables sur les autres voies.

Tout d'abord, en introduisant les complémentaires idéaux, il est naturel de considérer ce qu'on peut appeler *continuité supérieure* d'une ligne droite et qui présente une analogie sensible avec la continuité habituelle de Cauchy-Dedekind. Or, cette espèce de

continuité nous amène à énoncer deux propositions suivantes, dont la certitude me paraît hors de doute:

Proposition I. *Tout ensemble de points dont la puissance est aleph-un est un complémentaire analytique.*

Proposition II. *Tout ensemble de points formé de points des continuantes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement* (A) *prises au hasard et en un nombre transfini est encore un complémentaire analytique.*

Mais voici une proposition dont la vérité me paraît, pour le moment, seulement *probable:*

La somme d'une infinité transfinie d'ensembles mesurables B numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe est un ensemble projectif de classe $\leqslant 2$. D'ailleurs, si ce numérotage est effectif, la somme est un ensemble projectif de type B_2.

J'ajoute qu'on sait que tout ensemble projectif de type A_2 est somme d'une infinité transfinie d'ensembles mesurables B numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe; mais ce numérotage n'est pas effectif. D'ailleurs on ne connait aucun ensemble projectif de classe $\geqslant 3$ qui soit décomposable en aleph-un ensembles mesurables B, pas plus qu'un ensemble *non projectif* ayant cette propriété.

Il ne reste maintenant que dire un mot sur l'hypothèse du continu. Il semble qu'il y a une difficulté assez grave à parler de l'hypothèse du continu et que la nécessité mathématique de parler *des* hypothèses du continu s'impose manifestement. Et parmi les hypothèses possibles du continu, la première et la plus élémentaire est celle de Cantor:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Nous l'appellerons *hypothèse de Cantor* ou bien *première hypothèse du continu.*

On sait que M. Hilbert a promis de donner, en se mettant sur le terrain du non-contradictoire, la preuve formelle de l'absence de contradiction dans l'hypothèse de Cantor et que M. Sierpiński a examiné soigneusement les conséquences les plus diverses de cette hypothèse dans son important ouvrage „*Hypothèse du continu*". Ce livre si riche en conséquences de l'hypothèse de Cantor, dont les nombreuses sont dues à M. Sierpiński et à son école, ne peut pas être analysé en quelques pages; tous ceux qui s'intéressent à la philosophie du continu ne manqueront pas de le lire et d'y méditer. Cependant à cause de l'importance même de l'ouvrage de M. Sierpiński, il me paraît nécessaire de signaler ce qui me semble un malentendu: l'hypothèse de Cantor n'est pas la seule hypothèse du continu (comme, d'ailleurs, M. Sierpiński l'indique explicitement lui-même), même si l'on fait la convention de se borner à des alephs. La seule preuve de la vérité de l'hypothèse de Cantor consisterait à donner une correspondance univoque et réciproque Z, *effective*, c'est-à-dire décrite d'une manière précise et sans ambiguïté possible, entre les points d'une ligne droite et les nombres transfinis de seconde classe. Cette effectivité aurait un très grand intérêt et une grande importance, puisque, dans ce cas, elle serait une source d'un très grand nombre d'importantes relations arithmétiques, algébriques, geométriques et analytiques. Or, on sait que non seulement nous ne pouvons pas attendre que les progrès de la Science nous amènent à une telle correspondance Z effective, mais que, au contraire, c'est le fait inverse qui est beaucoup plus problable: un jour les ressources de la théorie de M. Hilbert seront *peut-être* si avancées qu'on pourra tenter avec succès une démonstration de la *non-existence* d'aucune correspondance Z effective, bien que l'existence d'une correspondance Z non effective soit non contradictoire.

Or, sans une correspondance effective Z, l'importance de l'hypothèse de Cantor se trouve fort diminuée: c'est la difficulté seule d'une preuve de l'absence de contradiction qui attire l'attention des analystes; hors de cette difficulté la solution de l'hypothèse de Cantor (au sens affirmatif et toujours sans l'effectivité de Z) ne donne rien, sauf, bien entendu, une foule d'exemples les plus paradoxaux. C'est dans ce sens que l'on peut souvent entendre parler d'une *vraie* importance d'*autres* problèmes mathématiques.

Or, il y a dans la bibliographie mathématique des indications sur la possibilité d'autres hypothèses du continu, et parmi celles-ci la plus intéressante est l'hypothèse qui peut être écrite sous la forme

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}.$$

Nous ne chercherons pas à donner le nom de l'auteur qui a conçu le premier la sérieuse possibilité d'une telle hypothèse du continu; pour le moment, nous appellerons cette hypothèse simplement *seconde hypothèse du continu.*

La seconde hypothèse du continu, toute conforme qu'elle est aux problèmes et aux propositions de ce numéro, me paraît exempte de contradiction de la même manière que l'est la première hypothèse du continu, et on peut espèrer que les progrès de la théorie de M. Hilbert donneront un jour la preuve de l'absence de contradiction dans la seconde hypothèse du continu.

Alors, la nécessité s'imposera à nous de *choisir* entre les diverses hypothèses du continu, toutes exemptes de contradiction, et ce choix devra être dicté par l'observation seule *des faits.*

On voit bien combien sont pénétrants les mots de M. Emile Borel d'après lesquels il faut: „distinguer les mathématiques réelles des spéculations *logiques* purement verbales, dans lesquelles on ne se préoccupe que d'une qualité purement négative: l'absence de contradiction“ (Emile Borel, *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*, *Introduction*, II, p. 222).