Stetige Abbildung und höherer Zusammenhang.

Von

L. Vietoris (Innsbruck).

Ich habe in meiner Arbeit „*Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*“ (Math. Ann. 97 (1927), S. 454—472)[1]) begonnen, das Verhalten des höheren Zusammenhanges kompakter Räume bei stetiger Abbildung zu untersuchen, indem ich eine Klasse von stetigen Abbildungen aufgezeigt habe, welche den höheren Zusammenhang ungeändert lassen.

Hier sollen diese Untersuchungen dadurch fortgesetzt werden, daß ich die Änderung des höheren Zusammenhanges bei gewissen für die allgemeine Fragestellung grundlegenden besonderen stetigen Abbildungen untersuche. Dabei beschränke ich mich wieder auf kompakte metrische Räume.

Als Elemente der k-ten Homologiegruppe eines solchen Raumes R sehen wir die Homologieklassen der von mir dort eingeführten Fundamentalfolgen mit gewissen von S. Lefschetz[2]) angebrachten Änderungen an und nennen sie nach P. Alexandroff[3]) Vollzykel.

Wir verstehen demnach das Wort Zykel im Sinn von I[4]).

[1]) Im Folgenden als I angeführt. I ist auszugsweise schon in Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 1008—1013, mitgeteilt.

[2]) *Topology* 1930, S. 330 ff.

[3]) Ann. of Math. 30 (1928), S. 159.

[4]) Die dort S. 456 gegebene Definition des 0-dimensionalen Zykels muß dahin vervollständigt werden, daß jeder 0-dimensionale Komplex $\sum_l x_l p_l^0$ für welchen $\sum_l x_l = 0$, bezw. $\equiv 0$ mod. m ist, ein 0-dimensionaler Zykel ist.

Ein Zykel C heißt ε-homolog auf der abgeschlossenen Menge A, wenn C Rand eines ε-Komplexes ist, dessen Ecken von A Abstände $< \varepsilon$ haben. Unter einem *Vollzykel* der Dimension k auf A verstehen wir eine unendliche Folge von k-dimensionalen Zykeln $\{C_n\}$, deren Kantenlänge mit $\frac{1}{n}$ (gleichmäßig) gegen 0 konvergiert und für welche es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, sodaß für $r > m$, $s > m$ immer $C_r \sim_\varepsilon C_s$ auf A gilt. Ein Vollzykel $\{C_n\}$ auf A heißt auf A homolog Null, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, sodaß $C_n \sim_\varepsilon 0$ auf A gilt, sobald $r > m$ ist. Ferner wird unter $p\{C_n\}$ die Folge $\{p\,C_n\}$ und unter $\{C_n\} + \{D_m\}$ die Folge $\{C_n + D_n\}$ verstanden, wo im folgenden p immer eine nach einem gleichzeitig angegebenen Modul genommene ganze Zahl sein wird; d. h. wir wollen alle Homologien nach irgend einem Modul genommen denken. $\{C_n\}$ heißt $\sim \{D_m\}$, wenn $\{C_n - D_n\} \sim 0$ ist.

Wir wollen eine Folge von l-dimensionalen Komplexen $\{K_n^l\}$, deren Abstände von der abgeschlossenen Menge A und deren Kantenlängen mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergieren, deren Ränder außerdem einen $(l-1)$-dimensionalen Vollzykel auf A bilden, einen *Vollkomplex* $\{K_n^l\}$ auf A nennen. $\{C_n^{l-1}\}$ heißt der Rand von $\{K_n^l\}$[4.1]).

Sind $\{K_n^l\}$ und $\{L_n^l\}$ zwei Vollkomplexe derselben Dimension, dann verstehen wir unter $p\{K_n^l\}$ den Vollkomplex $\{p K_n^l\}$, unter $\{K_n^l\} + \{L_m^l\}$ den Vollkomplex $\{K_n^l + L_n^l\}$. Ihre Ränder sind $p\{R(K_n^l)\}$ und $\{R(K_n^l)\} + \{R(L_m^l)\}$. Für jeden Vollkomplex $\mathfrak{K}$ gilt $R(R(\mathfrak{K})) = 0$. Ferner ist ein Vollzykel auf A dann und nur dann homolog Null auf A, wenn er Rand eines auf A liegenden Vollkomplexes ist.

Nun sei ein kompakter metrischer Raum R durch die eindeutige stetige Abbildung $f(x)$ auf R' abgebildet: $x' = f(x)$.

Unsere Komplexe K sind endliche Punktmengen, in denen gewisse Untermengen als die Seiten herausgehoben sind (I, S. 455). Diese Punktmengen werden mit diesen Untermengen durch $f(x)$ in Punktmengen mit entsprechenden Untermengen abgebildet. Diese Bildmengen fassen wir als Komplexe K' auf, indem wir die Bilder dieser Untermengen als Seiten von K' ansehen. Natürlich müssen wir dabei damit rechnen, daß verschiedenen Punkten in R derselbe Punkt in R' entspricht; d. h. wir müssen in R' singuläre Komplexe

[4.1]) Vgl. P. Alexandroff, l. c S. 169, und R. L. Wilder, Ann. of Math. 35 (1934), S. 878.

zulassen. Damit hat jeder k-dimensionale in R liegende Komplex K einen, möglicherweise singulären, k-dimensionalen Komplex K' in R' als eindeutig gegebenes Bild. Ferner folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Abbildungen unmittelbar, daß jedem Vollzykel in R ein Vollzykel in R' derselben Dimension, jedem Vollkomplex in R ein Vollkomplex derselben Dimension in R' entspricht. Ist ferner $\mathfrak{C}^{l-1} = R(\mathfrak{K}^l)$, dann ist auch $\mathfrak{C}'^{l-1} = R(\mathfrak{K}'^l)$. Ist daher $\mathfrak{C}'^{l-1} \sim 0$ in R, dann ist auch $\mathfrak{C}'^{l-1} \sim 0$ in R'. Ist $\mathfrak{C}^{l-1} \sim \mathfrak{D}^{l-1}$ in R, dann ist $\mathfrak{C}'^{l-1} \sim \mathfrak{D}'^{l-1}$ in R'.

$f(x)$ ordnet also jeder Homologieklasse von R eindeutig eine Homologieklasse derselben Dimension von R' als Bild zu. Dabei bleiben die Gruppenrelationen erhalten. Die Gruppe der k-dimensionalen Vollzykel von R hat also als Bild eine (im allgemeinen mehrstufig) isomorphe Untergruppe der k-ten Homologiegruppe von R'

Ich habe nun in I gezeigt [5]) daß es dann, wenn in R das Gesamturbild jedes Punktes von R' in den Dimensionen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ die Zusammenhangszahl 0 hat, auch umgekehrt zu jedem k-dimensionalen Vollzykel $\mathfrak{Z}'^k$ von R' für $k \leqq n$ einen k-dimensionalen Vollzykel $\mathfrak{C}^k$ von R gibt, dessen Bild $\mathfrak{C}'^k$ homolog mit $\mathfrak{Z}'^k$ in R' ist. Auf diese Weise ist dann auch jeder Homologieklasse von k-dimensionalen Zykeln von R' mindestens eine Homologieklasse von k-dimensionalen Zykeln von R als Urbild zugeordnet. Die Homologiegruppe k-ter Dimension von R' ist dann also ein (im allgemeinen mehrstufig) isomorphes Bild der von R. Ferner habe ich dort gezeigt, daß für $k < n$ eine Homologieklasse $\mathfrak{C}'^k$ von R' dann und nur dann ~ 0 in R' ist, wenn ihre Urbildklasse $\mathfrak{C}^k \sim 0$ in R ist. Für $k < n$ sind die k te Homologiegruppe von R und die von R' mit einander einstufig isomorph.

Wir wollen nun die Frage stellen:

Wie ändern sich diese Sätze, wenn nicht alle Gesamturbilder den oben vorausgesetzten einfachen Zusammenhang haben?

Und zwar liege zunächst der einfachste Fall vor, daß alle Gesamturbilder mit Ausnahme eines einzigen A in den Dimensionen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ die Zusammenhangszahl 0 haben, während A zwar noch in den Dimensionen $0, 1, 2, \ldots, n-2$ die Zusammenhangszahl 0 hat, die $(n-1)$-te Homologiegruppe $\mathfrak{A}^{n-1}$ von A aber beliebig ist.

[5]) Dort wurde dies für die Zusammenhangszahlen mod 2 gezeigt. Für andere ganzzahlige Moduli gilt wörtlich dasselbe mit denselben Beweisen.

Wir behaupten:

(1) *Unter diesen Voraussetzungen ist die n-te Homologiegruppe $\mathfrak{N}'^n$ des Bildraumes R' einstufig isomorph der Gruppe*

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{N}^n}{\mathfrak{N}^n_A} \cdot \mathfrak{A}^{n-1}_R,$$

wo $\mathfrak{N}^n_A$ die Untergruppe von $\mathfrak{N}^n$ aller in A liegenden n-dimensionalen Vollzykel, $\mathfrak{A}^{n-1}_R$ die Untergruppe von $\mathfrak{A}^{n-1}$ aller in R berandenden $(n-1)$-dimensionalen Vollzykel von A ist [6]).

$\mathfrak{B}$ tritt dabei in folgender Weise gegeben auf: Die Elemente werden durch die Folgen $\mathfrak{K} = \{K^n_i\}$ gemäß den vier Bedingungen gegeben:

1) Die Kantenlänge von K^n_i geht mit $\frac{1}{i}$ gegen 0.

2) Die Ränder $R(K^n_i)$ bilden einen Vollzykel in A. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes r und s einen ε-Komplex $K_{r,s}$, dessen Ecken von A einen Abstand $< \varepsilon$ haben und dessen Rand $R(K_{r,s}) = R(K^n_s) - R(K^n_r)$ ist. $K^n_s - K^n_r - K^n_{r,s}$ ist also für hinreichend großes r und s ein ε Zykel.

3) Zu ε gibt es für hinreichend großes r und s, wie immer $K_{r,s}$ gewählt ist, einen ε-Zykel C, dessen Ecken von A Abstände $< \varepsilon$ haben, sodaß $K^n_s - K^n_r - K_{r,s} - C \sim_\varepsilon 0$ in R ist.

4) Zwei solche Folgen $\{K^n_i\}$ und $\{L^n_i\}$ geben dasselbe Gruppenelement, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes i einen ε-Komplex M_i gibt, dessen Ecken von A Abstände $< \varepsilon$ haben, sodaß $R(M_i) = R(L_i) - R(K_i)$ ist und es einen ε-Zykel C_i gibt, dessen Ecken von A ebenfalls Abstände $< \varepsilon$ haben, für welchen $L_i - K_i - M_i - C_i \sim_\varepsilon 0$ in R ist.

Wir wollen nun für $n \geqq 1$ zeigen [7]), wie $f(x)$ die Elemente von $\mathfrak{B}$ denen von $\mathfrak{N}'^n$ bei Erhaltung der Gruppenrelationen eineindeutig zuordnet.

[6]) $\frac{\mathfrak{N}^n}{\mathfrak{N}^n_A}$ bedeutet die Faktorgruppe von $\mathfrak{N}^n_A$ in $\mathfrak{N}^n$. Das Produkt zweier Gruppen verstehen wir im Sinn meiner Arbeit „Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe", Monatsh. Math. Phys. 37 (1930), S. 159—162. Wegen der Definition von $\mathfrak{N}^0$ vgl. [4]). Unter $\mathfrak{A}^{-1}$ verstehen wir die leere Gruppe (Einheitsgruppe).

[7]) Den Beweis für $n = 0$ lassen wir als auf der Hand liegend weg.

Es sei also $\mathfrak{K}^n = \{K_i^n\}$ eine Folge gemäß diesen Bedingungen. Das Bild von A ist ein Punkt a. Daher fallen die Bilder der Ränder $R(K_i^n)$ in Umgebungen U_i von a, deren Halbmesser mit $\frac{1}{i}$ gegen 0 gehen. Ergänzen wir jeden Komplex K'^n_i durch den Verbindungskomplex $a \cdot R(K'^n_i)$ zu einem Zykel C'^n_i, so ist die Folge $\{C'^n_i\}$ wegen 1), 2), 3) ein Vollzykel. Wegen 4) entsprechen auf diese Weise verschiedenen Folgen $\{K_i^n\}$ und $\{L_i^n\}$, die dasselbe Element von $\mathfrak{B}$ darstellen, Volzykel einer und derselben Zykelklasse in $\mathfrak{R}'^n$. Es wird also dadurch jedem Element von $\mathfrak{B}$ eindeutig ein Element von $\mathfrak{R}'^n$ zugeordnet.

Nun sei umgekehrt $\mathfrak{Z}' = \{Z_i'\}$ ein Element von $\mathfrak{R}'^n$. Wir bezeichnen das in I(5) durch die stetige Abbildung der abgeschlossenen kompakten Menge K den Zahlen $\varepsilon, \varepsilon'$ zugeordnete δ mit $\delta(K, \varepsilon, \varepsilon')$. Nun sei $U_0' = R'$ und U_i' für $i = 1, 2, \ldots$ die offene Umgebung von a in R' vom Halbmesser $\frac{1}{2^i}$. Das Gesamturbild von U_i' heiße U_i. Das Gesamturbild von $\overline{U_i'}$ ist dann $\overline{U}_i$. ε_i und ε_i' seien monoton abnehmend gegen 0 konvergent. Die Folgen $\{\varepsilon_i''\}$ und $\{\delta_i\}$ wählen wir monoton abnehmend gegen 0 konvergent so, daß sie die folgenden Eigenschaften haben:

a) $\varepsilon_i'' < \delta(R - U_i, \varepsilon_i', \varepsilon_i)$ d) $\delta_{i+1} < \delta(\overline{U}_{i-1} - U_i, \varepsilon''_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$

b) $\delta_i < \frac{1}{2^{i+1}}$ e) $\delta_{i+1} < \delta(\overline{U}_{i-1} - U_{i+1}, \varepsilon''_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$

c) $\delta_i < \delta(\overline{U}_{i-1} - U_i, \varepsilon_i'', \varepsilon_i)$ f) $\delta_{i+1} < \delta(R - U_i, \varepsilon''_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$.

Dann wählen wir aus $\mathfrak{Z}'$ eine Teilfolge $\mathfrak{C}' = \{C_i'\}$ so aus, daß $C_i' \sim_{\delta_i} C_k'$ für $k > i$ ist. Es gibt also für jedes i einen $(n+1)$-dimensionalen δ_i-Komplex K_i', dessen Rand $R(K_i') = C'_{i+1} - C_i'$ ist. Die algebraischen Komplexe aller n-Simplexe von C_i', bzw. von C'_{i+1}, deren Ecken außerhalb von U_i' liegen, mögen D_i' und G_i' heißen, wobei $G_0 = 0$, $R(D_i') = E_i'$ und $R(G_i') = H_i'$ sei. Ferner sei $J'_{i+1} = D'_{i+1} - G_i'$ für $i \geq 1$, $J_1' = D_1'$. Der algebraische Komplex aller $(n+1)$-Simplexe von K_i', deren Ecken außerhalb von U_i' liegen, heiße L_i'. F_i' sei der Relativrand von L_i' in K_i', d. h. es sei $R(L_i') = G_i' - D_i' + F_i'$. Damit ist $R(F_i') = E_i' - H_i'$. Wegen b) liegen E_i', H_i', F_i' in $U'_{i-1} - U_i'$. Nach I(5) gibt es wegen c) in $\overline{U}_{i-1} - U_i$ einen ε_i-Zykel E_i^*, dessen Bild $E_i^{*\prime} \sim_{\varepsilon_i''} E_i'$ in $\overline{U}'_{i-1} - U_i'$ ist. Ebenso

gibt es in $\overline{U}_{i-1} - U_i$, weil H_i' ein δ_{i+1}-Zykel in $\overline{U}'_{i-1} - U_i'$ ist, wegen d) einen ε_{i+1}-Zykel H_i^*, dessen Bild $H_i^{*\prime} \sim_{\varepsilon''_{i+1}} H_i'$ in $\overline{U}'_{i-1} - U_i'$ ist. Ganz wie in I (10) können wir in $\overline{U}_{i-1} - U_i$ einen ε_i-Komplex F_i^* finden, dessen Rand $R(F_i^*) = H_i^* - E_i^*$ ist und dessen Bild aus F_i' durch ε_i''-Abänderung[8]) in $\overline{U}'_{i-1} - U_i'$ entsteht. Ebenso können wir, weil J'_{i+1} ein δ_{i+1}-Komplex in $\overline{U}'_{i-1} - U'_{i+1}$ ist, wegen e) in $\overline{U}_{i-1} - U_{i+1}$ einen ε_{i+1}-Komplex J^*_{i+1} finden, dessen Rand $R(J^*_{i+1}) = E^*_{i+1} - H_i^*$ ist und dessen Bild $J^{*\prime}_{i+1}$ aus J'_{i+1} durch ε''_{i+1}-Abänderung innerhalb $\overline{U}'_{i-1} - U'_{i+1}$ entsteht. Ebenso können wir wegen f) in $R - U_i$ einen ε_{i+1}-Komplex G_i^* finden, dessen Rand $R(G_i^*) = H_i^*$ ist und dessen Bild $G_i^{*\prime}$ aus G_i' durch ε''_{i+1}-Abänderung in $R' - U_i'$ entsteht. Es sei $D_i^* = G^*_{i+1} + J_i^*$. $G_i^{*\prime} - D_i^{*\prime} + F_i^{*\prime}$ ist (nach der Definition der ε_i''-Abänderung) ein ε_i''-Komplex und zwar ein ε_i''-Zykel in $R' - U_i'$. Er geht aus $G_i' - D_i' + F_i'$ durch ε_i''-Abänderung hervor. Wegen a) können wir in $R - U_i$ einen ε_i-Komplex L_i^* finden, dessen Rand $G_i^* - D_i^* + F_i^*$ ist und dessen Bild $L_i^{*\prime}$ aus L_i' durch ε'-Abänderung hervorgeht. Also ist $G_i^* - D_i^* + F_i^* \sim_{\varepsilon_i} 0$ in $R - U_i$.

Da somit $E^*_{i+1} - E_i^* = R(F_i^* + J^*_{i+1})$ ist, ist die Folge $\{E_i^*\}$ ein Vollzykel $\mathfrak{E}^{n-1}$ in A. Ferner können wir die letzte Homologie so schreiben: $D^*_{i+1} - D_i^* + F_i^* - J^*_{i+1} \sim_{\varepsilon_i} 0$. Damit gibt die Folge $\{D_i^*\}$ ein Element der Gruppe $\mathfrak{B}$ mit dem Rand $\mathfrak{E}^{n-1}$. $f(x)$ ordnet also dem Vollzykel $\mathfrak{Z}'^n$ eindeutig dieses Element von $\mathfrak{B}$ zu. Daß homologen Vollzykeln von $\mathfrak{R}'^n$ auf diese Weise ein und dasselbe Element von $\mathfrak{B}$ zugeordnet wird, zeigt man ganz ähnlich.

Diese Zuordnung ist zu der zuerst angegebenen invers. Ferner bleiben bei beiden Zuordnungen die Gruppenrelationen ersichtlich erhalten. Damit ist (1) bewiesen.

Wir können (1) leicht noch in folgender Weise verallgemeinern.

(2) *Der kompakte metrische Raum R sei eindeutig und stetig auf den Raum R' abgebildet. Alle Gesamturbilder mit Ausnahme der endlich vielen A_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ mögen in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, (n-1)$ *die* mod m *definierte Zusammenhagszahl* 0 *haben, während A_k nur in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, (n-2)$ *die Zusammenhangszahl* 0, *in der* $(n-1)$*-ten Dimension eine beliebige Homologiegruppe* mod m $\mathfrak{A}_k^{n-1}$ *habe. Dann ist die n-te Homologiegruppe* mod m *von R' einstufig isomorph der Gruppe* $\mathfrak{B}$,

[8]) I, S. 458.

deren Elemente durch die Folgen $\mathfrak{K} = \{K_i^n\}$ *gemäß die Bedingungen* 1), 2), 3), 4) *mit* $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_r$ *gegeben sind.*

Für $n \neq 1$ *kann* $\mathfrak{B}$ *dargestellt werden als*

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{N}^n}{\mathfrak{N}_A^n} \mathfrak{A}_R^{n-1}.$$

Dabei ist $\mathfrak{N}_A^n$ *die größte Untergruppe von* $\mathfrak{N}^n$, *deren Elemente in* A *liegen,* $\mathfrak{A}_k^{n-1}$ *die größte Untergruppe von* $\mathfrak{A}^{n-1}$, *deren Elemente in* R *beranden* [9]).

Der Beweis von (2) ist dem von (1) fast wörtlich gleich.

[9]) Diese Ausnahmsstellung von $n = 1$ kommt daher, daß nur 0-dimensionale Zykel Komponenten haben können, die (vgl. [4])) keine Zykel sind. Dagegen gilt der Satz für $n = 0$, wobei für $\mathfrak{A}^{-1}$ die Einheitsgruppe einzusetzen ist. Der Beweis liegt auf der Hand.

Sur les ensembles analytiques nuls.

Par

N. Lusin (Moscou).

1. Les ensembles analytiques nuls. Un ensemble est dit *nul*, s'il est dépourvu d'éléments. Les ensembles analytiques nuls sont définis au moyen de cribles rectilignes C qui sont coupés par toute droite parallèle à l'axe $0Y$ en un ensemble bien ordonné conformément à la direction positive de $0Y$.

Comme un ensemble analytique nul est un ensemble mesurable B, son complémentaire $(-\infty, +\infty)$ est décomposé en un nombre dénombrable (ou fini) de constituantes mesurables B

$$(1) \qquad (-\infty, +\infty) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots /\beta.$$

Le plus petit des indices β tels que toutes les constituantes $\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{\beta+1}, \ldots /\Omega$ sont nulles est dit *degré* du crible C définissant un ensemble analytique nul. Si le degré β du crible considéré C est de première espèce, $\beta = \beta^* + 1$, la constituante $\mathcal{E}_{\beta^*}$ n'est pas nulle, $\mathcal{E}_{\beta^*} \neq 0$; elle est dite *constituante supérieure.* Si le degré β est de seconde espèce, il n'y a aucune constituante supérieure dans le développement (1).

2. Les cribles bien ordonnés. Parmi les cribles rectilignes C définissant les ensembles analytiques nuls, les plus simples sont les cribles Γ dits *bien ordonnés.*

Par définition même, est bien ordonné tout crible rectiligne Γ dont la projection orthogonale sur l'axe $0Y$ est bien ordonnée. Nous nous bornons ici à considérer les cribles rectilignes dont les éléments sont des ensembles de classe 0, ou bien, simplement, sont des portions, pris en un nombre dénombrable (ou fini) et situés sur des droites parallèles à l'axe $0X$.